



SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES

ΠΑΝΤΕΙΟΝ
ΠΑΝΤΕΙΟΝ

ΠΟΣΟΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Γιώργος Λούντζης (PhD, MSc, MEng)

Εντεταλμένος Διδάσκων (ΕΣΠΑ)
2024 – 2025

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

1. ΜΕΡΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

2. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΡΩΤΗΣ ΚΑΙ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΜΕΡΙΚΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

3. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

4. ΟΛΙΚΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ//ΟΛΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

Έστω $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ μια συνάρτηση προσδιορισμένη σε ένα χώρο C του R^n και $P(\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_n)$, ένα σημείο του C . Εάν υποθέσουμε τώρα ότι $n-1$ τιμές, δηλαδή $X_2, X_3, \dots, X_n$ είναι δεδομένες σταθερές, η Y θα γίνει συνάρτηση μιας μόνο μεταβλητής της X_1 , έτσι που, εάν αυτή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη για $X_1 = \underline{X}_1$, το

$$\lim_{\Delta X_1 \rightarrow 0} = \frac{f(X_1 + \Delta X_1, X_2, \dots, X_n) - f(X_1, X_2, \dots, X_n)}{h(X_1 + \Delta X_1) - h(X_1)}$$

λέγεται «πρώτη μερική παράγωγος» της Y ως προς την X_1 στο σημείο P και θα συμβολίζεται με

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)_P, (f_{x_1})_P \text{ κλπ.}$$

και θα δείχνει την επίδραση της μεταβλητής X_1 στο Y .

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

... η διαδικασία που μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε την επίδραση της μεταβλητής X , στην Y , κρατώντας σταθερές τις $X_2, X_3, \dots, X_n$ ονομάζεται μερική παραγωγήιση.

Αν έχω τη συνάρτηση

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

τότε ο λόγος $\frac{\partial y}{\partial x_1}$, είναι η μερική παράγωγος της μεταβλητής Y ως προς τη μεταβλητή X , και γράφεται συνήθως ως

$$f_{x1}$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

Οι δεύτερες μερικοί παράγωγοι μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών $f(X_1, X_2)$ γράφονται

$$\left. \begin{aligned}
 F_{x_1x_1} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \\
 F_{x_2x_2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \\
 F_{x_1x_2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\
 F_{x_2x_1} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}
 \end{aligned} \right\} \text{ Σταυροειδής μερική παράγωγος}$$

Εάν οι $f_{x_1x_2}$, $f_{x_2x_1}$, είναι συνεχείς στο P εσωτερικό του C , θα είναι ίσες, δηλαδή $f_{x_1x_2} = f_{x_2x_1}$ (Θεώρημα του Schwartz).

Εκτίμηση των μερικών παραγώγων

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

Έστω η συνάρτηση χρησιμότητας $Y = X^\alpha + XZ^\beta$

όπου Y η χρησιμότητα που απολαμβάνει ο καταναλωτής από την κατανάλωση των αγαθών X και Z .

Μερική παραγωγός της Y ως προς τη X : $f_x = \alpha X^{\alpha-1} + Z^\beta$

Μερική παραγωγός της Y ως προς τη Z : $f_z = \beta XZ^{\beta-1}$

Οι δεύτερες μερικές παράγωγοι:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \alpha(\alpha - 1)X^{\alpha-2}$$

$$f_{zz} = \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \beta(\beta - 1)XZ^{\beta-2}$$

$$f_{xz} = \frac{\partial y}{\partial x \partial z} = \beta Z^{\beta-1}$$

$$f_{zx} = \frac{\partial y}{\partial z \partial x} = \beta Z^{\beta-1}$$

Εκτίμηση των μερικών παραγώγων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$Y = f(X, Z) = 5X^4 + 3Z^2 - 7$$

Θεωρώντας τη Z σταθερή, μπορούμε να βρούμε τη μερική παράγωγο της Y ως προς τη X .

