



ΠΑΝΤΕΙΟΝ
ΠΑΝΤΕΙΟΝ

SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES

ΠΟΣΟΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Γιώργος Λούντζης (PhD, MSc, MEng)

Εντεταλμένος Διδάσκων (ΕΣΠΑ)
2024 – 2025

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

1. ΑΠΛΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΑΣ
2. ΤΡΟΠΟΙ ΛΥΣΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ
3. ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ
4. ΓΕΝΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ
5. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΤΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ
6. ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΑΠΛΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} \rightarrow$ εξίσωση διαφοράς πρώτου βαθμού

$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} - Y_{t-2} \rightarrow$ εξίσωση διαφοράς δευτέρου βαθμού

Οι εξισώσεις διαφοράς πρώτου βαθμού μπορούν να παρουσιαστούν με την ακόλουθη μορφή

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = X_t$$

ΑΠΛΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

Έστω, ότι το εθνικό εισόδημα μιας χώρας στην περίοδο t , Y_t , προσδιορίζεται από την ακόλουθη γενική σχέση

$$Y_t = 10 + 5Y_{t-1} + 73Y_{t-2} - 18Y_{t-3}$$

Έστω επίσης ότι στις τρεις τελευταίες περιόδους το εθνικό εισόδημα ήταν

$t - 1 \rightarrow 2$ δισ. ευρώ

$t - 2 \rightarrow 1$ δισ. ευρώ

$t - 3 \rightarrow 1,5$ δισ. ευρώ

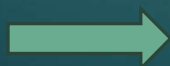


$$Y_t = 10 + (5 \cdot 2) + (73 \cdot 1) - (18 \cdot 1,5) = 66 \text{ δισ. ευρώ}$$

το εισόδημα της τρέχουσας περιόδου t

Για την $t+1$

$$Y_{t+1} = 10 + 5Y_{t-1+1} + 73Y_{t-2+1} - 18Y_{t-3+1}$$



$$Y_{t+1} = 10 + 5Y_t + 73Y_{t-1} - 18Y_{t-2}$$

ΑΠΛΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9


$$Y_{t+1} = 10 + 5Y_t + 73Y_{t-1} - 18Y_{t-2}$$

Έχοντας εκτιμήσει το εισόδημα της τρέχουσας περιόδου ίσο με 66 δισ. ευρώ., δηλαδή $Y_t = 66$:

$$Y_{t+1} = 5(66) + 73(2) - 18(1) + 10 = 468$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορώ να υπολογίσω το εθνικό εισόδημα για την περίοδο $t+2$ κ.ο.κ.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞ. ΔΙΑΦΟΡΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

Επαναληπτική Μέθοδος

Έστω στην περίπτωση μιας κλειστής οικονομίας χωρίς κυβέρνηση γνωρίζουμε ότι

$$Y_t = C_t + I_t$$

όπου

Y_t : εθνικό εισόδημα,

C_t : κατανάλωση

I_t : επενδύσεις

Όλες οι μεταβλητές αντιστοιχούν στην περίοδο t .

Αν υποθέσουμε ότι η μεταβλητή $I=I^*$ η οποία δεν μεταβάλλεται στο χρόνο και ότι η κατανάλωση C_t είναι συνάρτηση του εισοδήματος της προηγούμενης περιόδου Y_{t-1} , τότε η συνάρτηση κατανάλωσης εκφράζεται

$$C_t = a + bY_{t-1}$$

όπου a το αυτόνομο μέρος της κατανάλωσης και b η οριακή ροπή για κατανάλωση (MPC).

ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞ. ΔΙΑΦΟΡΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

Επαναληπτική Μέθοδος

$$\left. \begin{array}{l} Y_t = C_t + I_t \\ C_t = a + bY_{t-1} \end{array} \right\} Y_t = a + bY_{t-1} + I_t^* \quad \text{Πρώτου βαθμού γραμμική εξίσωση διαφοράς}$$

Αν το Y_t επηρεαζόταν από γεγονότα στις προηγούμενες περιόδους $t - 2$ ή $t - 3$, δηλαδή $Y_t = f(Y_{t-2})$ ή $Y_t = f(Y_{t-3})$, τότε θα είχαμε δευτέρου και τρίτου βαθμού εξισώσεις διαφοράς αντίστοιχα

Αν θέσω $a = 50$, $I = 500$ και $b = 0,85$, τότε

$$Y_t = 50 + 0,85Y_{t-1} + 500 \quad \rightarrow \quad Y_t = 550 + 0,85Y_{t-1},$$

Για $Y_{t-1} = 2.000$:

$$Y_t = 550 + 0,85Y_{t-1} = 550 + 0,85(2.000) = 2.250$$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞ. ΔΙΑΦΟΡΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

Επαναληπτική Μέθοδος

$$Y_t = 550 + 0,85Y_{t-1}$$

$$Y_1 = 2.250$$

Με βάση τα παραπάνω μπορώ να υπολογίσω το μέγεθος του μελλοντικού εισοδήματος μιας σειράς χρονικών περιόδων:

$$Y_2 = 550 + 0,85Y_{2-1} = 550 + 0,85(2.250) = 2.462,5$$

$$Y_3 = 550 + 0,85Y_{3-1} = 550 + 0,85(2.462,5) = 2.643,1$$

$$Y_4 = 550 + 0,85 Y_{4-1} = 550 + 0,85(2.643,1) = 2.796,6$$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞ. ΔΙΑΦΟΡΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

Γενική Μέθοδος

Υποθέτω ότι ψάχνω τη λύση της ακόλουθης εξίσωσης διαφοράς πρώτου βαθμού

$$Y_t = a + bY_{t-1}$$

Αν θέσουμε $a = 0$, τότε θα έχουμε την **ομογενή εξίσωση** $Y_t = bY_{t-1}$

Έστω η αρχική συνθήκη $Y_0 = C_0 = 3$

Με την επαναληπτική μέθοδο έχω:

Για $t=1$ $Y_1 = bY_{1-1} = bY_0 = 3b$

Για $t=2$ $Y_2 = bY_{2-1} = bY_1 = 3b \cdot b = 3 \cdot b^2$

Για $t=3$ $Y_3 = bY_2 = 3b^2 \cdot b = 3 \cdot b^3$

Για $t=4$ $Y_4 = bY_3 = 3b^3 \cdot b = 3 \cdot b^4$

$Y_t = A(b)^t$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞ. ΔΙΑΦΟΡΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

Γενική Μέθοδος

$$Y_t = a + bY_{t-1}$$

$$Y_t = A(b)^t$$

$$C_0 = Y_0 = A(b)^0 = A \rightarrow$$

και

$$Y_t = C_0(b)^t \rightarrow$$

$$3 = Y_0 = A(b)^0 = A$$

$$Y_t = 3(b)^t$$

Ικανοποιούν τόσο τη διαφορική εξίσωση όσο και την αρχική συνθήκη $Y_0 = C_0 = 3$.

