ΠΑΝΤΕΙΟΝ
PANTEION

SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES

# ΠΟΣΟΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

**Γιώργος Λούντζης** (PhD, MSc, MEng)

**Εντεταλμένος Διδάσκων (ΕΣΠΑ)**
**2023-2024**

# ΕΝΟΤΗΤΑ 9

1. ΑΠΛΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΑΣ

2. ΤΡΟΠΟΙ ΛΥΣΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

3. ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

4. ΓΕΝΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

5. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΤΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

6. ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

# ΑΠΛΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΑΣ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 9

$\Delta Yt = Y_t - Y_{t-1}$ → εξίσωση διαφοράς πρώτου βαθμού

$\Delta Y_t = Yt - Y_{t-1} - Yt\text{-}_2$ → εξίσωση διαφοράς δευτέρου βαθμού

Οι εξισώσεις διαφοράς πρώτου βαθμού μπορούν να παρουσιαστούν με την ακόλουθη μορφή

$$\Delta Yt = Y_t - Y_{t-1} = X_t$$

## ΑΠΛΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΑΣ



Έστω, ότι το εθνικό εισόδημα μιας χώρας στην περίοδο t, $Y_t$, προσδιορίζεται από την ακόλουθη γενική σχέση

$$Y_t=10+5Y_{t-1}+73Y_{t-2}-18Y_{t-3}$$

Έστω επίσης ότι στις τρεις τελευταίες περιόδους το εθνικό εισόδημα ήταν

$t-1 \rightarrow$ 2 δισ. ευρώ

$t-2 \rightarrow$ 1 δισ. ευρώ

$t-3 \rightarrow$ 1,5 δισ. ευρώ

$Y_t = 10+(5\cdot 2)+(73\cdot 1)- (18-1,5) = 66$ δισ. ευρώ

το εισόδημα της τρέχουσας περιόδου t

Για την t+1

$$Y_{t+1}=10+5Y_{t-1+1}+73Y_{t-2+1}-18Y_{t-3+1}$$

$$Y_{t+1}=10+5Y_t+73Y_{t-1}-18Y_{t-2}$$

## ΑΠΛΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΑΣ



$$Y_{t+1}=10+5Y_t+73Y_{t-1}-18Y_{t-2}$$

Έχοντας εκτιμήσει το εισόδημα της τρέχουσας περιόδου ίσο με 66 δισ. ευρώ., δηλαδή $Y_t= 66$:

$$Yt+1 = 5(66) + 73(2) - 18(1) + 10 = 468$$

***Με παρόμοιο τρόπο μπορώ να υπολογίσω το εθνικό εισόδημα για την περίοδο t+2 κ.ο.κ.***

# ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞ. ΔΙΑΦΟΡΑΣ



## Επαναληπτική Μέθοδος

Έστω στην περίπτωση μιας κλειστής οικονομίας χωρίς κυβέρνηση γνωρίζουμε ότι

$$Y_t = C_t + I_t$$

όπου
$Y_t$: εθνικό εισόδημα,
$C_t$: κατανάλωση
$I_t$ : επενδύσεις
Όλες οι μεταβλητές αντιστοιχούν στην περίοδο t.

Αν υποθέσουμε ότι η μεταβλητή $I=I^*$ η οποία δεν μεταβάλλεται στο χρόνο και ότι η κατανάλωση $C_t$ είναι συνάρτηση του εισοδήματος της προηγούμενης περιόδου $Y_{t-1}$, τότε η συνάρτηση κατανάλωσης εκφράζεται

$$C_t = a + bY_{t-1}$$

όπου a το αυτόνομο μέρος της κατανάλωσης και b η οριακή ροπή για κατανάλωση (MPC).