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f_x = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot 5X^4 + \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot 3Z^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot 7 = 20X^3 + 0 - 0 = 20X^3$$

Θεωρώντας τη X σταθερή, βρίσκουμε τη μερική παραγωγό της Y ως προς τη Z .

$$\frac{\partial y}{\partial z} = f_z = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot 5X^4 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot 3Z^2 - \left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot 7 = 0 + 6Z + 0 = 6Z$$

Οι δεύτερες μερικές παραγωγοί θα είναι

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 (5X^4 + 3Z^2 - 7)}{\partial x^2} = 60X^2, \quad f_{zz} = \frac{\partial^2 (5X^4 + 3Z^2 - 7)}{\partial z^2} = 6, \quad f_{xz} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial z} = 0$$

Εκτίμηση των μερικών παραγώγων

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(X, Z) = 3XZ^2$$

Οι πρώτες μερικές παραγωγοί είναι:

$$f_X = \frac{\partial f}{\partial X} = \frac{\partial (3XZ^2)}{\partial X} = 3Z^2$$

$$f_Z = \frac{\partial f}{\partial Z} = \frac{\partial (3XZ^2)}{\partial Z} = 6XZ$$

Οι δεύτερες μερικές παραγωγοί είναι:

$$f_{XX} = \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 (3XZ^2)}{\partial X^2} = \frac{\partial (3Z^2)}{\partial X} = 0$$

$$f_{ZZ} = \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2} = \frac{\partial^2 (3XZ^2)}{\partial Z^2} = \frac{\partial (6XZ)}{\partial Z} = 6X$$

$$f_{XZ} = \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Z} = \frac{\partial (6XZ)}{\partial X} = 6Z$$

$$f_{ZX} = \frac{\partial^2 f}{\partial Z \partial X} = \frac{\partial (6XZ)}{\partial Z} = 6Z$$

Εφαρμογή στην οικονομική θεωρία

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

Τα οριακά προϊόντα της εργασίας και τον κεφαλαίου

Έστω η συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas:

$$Q = AL^aK^b$$

a, b σταθεροί όροι

Q : Το προϊόν.

K : Το κεφάλαιο.

L : Η εργασία.

Οριακό Προϊόν Εργασίας:

$$MPL = f_L = AaL^{a-1}K^b$$

Οριακό Προϊόν Κεφαλαίου:

$$MPK = f_K = AbL^aK^{b-1}$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

Τα οριακά προϊόντα της εργασίας και τον κεφαλαίου

Εστω ότι $a = b = 0,5$

Τότε $Q = AL^{0,5}K^{0,5}$

και $MPL = f_L = 0,5 \cdot A \cdot L^{-0,5}K^{0,5}$

και $MPK = f_K = 0,5 \cdot A \cdot L^{0,5}K^{-0,5}$

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

Οριακή χρησιμότητα

Εστω η συνάρτηση χρησιμότητας:

$$U = AX^aY^b$$

X, Y αγαθά

Οι μερικές παράγωγοι f_x και f_y θα δώσουν το μέγεθος της οριακής χρησιμότητας για τα αγαθά X και Y αντίστοιχα.

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

Γενικευμένη συνάρτηση κόστους του Leontief

$$C = (\sum_i \sum_j b_{ij} \sqrt{P_1} \sqrt{P_2}) \cdot h(Y) \quad P_1 \geq 0, P_2 \geq 0, Y \geq 0$$

Για 2 εισροές: $C = (b_{11}P_1 + 2b_{12}\sqrt{P_2}\sqrt{P_1} + b_{22}P_2)h(Y)$

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial C}{\partial P_1} = \frac{X_1}{Y} = b_{11} + b_{12} \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{1/2} \\ X_2 &= \frac{\partial C}{\partial P_2} = \frac{X_2}{Y} = b_{22} + b_{12} \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{1/2} \end{aligned} \right\}$$

σύστημα
συναρτήσεων
ζήτησης
συντελεστών
παραγωγής

C: συνολικό κόστος παραγωγής

P1: τιμή εισροής 1

P2: τιμή εισροής 2

b_{ij} : οι παράμετροι της συνάρτησης
για τους οποίους ισχύει $b_{ij} = b_{ji}$

$h(Y)$: είναι μια θετική μονοτονική
συνάρτηση του προϊόντος Y.