Η ειδική λύση είναι της $Y_t = a + bY_{t-1}$

$$Y_t = a * \frac{1-b^t}{1-b}, \quad \text{όταν } b \neq 1$$

$$at, \quad \text{όταν } b = 1$$

Επομένως, η γενική λύση θα είναι

$$Y_t = Ab^t + a * \frac{1-b^t}{1-b}, \quad \text{όταν } b \neq 1$$

$$A + at, \quad \text{όταν } b = 1$$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞ. ΔΙΑΦΟΡΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

Γενική Μέθοδος

$$Y_t = \begin{cases} Ab^t + a * \frac{1-b^t}{1-b}, & \text{όταν } b \neq 1 \\ A + at, & \text{όταν } b = 1 \end{cases}$$

Απόδειξη:

Η αρχική τιμή δίνεται από $Y_0 = C_0$, τότε από την $Y_t = a + bY_{t-1}$ έχω: $Y_1 = bY_0 + a$

$$\rightarrow Y_2 = bY_1 + a = b(bY_0 + a) + a = b^2Y_0 + ba + a$$

$$\rightarrow Y_3 = bY_2 + a = b^3Y_0 + b^2a + ba + a$$

Για $t = n$ θα έχουμε, επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία,

$$Y_t = b^t Y_0 + (b^{t-1} + b^{t-2} + \dots + b + 1)a \rightarrow Y_t = b^t Y_0 + a \sum_{i=0}^{t-1} b^i$$

$$\rightarrow Y_t = b^t Y_0 + a \sum_{i=0}^{t-1} b^i \rightarrow Y_t = b^t Y_0 + a * \frac{1-b^t}{1-b} \quad (b \neq 1)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνεται η εξίσωση διαφοράς $Y_t = -7Y_{t-1} + 16$.

Γνωρίζουμε επίσης ότι $Y_0 = 5$. Αφού $b = -7 \neq 1$ με τη χρησιμοποίηση της $Y_t = Ab^t + a * \frac{1-b^t}{1-b}$, όταν $b \neq 1$ έχουμε $A + at$, όταν $b = 1$

$$Y_t = A(-7)^t + 16 * \frac{1-(-7)^t}{1-(-7)}$$

Αφού η αρχική τιμή είναι $Y_0 = 5$ μπορούμε να ορίσουμε την A.

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση την τιμή αυτή, παίρνουμε: $Y_0 = 5 = A(-7)^0 + 16 * \frac{1-(-7)^0}{1-(-7)} = A$

Επομένως, η γενική λύση γίνεται:

$$Y_t = 5(-7)^t + 16 * \frac{1-(-7)^t}{1-(-7)} = 5(-7)^t + 16 * \frac{1-(-7)^t}{8} = 5(-7)^t + 16 * \frac{1}{8} - 16 * \frac{(-7)^t}{8} = 5(-7)^t + 2 - 2(-7)^t = (-7)^t * (5-2) + 2 = 3(-7)^t + 2$$

→ $Y_t = 3(-7)^t + 2$ που είναι η λύση της εξίσωσης διαφοράς $Y_t = -7Y_{t-1} + 16$ όταν αυτή ικανοποιεί τόσο την αρχική συνθήκη όσο και την ίδια την εξίσωση διαφοράς

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

$$Y_t = -7Y_{t-1} + 16 \text{ (αρχική εξίσωση)}$$

Πρώτη συνθήκη, αυτή πράγματι ικανοποιείται, ενώ για τη δεύτερη θα έχουμε για $t = 0$ και $t = 1$.

$$Y_t = 3(-7)^t + 2 \rightarrow Y_0 = 3(-7)^0 + 2 = 5$$

$$Y_1 = 3(-7)^1 + 2 = -19$$

Αντικαθιστώντας $Y_1 = -19$ και $Y_0 = 5$ στην αρχική εξίσωση, έχουμε

$$-19 = 16 - 7(5) = 16 - 35$$

Έτσι, η $Y_t = -7Y_{t-1} + 16$ αποτελεί τη γενική λύση της $Y = -7 Y_{t-1} + 16$

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

Έστω η γενική λύση της εξίσωσης διαφοράς:

$$Y_t = bY_{t-1} + a, \text{ όταν } b \neq 1 \text{ και } Y_0 = A.$$

$$Y_t = Ab^t + a * \frac{1-b^t}{1-b}$$

$$\rightarrow Y_t = Y_0 b^t + a * \frac{1-b^t}{1-b} = Y_0 b^t - \frac{ab^t}{1-b} + \frac{a}{1-b}$$

$$\rightarrow Y_t = (Y_0 - \frac{a}{1-b})b^t + \frac{a}{1-b} \quad \text{ή σε γενική μορφή} \quad Y_t = Mb^t + C \quad \begin{array}{l} \text{όπου } M = (Y_0 - \frac{a}{1-b})b^t \text{ και} \\ C = \frac{a}{1-b} \end{array}$$

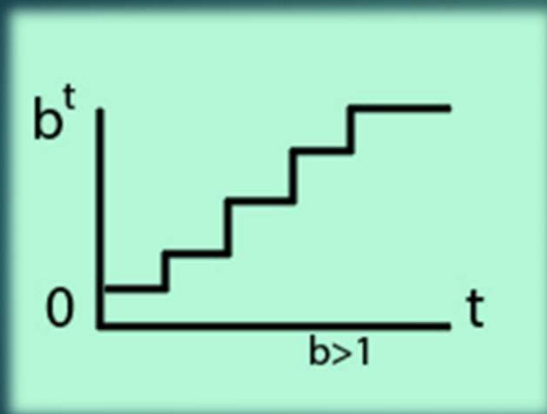
Η εξίσωση αυτή θα είναι δυναμικά σταθερή μόνο αν η συμπληρωματική συνάρτηση $Mb^t \rightarrow 0$, καθώς $t \rightarrow \infty$. Είναι φανερό ότι όλα θα εξαρτώνται από τη βάση b . Υποθέτοντας $M = 1$ και $C = 0$, η εκθετική έκφραση b^t θα δημιουργήσει επτά διαφορετικές γραμμές επέκτασης ανάλογα με την τιμή του b .

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

$Y_t = Mb^{t+1} + C$ Ο συντελεστής b μπορεί να πάρει τιμές από το $+\infty$ έως το $-\infty$.