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES
SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT



## ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞ. ΔΙΑΦΟΡΑΣ

### Επαναληπτική Μέθοδος

$$\left.\begin{aligned} Y_t &= C_t + I_t \\ C_t &= a + bY_{t-1} \end{aligned}\right\} \quad Y_t = a + bY_{t-1} + I_t^*$$

Πρώτου βαθμού γραμμική εξίσωση διαφοράς

*Αν το $Y_t$ επηρεαζόταν από γεγονότα στις προηγούμενες περιόδους t - 2 ή t - 3, δηλαδή $Y_t = f(Y_{t-2})$ ή $Y_t = f(Y_{t-3})$, τότε θα είχαμε δευτέρου και τρίτου βαθμού εξισώσεις διαφοράς αντίστοιχα*

Αν θέσω a = 50, I = 500 και b = 0,85, τότε

$$Y_t = 50 + 0{,}85Y_{t-1} + 500 \quad \rightarrow \quad Y_t = 550 + 0{,}85Y_{t-1},$$

Για $Y_{t-1} = 2.000$:

$$Y_1 = 550 + 0{,}85Y_{t-1} = 550 + 0{,}85(2.000) = 2.250$$

## ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞ. ΔΙΑΦΟΡΑΣ

### Επαναληπτική Μέθοδος

$Y_1 = 550 + 0{,}85Y_{t-1}$

$Y_1 = 2.250$

Με βάση τα παραπάνω μπορώ να υπολογίσω το μέγεθος του μελλοντικού εισοδήματος μιας σειράς χρονικών περιόδων:

$Y_2 = 550 + 0{,}85Y_{2-1} = 550 + 0{,}85(2.250) = 2.462{,}5$

$Y_3 = 550 + 0{,}85Y_{3-1} = 550 + 0{,}85(2.462{,}5) = 2.643{,}1$

$Y_4 = 550 + 0{,}85\ Y_{4-1} = 550 + 0{,}85(2.643{,}1) = 2.796{,}6$

## ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞ. ΔΙΑΦΟΡΑΣ

### Γενική Μέθοδος

Υποθέτω ότι ψάχνω τη λύση της ακόλουθης εξίσωσης διαφοράς πρώτου βαθμού

$$Y_t = a + bY_{t-1}$$

Αν θέσουμε a = 0, τότε θα έχουμε την **ομογενή εξίσωση** $Y_t = bY_{t-1}$

Έστω η αρχική συνθήκη $Y_0 = C_0 = 3$

Με την επαναληπτική μέθοδο έχω:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{Για } t=1 & Y_1 = bY_{1-1} = bY_0 = 3b \\
\text{Για } t=2 & Y_2 = bY_{2-1} = bY_1 = 3b \cdot b = 3 \cdot b^2 \\
\text{Για } t=3 & Y_3 = bY_2 = 3b^2 \cdot b = 3 \cdot b^3 \\
\text{Για } t=4 & Y_4 = bY_3 = 3b^3 \cdot b = 3 \cdot b^4
\end{array}\right\} \quad Y_t = A(b)^t$$

# ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞ. ΔΙΑΦΟΡΑΣ



## Γενική Μέθοδος

$Y_t = a+bY_{t-1}$ $\qquad$ $Y_t = A(b)^t$

$C_0 = Y_0 = A(b)^{\circ} = A$ $\rightarrow$ $3 = Y_0 = A(b)^{\circ} = A$

και

$Y_t = C_0(b)^t$ $\rightarrow$ $Y_t = 3(b)^t$

Ικανοποιούν τόσο τη διαφορική εξίσωση όσο και την αρχική συνθήκη $Y_0 = C_0 = 3$.