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

Κλειστή οικονομία

Έστω

$$C = C_0 + cY$$

Συνάρτηση κατανάλωσης

$$I = I_0$$

Συνάρτηση επενδύσεων

$$Y = C + I$$

Συνθήκη ισορροπίας του εισοδήματος

$$Y = C_0 + cY + I_0$$

$$\rightarrow Y - cY = C_0 + I_0$$

$$\rightarrow Y(1 - c) = C_0 + I_0$$

$$\rightarrow Y = \left(\frac{C_0}{1 - c}\right) + \left(\frac{I_0}{1 - c}\right)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial C_0} = \frac{1}{1 - c}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial I_0} = \frac{1}{1 - c}$$

Η έκφραση $\frac{1}{1 - c}$ αποτελεί τον πολλαπλασιαστή.

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

...συναλλαγές με εξωτερικό

Έστω

$$C = C_0 + cY$$

Συνάρτηση κατανάλωσης

$$I = I_0$$

Συνάρτηση επενδύσεων

$$G = G_0$$

Δημόσιες δαπάνες

$$X = X_0$$

Εξαγωγές

$$M = M_0 + mY$$

Εισαγωγές (m: οριακή ροπή για εισαγωγές)

$$Y = C + I + G + (X - M)$$

Συνθήκη ισορροπίας του υποδείγματος

$$Y = C_0 + cY + I_0 + G_0 + X_0 - M_0 - mY$$

$$\rightarrow Y - cY + mY = C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - M_0 - mY$$

$$\rightarrow Y(1 - c + m) = I_0 + X_0 + C_0 + G_0 - M_0$$

$$\rightarrow Y = \left(\frac{1}{1 - c + m} \right) [I_0 + X_0 + C_0 + G_0 - M_0]$$

$$\frac{\partial Y}{\partial I_0} = \frac{\partial Y}{\partial X_0} = \frac{1}{1 - c + m}$$

πολλαπλασιαστής ανοιχτής οικονομίας

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

... πολλαπλασιαστής επενδύσεων σε οικονομία με δύο τομείς

Έστω	$S = -\alpha + (1 - \beta)Y$	Συνάρτηση αποτεμείωσης
	$I = I_0 - \delta_r$	Συνάρτηση επενδύσεων
	$M_t = mY$	Ζήτηση χρήματος για συναλλαγές
	$M_{sp} = M_{sp}^0 - qr$	Ζήτηση χρήματος για κερδοσκοπία
	$M_s = M^0$	Προσφορά χρήματος
	$I = S$	Συνθήκη ισορροπίας αγοράς προϊόντος

$$I_0 - \delta r = -\alpha + (1 - \beta)Y \quad \rightarrow \quad r = \frac{\alpha + I_0 - (1 - \beta)Y}{\delta}$$

Ισορροπία στην αγορά χρήματος

$$M_s^0 = M_{sp}^0 - qr + M_t \quad \rightarrow \quad r = \frac{M_{sp}^0 - M_s^0}{q} + \frac{mY}{q}$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

... πολλαπλασιαστής επενδύσεων σε οικονομία με δύο τομείς

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{a + I_0 - (1 - \beta)Y}{\delta} \\ r &= \frac{M^{\circ}sp - M_s^{\circ}}{q} + \frac{mY}{q} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} Y_e &= \frac{[(M^{\circ}sp - M_s^{\circ})\delta - (I_0 + \alpha)q]}{q(\beta - 1) - m\delta} \\ r_e &= \frac{\beta M^{\circ}sp - \beta M_s^{\circ} - M^{\circ}sp + M_s^{\circ} - mI_0 - ma}{q(\beta - 1) - m\delta} \end{aligned}$$

Άρα, ο πολλαπλασιαστής των επενδύσεων:

$$\frac{\partial Y}{\partial I_0} = \frac{-q}{q(\beta - 1) - m\delta}$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

ΤΕΛΟΣ 4^{ΗΣ} ΕΝΟΤΗΤΑΣ