1. Αν $b > 1$, το b^t μεταβάλλεται θετικά με αυξητικό ρυθμό, καθώς αυξάνεται το t .



π.χ. $(2)^t$

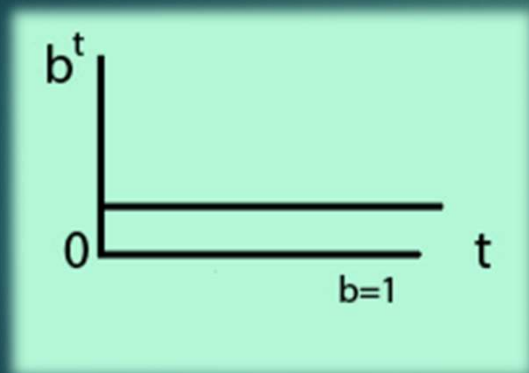
Τιμή b	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
$b > 1$	1	2	4	8	16

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

$Y_t = Mb^t + C$ Ο συντελεστής b μπορεί να πάρει τιμές από το $+\infty$ έως το $-\infty$.

2. Αν $b = 1$, τότε $b^t = 1$ για όλες τις τιμές του t



$(1)^t$

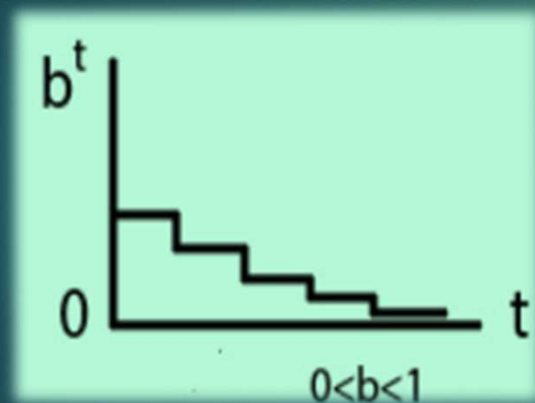
Τιμή b	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
$b=1$	1	1	1	1	1

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

$Y_t = Mb^t + C$ Ο συντελεστής b μπορεί να πάρει τιμές από το $+\infty$ έως το $-\infty$.

3. Αν $0 < b < 1$, τότε το b είναι θετικό και το b^t μειώνεται καθώς το t αυξάνεται συγκλίνοντας προς την αρχή των οριζόντιων αξόνων. Ωστόσο, το μέγεθος του b^t παραμένει πάντα θετικό



π.χ. $(\frac{1}{2})^t$

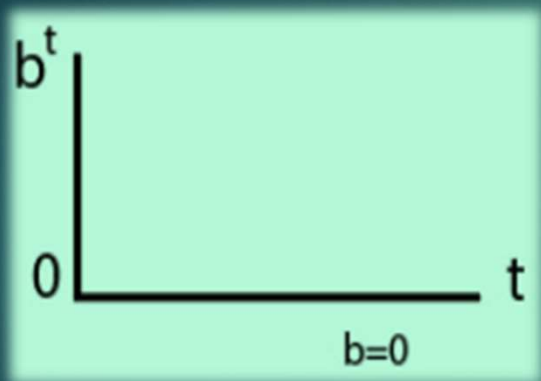
Τιμή b	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
$0 < b < 1$	1	$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/16$

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

$Y_t = Mb^t + C$ Ο συντελεστής b μπορεί να πάρει τιμές από το $+\infty$ έως το $-\infty$.

4. Αν $b = 0$, τότε $b^t = 0$ για όλες τις τιμές του t



$(0)^t$

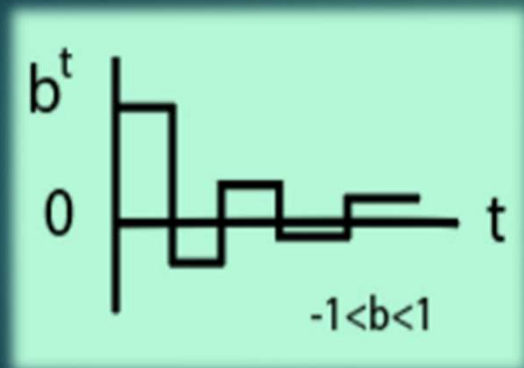
Τιμή b	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
$b=0$	0	0	0	0	0

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

$Y_t = Mb^t + C$ Ο συντελεστής b μπορεί να πάρει τιμές από το $+\infty$ έως το $-\infty$.

5. Αν $-1 < b < 0$, τότε b^t είναι ένας αρνητικός δεκαδικός αριθμός, οπότε θα εναλλάσσει πρόσημα και θα συγκλίνει προς τον οριζόντιο άξονα, καθώς το t αυξάνεται



π.χ. $(-\frac{1}{2})^t$

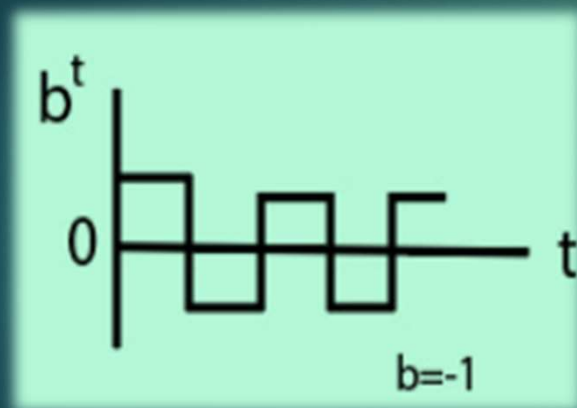
Τιμή b	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
$-1 < b < 0$	1	$-1/2$	$1/4$	$-1/8$	$1/16$

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

$Y_t = Mb^t + C$ Ο συντελεστής b μπορεί να πάρει τιμές από το $+\infty$ έως το $-\infty$.

6. Αν $b = -1$, τότε το b^t ταλαντώνεται μεταξύ του $+1$ και του -1



$(-1)^t$

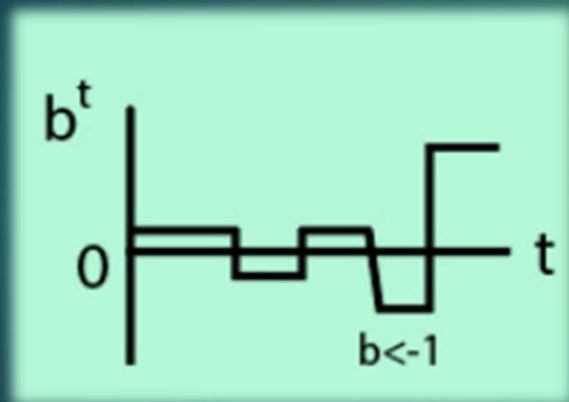
Τιμή b	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
$b=-1$	1	-1	1	-1	1

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

$Y_t = Mb^t + C$ Ο συντελεστής b μπορεί να πάρει τιμές από το $+\infty$ έως το $-\infty$.