Η ειδική λύση είναι της $Y_t = a+bY_{t-1}$

$$Y_t = \begin{cases} a * \frac{1-b^t}{1-b}, & \text{όταν } b \neq 1 \\ at, & \text{όταν } b = 1 \end{cases}$$

Επομένως, η γενική λύση θα είναι

$$Y_t = \begin{cases} Ab^t + a * \frac{1-b^t}{1-b}, & \text{όταν } b \neq 1 \\ A + at, & \text{όταν } b = 1 \end{cases}$$

# ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞ. ΔΙΑΦΟΡΑΣ



## Γενική Μέθοδος

$$Y_t = \begin{cases} Ab^t + a * \frac{1-b^t}{1-b}, & \text{όταν } b \neq 1 \\ A + at, \text{όταν } b = 1 \end{cases}$$

Απόδειξη:

Η αρχική τιμή δίνεται από $Y_0 = C_0$, τότε από την $Y_t = a + bY_{t-1}$ έχω: $Y_1 = bY_0 + a$

→ $Y_2 = bY_1 + a = b(bY_0+a)+a = b^2Y_0+ba+a$

→ $Y_3 = bY_2+a = b^3Y_0+b^2a+ba+a$

Για t = n θα έχουμε, επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία,

$Y_t = b^t Y_0 + (b^{t-1}+b^{t-2}+\ldots\ldots.b+1)a$ → $Y_t = b^t Y_0 + a\sum_{i=0}^{t-1} b^i$

→ $Y_t = b^t Y_0 + a\sum_{i=0}^{t-1} b^i$ → $Y_t = b^t Y_0 + a * \frac{1-b^t}{1-b}$ $(b \neq 1)$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνεται η εξίσωση διαφοράς $Y_t = -7Y_{t-1} + 16$.

Γνωρίζουμε επίσης ότι $Y_0 = 5$. Αφού $b = -7 \neq 1$ με τη χρησιμοποίηση της $Y_t = \begin{cases} Ab^t + a * \frac{1-b^t}{1-b}, & \text{όταν } b \neq 1 \text{ έχουμε} \\ A + at, \text{όταν} b = 1 \end{cases}$

$$Y_t = A(-7)^t + 16 * \frac{1-(-7)^t}{1-(-7)}$$

Αφού η αρχική τιμή είναι $Y_0 = 5$ μπορούμε να ορίσουμε την Α.

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση την τιμή αυτή, παίρνουμε: $Y_0 = 5 = A(-7)^0 + 16 * \frac{1-(-7)^0}{1-(-7)} = A$

Επομένως, η γενική λύση γίνεται:

$$Y_t = 5(-7)^t + 16*\frac{1-(-7)^t}{1-(-7)} = 5(-7)^t + 16*\frac{1-(-7)^t}{8} = 5(-7)^t + 16*\frac{1}{8} - 16\frac{(-7)^t}{8} = 5(-7)^t + 2 - 2(-7)^t = (-7)^t * (5-2) + 2 = (-7)^t 3 + 2$$

→ $Y_t = (-7)^t 3+2$ που είναι η λύση της εξίσωσης διαφοράς $Y_t = -7Y_{t-1} + 16$ όταν αυτή **ικανοποιεί** τόσο την αρχική συνθήκη όσο και την ίδια την εξίσωση διαφοράς

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$Y_t = -7Y_{t-1} + 16 \text{ (αρχική εξίσωση)}$$

Πρώτη συνθήκη, αυτή πράγματι ικανοποιείται, ενώ για τη δεύτερη θα έχουμε για t = 0 και t = 1.

$$Y_0 = 3(-7)^{\circ}+2 = 5$$
$$Y_1 = 3(-7)^1 + 2 = -19$$

Αντικαθιστώντας $Y_1 = -19$ και $Y_0 = 5$ στην αρχική εξίσωση, έχουμε

$$-19 = 16\text{-}7(5) = 16\text{-}35$$

Έτσι, η $Y_t = -7Y_{t-1} + 16$ αποτελεί τη γενική λύση της $Y = -7\ Y_{t-1}, + 16$

## ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

# ΕΝΟΤΗΤΑ 9

Έστω η γενική λύση της εξίσωσης διαφοράς:

$$Y_t = bY_{t-1} + a, \text{ όταν } b \neq 1 \text{ και } Y_0 = A.$$

$$Y_t = Ab^t + a * \frac{1-b^t}{1-b}$$

$$\rightarrow Y_t = Y_0 b^t + a * \frac{1-b^t}{1-b} = Y_0 b^t - \frac{ab^t}{1-b} + \frac{\alpha}{1-b}$$

$\rightarrow$ $Y_t = (Y_o - \frac{\alpha}{1-b})b^t + \frac{\alpha}{1-b}$ ή σε σε γενική μορφή $Y_t = Mb^t + C$ όπου $M = (Y_o - \frac{\alpha}{1-b})b^t$ και $C = \frac{\alpha}{1-b}$

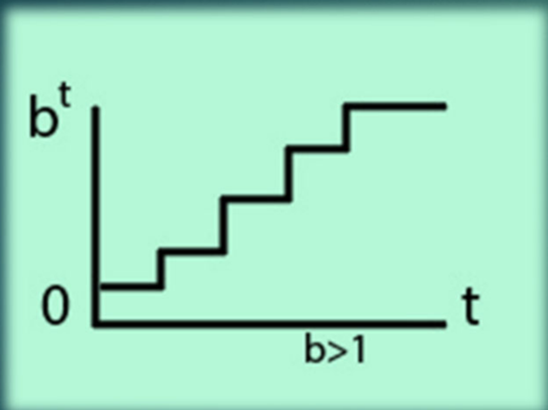
***Η εξίσωση αυτή θα είναι δυναμικά σταθερή μόνο αν η συμπληρωματική συνάρτηση $Mb^t \rightarrow 0$, καθώς $t \rightarrow \infty$. Είναι φανερό ότι όλα θα εξαρτώνται από τη βάση b. Υποθέτοντας M = 1 και C = 0, η εκθετική έκφραση $b^t$ θα δημιουργήσει επτά διαφορετικές γραμμές επέκτασης ανάλογα με την τιμή του b.***

## ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

# ΕΝΟΤΗΤΑ 9

$Y_t = Mb^t + C$ Ο συντελεστής b μπορεί να πάρει τιμές από το $+\infty$ έως το $-\infty$.

1. Αν $b > 1$, το $b^t$ μεταβάλλεται θετικά με αυξητικό ρυθμό, καθώς αυξάνεται το t.




π.χ. $(2)^t$

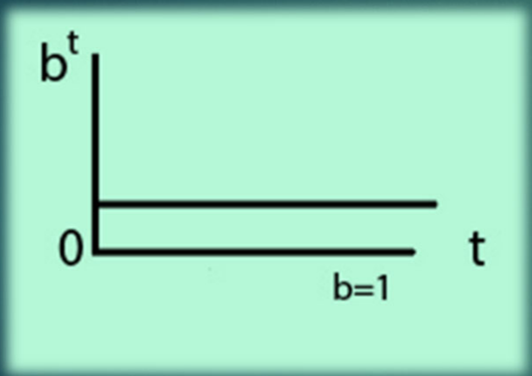
| Τιμή b | t=0 | t=1 | t=2 | t=3 | t=4 |
|---|---|---|---|---|---|
| b>1 | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 |

## ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ



$Y_t = Mb^t + C$ Ο συντελεστής b μπορεί να πάρει τιμές από το $+\infty$ έως το $-\infty$.

2. Αν $b = 1$, τότε $b^t = 1$ για όλες τις τιμές του t




$(1)^t$

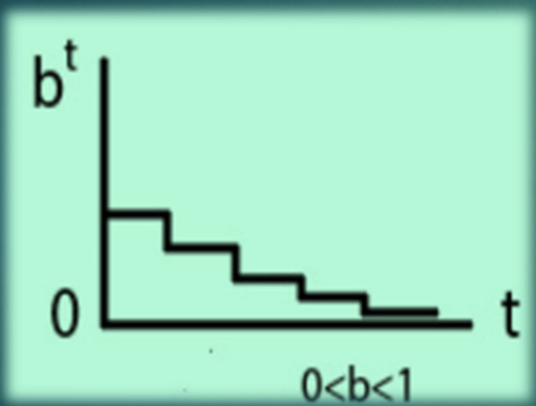
| Τιμή b | t=0 | t=1 | t=2 | t=3 | t=4 |
|---|---|---|---|---|---|
| b=1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

## ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

# ΕΝΟΤΗΤΑ 9

$Y_t = Mb^t + C$ Ο συντελεστής b μπορεί να πάρει τιμές από το +∞ έως το -∞.

3. Αν $0 < b < 1$, τότε το b είναι θετικό και το $b^t$ μειώνεται καθώς το t αυξάνεται συγκλίνοντας προς την αρχή των οριζόντιων αξόνων. Ωστόσο, το μέγεθος του $b^t$ παραμένει πάντα θετικό




π.χ. $(\frac{1}{2})^t$

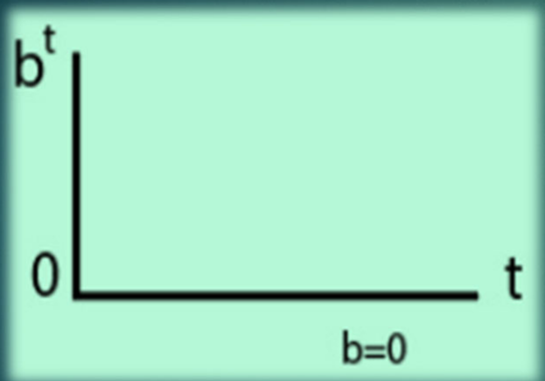
| Τιμή b | t=0 | t=1 | t=2 | t=3 | t=4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0<b<1 | 1 | 1/2 | 1/4 | 1/8 | 1/16 |

# ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ



$Y_t = Mb^t + C$ Ο συντελεστής b μπορεί να πάρει τιμές από το +∞ έως το -∞.

4. Αν b = 0, τότε $b^t = 0$ για όλες τις τιμές του t




$(0)^t$

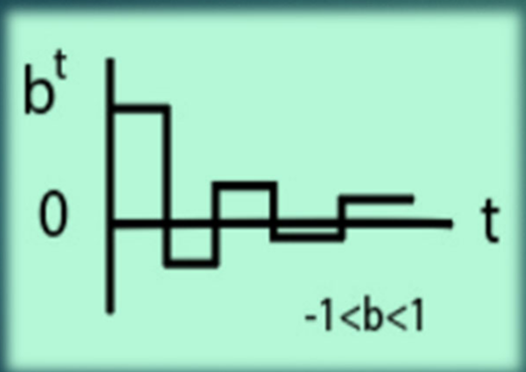
| Τιμή b | t=0 | t=1 | t=2 | t=3 | t=4 |
|---|---|---|---|---|---|
| b=0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

## ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ



$Y_t = Mb^t + C$ Ο συντελεστής b μπορεί να πάρει τιμές από το +∞ έως το -∞.

5. Αν -1 < b < 0, τότε $b^t$ είναι ένας αρνητικός δεκαδικός αριθμός, οπότε θα εναλλάσσει πρόσημα και θα συγκλίνει προς τον οριζόντιο άξονα, καθώς το t αυξάνεται