7. Αν $b < -1$, τότε το b^t ταλαντώνεται και απομακρύνεται από τον οριζόντιο άξονα



$(-2)^t$

Τιμή b	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
$b < -1$	1	-2	4	-8	16

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

$Y_t = Mb^t + C$ Ο συντελεστής b μπορεί να πάρει τιμές από το $+\infty$ έως το $-\infty$.

Συνοπτικά,

- Αν $|b| > 1$, η γραμμή επέκτασης αποκλίνει από το επίπεδο ισορροπίας της Y .
- $|b| < 1$, η γραμμή επέκτασης συγκλίνει προς το επίπεδο ισορροπίας της Y .
- $b > 0$, η γραμμή επέκτασης δεν ταλαντώνεται
 $b < 0$, η γραμμή επέκτασης ταλαντώνεται

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

Να λυθεί η ακόλουθη εξίσωση διαφοράς:

$$5Y_t + 2Y_{t-1} - 140 = 0 \text{ για } Y_0 = 30$$

Ζητείται

α) η απάντηση χρησιμοποιώντας $t = 1$ και $t = 2$, και

β) Να σχολιαστεί η φύση της γραμμής επέκτασης

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

Αρχικά αλλάζουμε την εξίσωση διαφοράς, ώστε να πάρει τη μορφή:

$$5Y_t + 2Y_{t-1} - 140 = 0 \rightarrow 5Y_t = -2Y_{t-1} + 140 \rightarrow Y_t = -\frac{2}{5} Y_{t-1} + 28$$

Η γενική λύση θα βρίσκεται με βάση τη σχέση $Y_t = \begin{cases} Ab^t + a * \frac{1-b^t}{1-b}, & \text{όταν } b \neq 1 \\ A + at, & \text{όταν } b = 1 \end{cases}$

$$\text{Αφού } b = -\frac{2}{5} \neq 1, \text{ έχω: } Y_t = Ab^t + a * \frac{1-b^t}{1-b} \rightarrow Y_t = A\left(-\frac{2}{5}\right)^t + 28 * \frac{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^t}{1-\left(-\frac{2}{5}\right)}$$

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

Εφόσον η αρχική τιμή της Y_t είναι $Y_0 = 30$, θα μπορούμε να ορίσουμε το A .

Έτσι, για $t = 0$, παίρνουμε:

$$Y_0=30=A\left(-\frac{2}{5}\right)^0 + 28 * \frac{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^0}{1-\left(-\frac{2}{5}\right)}$$

$$Y_0 = 30 = A * 1 + 0 \rightarrow Y_0 = 30 = A \rightarrow A = 30$$

Οπότε,

$$Y_t = 30\left(-\frac{2}{5}\right)^t + 28 * \frac{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^t}{1-\left(-\frac{2}{5}\right)} \rightarrow Y_t = 30\left(-\frac{2}{5}\right)^t + 28 * \frac{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^t}{7/5} \rightarrow Y_t = 10\left(-\frac{2}{5}\right)^t + 20 \quad (\text{γενική λύση})$$

$$\text{Συνεπώς, για } t=1 \quad Y_t = 10\left(-\frac{2}{5}\right)^1 + 20 = 16$$

$$\text{για } t=2 \quad Y_t = 10\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + 20 = 21,6$$

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

Πράγματι, από τη γενική λύση $Y_t = 10\left(-\frac{2}{5}\right)^t + 20$ οδηγούμαστε στην αρχική εξίσωση διαφοράς $Y_t = -\frac{2}{5} Y_{t-1} + 28$.

$$Y_1 = -\frac{2}{5} Y_0 + 28 = 16$$

$$Y_2 = -\frac{2}{5} Y_1 + 28 = 21,6$$

Αφού το $b = -\frac{2}{5} = -0,4$, $b < 0$ και $|b| < 1$, η μεταβλητή Y , θα ταλαντώνεται διαχρονικά και θα συγκλίνει στο επίπεδο ισορροπίας, όπως αυτό εκφράζεται από την ειδική λύση.

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΙΣΤΟΥ ΤΗΣ ΑΡΑΧΝΗΣ (THE COBWEB MODEL)

Έστω ότι η προσφερόμενη ποσότητα, Q^s και η ζητούμενη ποσότητα Q^D , εξισώνονται κάτω από συνθήκες τέλει ανταγωνισμού:

$$Q^D = f(P)$$

$$Q^s = f(P)$$

$$Q^S = Q^D$$

Μια μεταβολή της τιμής κατά τη διάρκεια της παραγωγής και της συγκομιδής έχει ελάχιστη επίδραση στην προσφερόμενη ποσότητα Q^s στην παρούσα περίοδο t . Έτσι, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι μία μεταβολή στην τιμή P , η οποία μπορεί να επιτευχθεί για ένα προϊόν, έχει μια καθυστερημένη επίδραση. Με άλλα λόγια, η ποσότητα Q^s στην περίοδο t μπορεί να εξαρτάται από την τιμή P που επικράτησε στην αγορά την προηγούμενη περίοδο $t - 1$. Για το λόγο αυτό μπορούμε να εκφράσουμε τη συνάρτηση της προσφοράς ως $Q^s = f(P_{t-1})$, οπότε το σύστημα

$$Q^d = \alpha - \beta P_t \quad (\alpha, \beta > 0)$$

$$Q^s = -\gamma + \delta P_{t-1} \quad (\gamma, \delta > 0)$$

$$Q^s = Q^d$$

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΙΣΤΟΥ ΤΗΣ ΑΡΑΧΝΗΣ (THE COBWEB MODEL)

Από τις εξισώσεις

$$Q^d = \alpha - \beta P_t$$

$$Q^s = -\gamma + \delta P_{t-1}$$

$$Q^s = Q^d$$

$$\left. \begin{array}{l} Q^d = \alpha - \beta P_t \\ Q^s = -\gamma + \delta P_{t-1} \\ Q^s = Q^d \end{array} \right\} \beta P_t + \delta P_{t-1} = \alpha + \gamma \rightarrow P_t = \frac{\alpha + \gamma}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} * P_{t-1}$$

Αφού $\beta > 0$ και $\delta > 0$, $\rightarrow$ λόγος $-\frac{\delta}{\beta} \neq 1$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο της γενικής λύσης $Y_t = \begin{cases} Ab^t + a * \frac{1-b^t}{1-b}, & \text{όταν } b \neq 1 \\ A + at, & \text{όταν } b = 1 \end{cases}$

$$P_t = (P_0 - \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}) \left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

όπου P_0 εκφράζει την αρχική τιμή.

Από τον παραπάνω τύπο μπορούμε να παρατηρήσουμε τρία σημεία όσον αφορά τη γραμμή επέκτασης στο χρόνο.

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΙΣΤΟΥ ΤΗΣ ΑΡΑΧΝΗΣ (THE COBWEB MODEL)

$$P_t = (P_0 - \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}) \left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

α) Όταν το οικονομικό πρότυπο βρίσκεται σε ισορροπία: $P_t = P_{t-1} = P^e$ όπου P είναι η τιμή ισορροπίας.

$$\text{Από τα παραπάνω} \quad \rightarrow \quad \beta P^e + \delta P^e = \alpha + \gamma \quad \rightarrow \quad (\beta + \delta) P^e = \alpha + \gamma \quad \rightarrow \quad P^e = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

Ο όρος $\frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$ μπορεί να θεωρηθεί ευσταθής ισορροπία.

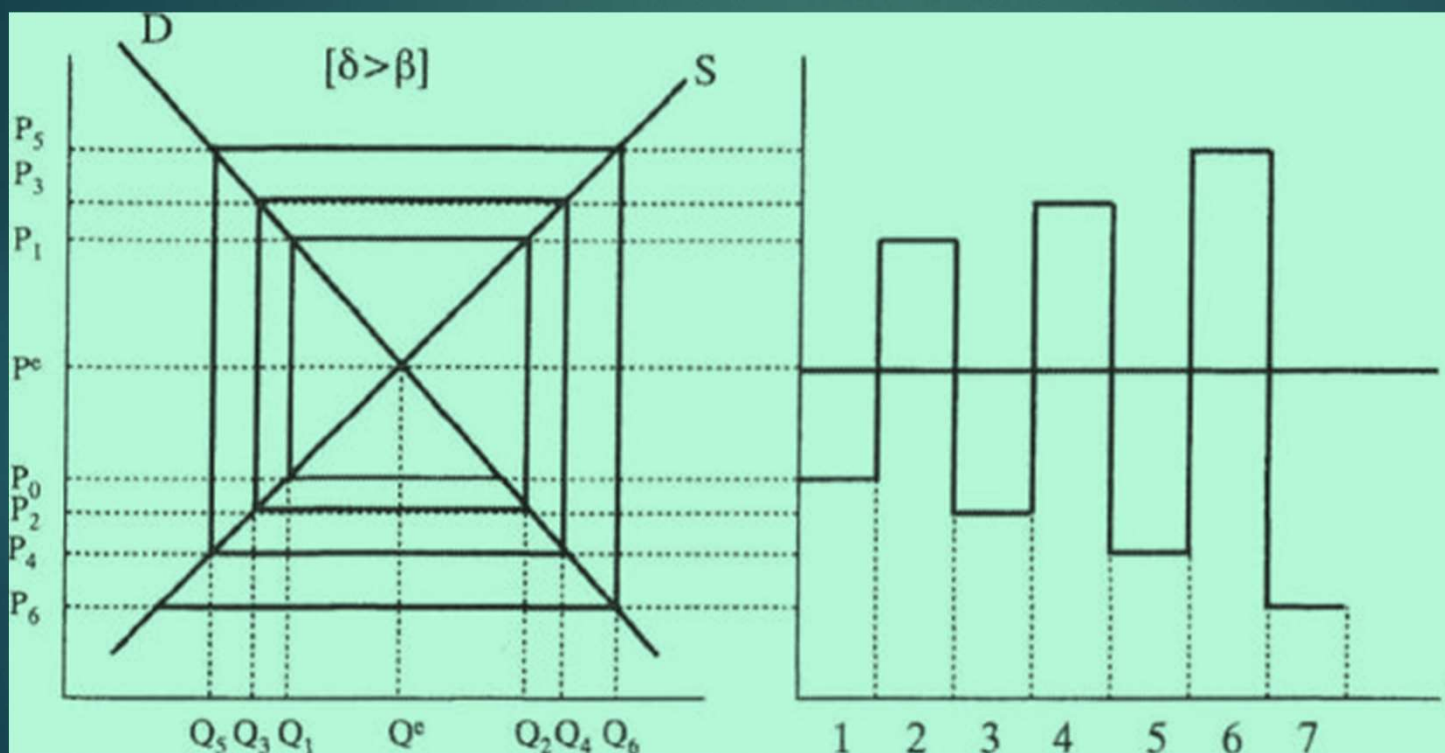
β) Αντικαθιστώντας την P^e στον τύπο της γραμμής επέκτασης στο χρόνο μπορούμε να εκφράσουμε τη γραμμή επέκτασης στο χρόνο ως

$$P_t = (P_0 - P^e) \cdot \left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + P^e$$

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΙΣΤΟΥ ΤΗΣ ΑΡΑΧΝΗΣ (THE COBWEB MODEL)



$$Q^d = \alpha - \beta P_t$$

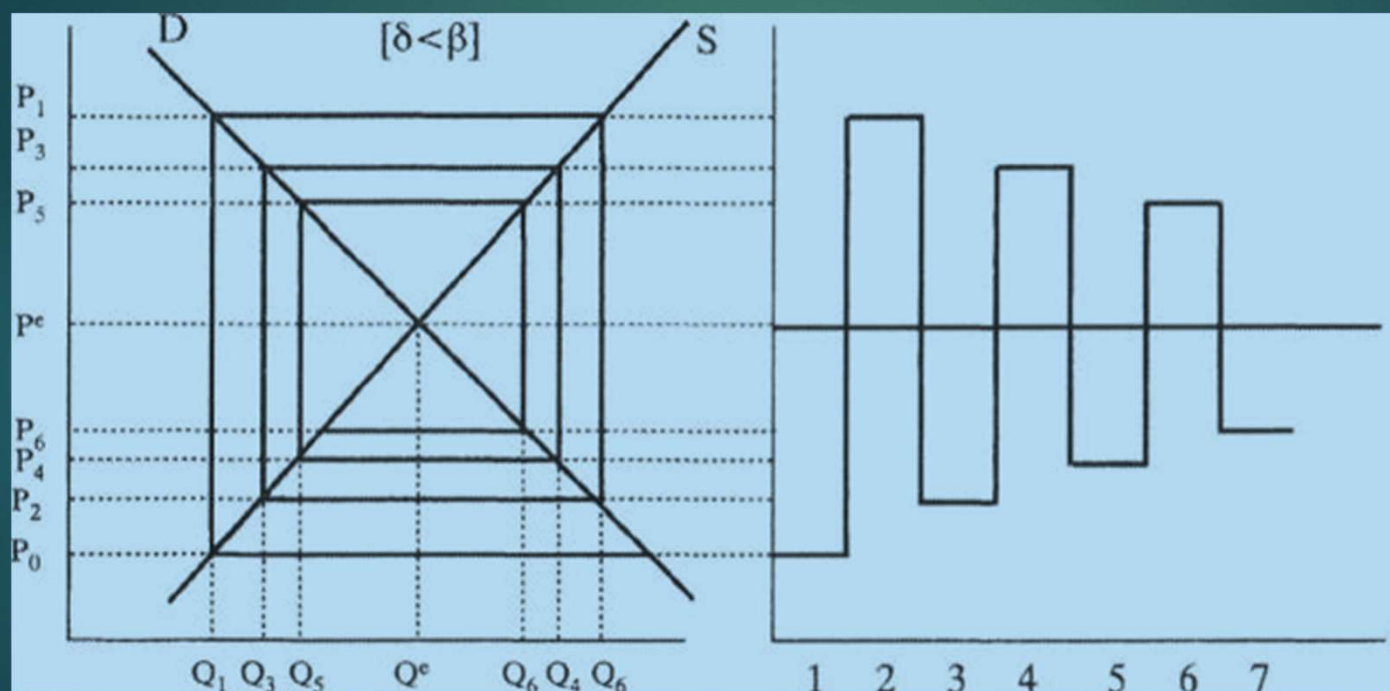
$$Q^s = -\gamma + \delta P_{t-1}$$

$$Q^s = Q^d$$

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΙΣΤΟΥ ΤΗΣ ΑΡΑΧΝΗΣ (THE COBWEB MODEL)



$$Q^d = \alpha - \beta P_t$$

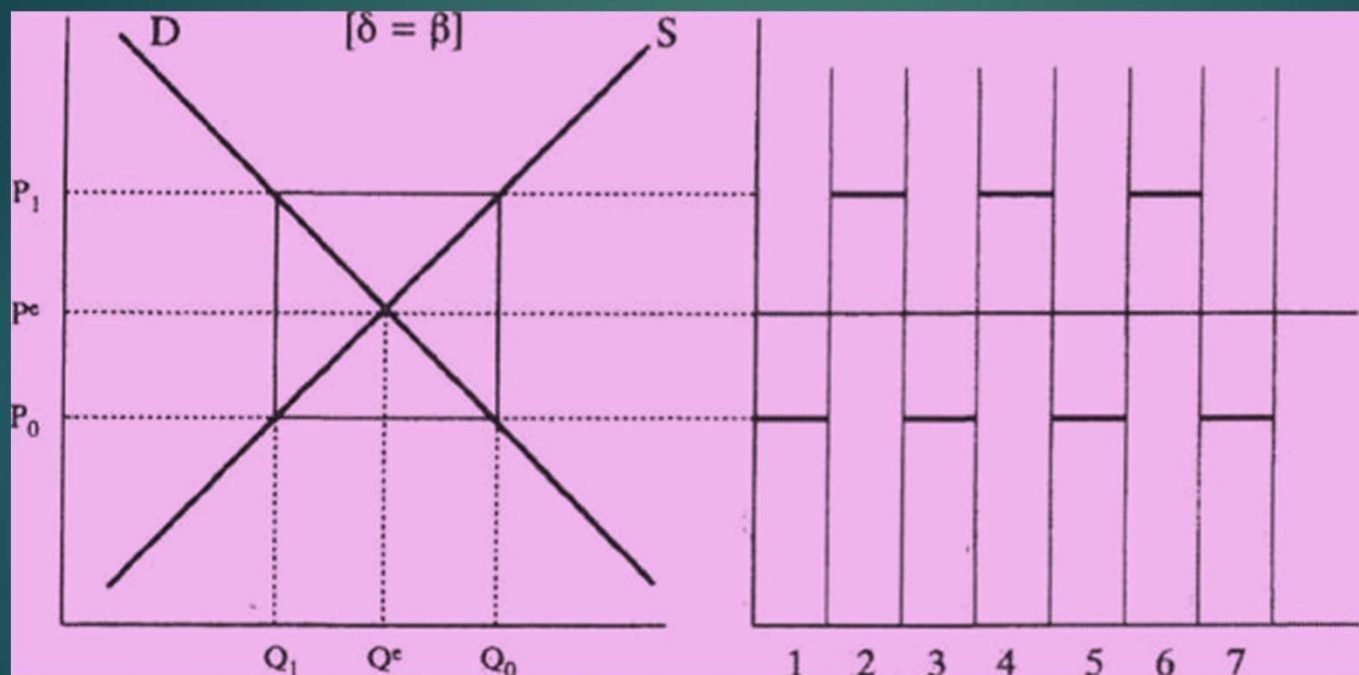
$$Q^s = -\gamma + \delta P_{t-1}$$

$$Q^s = Q^d$$

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΙΣΤΟΥ ΤΗΣ ΑΡΑΧΝΗΣ (THE COBWEB MODEL)



$$Q^d = \alpha - \beta P_t$$
$$Q^s = -\gamma + \delta P_{t-1}$$
$$Q^s = Q^d$$

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

Αλληλεπίδραση πολλαπλασιαστή και επιταχυντή

Η αρχή του επιταχυντή είναι μια θεωρία προσδιορισμού των επενδύσεων, σύμφωνα με την οποία το ύψος των επενδύσεων είναι συνάρτηση των μεταβολών του εισοδήματος. Στην απλούστερή της μορφή είναι:

$$I_t = c(Y_t - Y_{t-1})$$

(I_t) η επένδυση μιας περιόδου

(Y) εισόδημα

C ο λόγος κεφαλαίου-προϊόντος, δηλαδή $\frac{K}{Q}$ και προσδιορίζει το μέγεθος της επένδυσης για δεδομένη μεταβολή του εισοδήματος

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

Αλληλεπίδραση πολλαπλασιαστή και επιταχυντή

Στη θεωρία του πολλαπλασιαστή μια αύξηση της επένδυσης έχει σαν αποτέλεσμα πολλαπλάσια αύξηση του εισοδήματος. Σε αλγεβρική μορφή ο πολλαπλασιαστής, στην απλούστερή του μορφή, δίδεται από τη σχέση

$$\Delta Y = \frac{1}{1-\beta} \Delta I \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta Y}{\Delta I} = \frac{1}{1-\beta}, \quad 0 < \beta < 1$$

όπου

ΔY , η μεταβολή του εισοδήματος

ΔI , η μεταβολή των επενδύσεων μεταξύ δύο διαδοχικών περιόδων αντιστοίχως και

β η οριακή ροπή για κατανάλωση.

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

Αλληλεπίδραση πολλαπλασιαστή και επιταχυντή

Έστω το οικονομικό υπόδειγμα:

$$C_t = \alpha + \beta Y_t$$

$$I_t = c(Y_t - Y_{t-1})$$

$$Y_t = C_t + I_t$$

$$\rightarrow Y_t = \alpha + \beta Y_t + c(Y_t - Y_{t-1})$$

$$\rightarrow Y_t = -\frac{\alpha}{c-(1-\beta)} + \frac{c}{c-(1-\beta)} Y_{t-1}$$

Πρώτου βαθμού εξίσωση διαφοράς και δείχνει ότι το επίπεδο του εισοδήματος μιας περιόδου είναι συνάρτηση του εισοδήματος της προηγούμενης περιόδου.

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Αλληλεπίδραση πολλαπλασιαστή και επιταχυντή

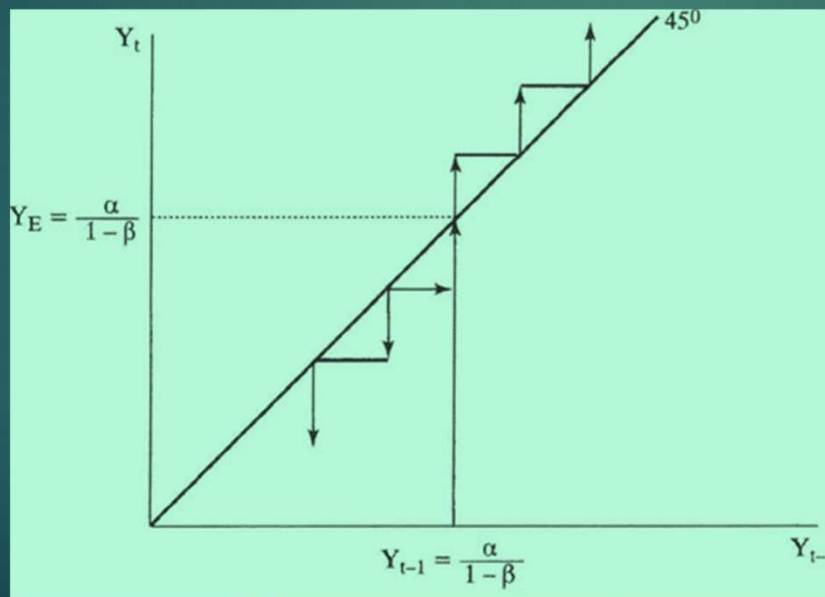
$$Y_t = -\frac{\alpha}{c-(1-\beta)} + \frac{c}{c-(1-\beta)} Y_{t-1}$$

$$Y_t = [Y_0 - (-\frac{\alpha}{c-(1-\beta)})] * (\frac{c}{c-(1-\beta)})^t + \frac{\alpha}{c-(1-\beta)}$$

Ο λόγος $\frac{\alpha}{1-\beta}$ μπορεί να θεωρηθεί ως η διαχρονική τιμή ισορροπίας του εισοδήματος δηλαδή

$$Y_E = \frac{\alpha}{1-\beta}$$

$$Y_t = (Y_0 - Y_E) * (\frac{c}{c-(1-\beta)})^t + Y_E$$



ΑΣΚΗΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

Να σχολιαστεί η γραμμή επέκτασης των ακόλουθων συναρτήσεων:

$$Y_t = 3^t + 1$$

$$Y_t = -3\left(\frac{1}{4}\right)^t + 2$$

$$Y_t = 2\left(-\frac{4}{5}\right)^t + 9$$

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

Οι συναρτήσεις είναι της μορφής: $Y_t = Mb^t + c$

Η μορφή της γραμμής επέκτασης εξαρτάται από την τιμή του b .
Συγκεκριμένα:

Για την $Y_t = 3^t + 1$, $b = 3 > 1$, άρα η γραμμή επέκτασης αποκλίνει από το επίπεδο ισορροπίας και μεταβάλλεται θετικά με αυξητικό ρυθμό.

Για την $Y_t = -3(\frac{1}{4})^t + 2$, $0 < b < 1$, άρα η γραμμή επέκτασης θα μειώνεται καθώς συγκλίνει προς το επίπεδο ισορροπίας.

Για την $Y_t = 2(-\frac{4}{5})^t + 9$, $-1 < b < 0$, άρα η γραμμή επέκτασης θα ταλαντώνεται εναλλάσσοντας πρόσημα καθώς συγκλίνει προς το επίπεδο ισορροπίας.

ΑΣΚΗΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

Να βρεθεί η λύση των ακόλουθων εξισώσεων διαφοράς και να σχολιαστεί η γραμμή επέκτασης.

$$Y_t = \frac{1}{3} Y_{t-1} + 6 \quad (Y_0 = 1)$$

$$Y_t = -2 Y_{t-1} + 1 \quad (Y_0 = 1)$$

$$Y_t = Y_{t-1} + 3 \quad (Y_0 = 2)$$

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

Η λύση της εξίσωσης διαφοράς της μορφής: $Y_t = a + b Y_{t-1}$, a, b σταθερές και $Y_0 = A$

Είναι η:
$$Y_t = \begin{cases} Ab^t + a \frac{1-b^t}{1-b}, & \text{όταν } b \neq 1 \\ A + at, & \text{όταν } b = 1 \end{cases}$$

Η εξίσωση $Y_t = \frac{1}{3} Y_{t-1} + 6$, $Y_0 = 1$ έχει: $a = 6$, $b = \frac{1}{3} \neq 1$, $A = 1$

Άρα η γενική λύση είναι:
$$Y_t = Ab^t + a \frac{1-b^t}{1-b} = \left(\frac{1}{3}\right)^t + 6 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^t}{1 - \frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^t + 9 \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^t\right) \rightarrow Y_t = -8\left(\frac{1}{3}\right)^t + 9$$

Αφού $0 < b < 1$ η γραμμή επέκτασης θα συγκλίνει προς το επίπεδο ισορροπίας.

Η εξίσωση $Y_t = -2Y_{t-1} + 1$, $Y_0 = 1$ έχει: $a = 1$, $b = -2$, $A = 1$

Άρα γενική λύση είναι:
$$Y_t = Ab^t + a \frac{1-b^t}{1-b} = (-2)^t + \frac{1 - (-2)^t}{1 + 2} = (-2)^t + \frac{1}{3} (1 - (-2)^t) \rightarrow Y_t = \frac{2}{3}(-2)^t + \frac{1}{3}$$

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

Αφού $b < -1$ η γραμμή επέκτασης ταλαντώνεται και απομακρύνεται το επίπεδο ισορροπίας.

Η εξίσωση $Y_t = Y_{t-1} + 3$, $Y_0 = 2$ έχει: $a = 3$, $b = 1$, $A = 2$

Άρα γενική λύση είναι: $Y_t = 2 + 3t$

Άρα, αφού $b = 1$, η γραμμή επέκτασης έχει γραμμική συμπεριφορά θετικής κλίσης με διαρκή απομάκρυνση από την αρχική τιμή $Y_0 = 2$.

ΑΣΚΗΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

Θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις αποταμίευσης και επένδυσης δίνονται από τις ακόλουθες εξισώσεις

$$S_t = sY_t$$

$$I_t = g(Y_t - Y_{t-1})$$

$$S_t = I_t$$

όπου S και I η αποταμίευση και η επένδυση αντιστοίχως, s και g η οριακή ροπή για αποταμίευση και η οριακή ροπή για επένδυση και, τέλος, Y_t , το εισόδημα. Επίσης, γνωρίζουμε ότι $g = \frac{2}{3}$ και $s = \frac{1}{2}$ ενώ η αρχική συνθήκη είναι $Y_0 = 3$.

Ζητείται να βρεθεί η τιμή του εισοδήματος ισορροπίας Y , για οποιαδήποτε χρονική περίοδο και να ελεγχθεί εάν το εισόδημα συγκλίνει διαχρονικά στο σημείο ισορροπίας.

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

Αντικαθιστώντας στη σχέση: $S_t = I_t$, παίρνουμε: $S_t = I_t \rightarrow sY_t = g(Y_t - Y_{t-1})$

$$\rightarrow (s-g)Y_t = -gY_{t-1} \rightarrow Y_t = \frac{g}{g-s} Y_{t-1}$$

Για $g = \frac{2}{3}$ και $s = \frac{1}{2}$, η προς επίλυση εξίσωση διαφορών γίνεται:

$$Y_t = \frac{2/3}{\left(\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)} Y_{t-1} \rightarrow Y_t = 4Y_{t-1}, \quad Y_0 = 3$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι της γενικής μορφής $Y_t = bY_{t-1} + \alpha$,

όπου $\alpha = 0$, $b = 4 \neq 1$ και $A = 3$.

Άρα η γενική λύση είναι: $Y_t = Ab^t + a * \frac{1-b^t}{1-b} = 3 * 4^t$

Αφού $b = 4 > 1$, η γραμμή επέκτασης αποκλίνει διαχρονικά από το επίπεδο ισορροπίας $c = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

Δίνονται οι ακόλουθες συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης για το υπόδειγμα του ιστού της αράχνης:

α) $Q_t^d = 18 - 3P_t$, $Q_t^s = -3 + 4P_{t-1}$, $P_0 = 50$

β) $Q_t^d = 22 - 3P_t$, $Q_t^s = -2 + P_{t-1}$, $P_0 = 60$

γ) $Q_t^d = 19 - 6P_t$, $Q_t^s = -5 + 6P_{t-1}$, $P_0 = 100$

Να βρεθεί η τιμή του εισοδήματος για κάθε υπόδειγμα και να εξεταστεί εάν η ισορροπία είναι ευσταθής.

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

Έστω $Q_t^d = \alpha - \beta P_t$, συνάρτηση ζήτησης με $\alpha, \beta > 0$ και $Q_t^s = -\gamma + \delta P_{t-1}$ η συνάρτηση προσφοράς.

Το οικονομικό πρότυπο βρίσκεται σε ισορροπία όταν: $P_t = P_{t-1} = P^e$

Η τιμή ισορροπίας είναι: $P^e = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$

Η γραμμή επέκτασης στο χρόνο είναι η: $P_t = (P_0 - P^e) \left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + P^e$

α) Για $Q_t^d = 18 - 3P_t$, $Q_t^s = -3 + 4P_{t-1}$ και $P_0 = 50$, ισχύει: $\alpha = 18, \beta = 3, \gamma = 3, \delta = 4$

Η τιμή ισορροπίας είναι: $P^e = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} = \frac{18 + 3}{3 + 4} = \frac{21}{7} = 3$

Η γραμμή επέκτασης εκφράζεται από την: $P_t = (P_0 - P^e) \left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + P^e \rightarrow P_t = 47 \left(-\frac{4}{3}\right)^t + 3$

Αφού $\frac{\delta}{\beta} = \frac{4}{3} > 1$, το σύστημα είναι ασταθές ή αποκλίνον.

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

β) Για $Q_t^d = 22 - 3P_t$, $Q_t^s = -2 + P_{t-1}$ και $P_0 = 60$, ισχύει:

$$\alpha=22, \quad \beta=3, \quad \gamma=2, \quad \delta=1$$

Η τιμή ισορροπίας είναι:

$$P^e = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} = \frac{22 + 2}{3 + 1} = \frac{24}{4} = 6$$

Η γραμμή επέκτασης εκφράζεται από την: $P_t = (P_0 - P^e) \left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + P^e \rightarrow P_t = 54 \left(-\frac{1}{3}\right)^t + 6$

Αφού $\frac{\delta}{\beta} = \frac{1}{3} < 1$, το σύστημα είναι συγκλίνον.

γ) Για $Q_t^d = 19 - 6P_t$, $Q_t^s = -5 + 6P_{t-1}$ και $P_0 = 100$, ισχύει: $\alpha=19, \quad \beta=6, \quad \gamma=5, \quad \delta=6$

Η τιμή ισορροπίας είναι:

$$P^e = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} = \frac{19 + 5}{6 + 6} = \frac{24}{12} = 2$$

Η γραμμή επέκτασης εκφράζεται από την: $P_t = (P_0 - P^e) \left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + P^e \rightarrow P_t = 98(-1)^t + 2$

Αφού $\frac{\delta}{\beta} = 1$, η απόκλιση της ταλάντωσης ως προς την τιμή ισορροπίας είναι σταθερή, άρα το σύστημα δεν αποκλίνει ούτε συγκλίνει.

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

ΤΕΛΟΣ 9^{ΗΣ} ΕΝΟΤΗΤΑΣ