π.χ. $(-\frac{1}{2})^t$

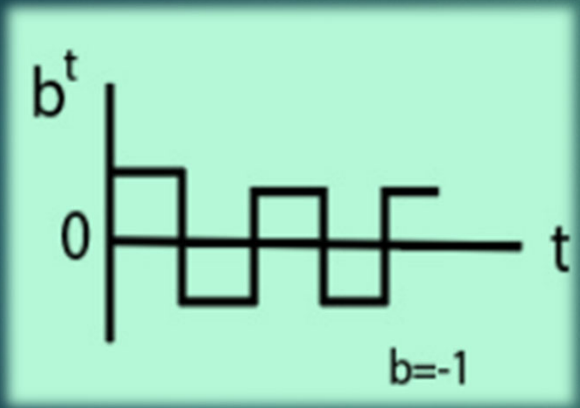
| Τιμή b | t=0 | t=1 | t=2 | t=3 | t=4 |
|---|---|---|---|---|---|
| -1<b<0 | 1 | -1/2 | 1/4 | -1/8 | 1/16 |

## ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ



$Y_t = Mb^t + C$ Ο συντελεστής b μπορεί να πάρει τιμές από το +∞ έως το -∞.

6. Αν b = -1, τότε το $b^t$ ταλαντώνεται μεταξύ του +1 και του -1




$(-1)^t$

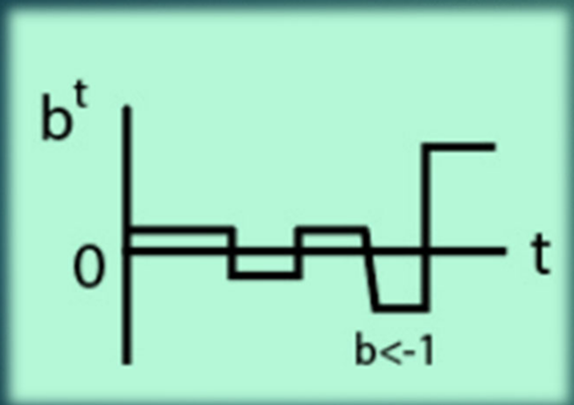
| Τιμή b | t=0 | t=1 | t=2 | t=3 | t=4 |
|---|---|---|---|---|---|
| b=-1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 |

## ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ



$Y_t = Mb^t + C$ Ο συντελεστής b μπορεί να πάρει τιμές από το +∞ έως το -∞.

7. Αν $b < -1$, τότε το $b^t$ ταλαντώνεται και απομακρύνεται από τον οριζόντιο άξονα




$(-2)^t$

| Τιμή b | t=0 | t=1 | t=2 | t=3 | t=4 |
|---|---|---|---|---|---|
| b<-1 | 1 | -2 | 4 | -8 | 16 |

## ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ



$Y_t = Mb^t + C$ Ο συντελεστής b μπορεί να πάρει τιμές από το $+\infty$ έως το $-\infty$.

Συνοπτικά,

- Αν $|b| > 1$, η γραμμή επέκτασης αποκλίνει από το επίπεδο ισορροπίας της Y.
- $|b| < 1$, η γραμμή επέκτασης συγκλίνει προς το επίπεδο ισορροπίας της Y.
- $b > 0$, η γραμμή επέκτασης δεν ταλαντώνεται
  $b < 0$, η γραμμή επέκτασης ταλαντώνεται

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



Να λυθεί η ακόλουθη εξίσωση διαφοράς:

$5Y_t+2Y_{t-1} -140 = 0$ για $Y_0 = 30$

Ζητείται

α) η απάντηση χρησιμοποιώντας $t = 0$ και $t = 1$, και

β) Να σχολιαστεί η φύση της γραμμής επέκτασης

## ΛΥΣΗ

Αρχικά αλλάζουμε την εξίσωση διαφοράς, ώστε να πάρει τη μορφή:

$5Y_t+2Y_{t-1}-140=0 \rightarrow 5Y_t=-2Y_{t-1}+140 \rightarrow Y_t= -\frac{2}{5} Y_{t-1}+28$

Η γενική λύση θα βρίσκεται με βάση τη σχέση $Y_t= \begin{cases} Ab^t + a * \frac{1-b^t}{1-b}, & \text{όταν } b \neq 1 \\ A + at, \text{όταν} b = 1 \end{cases}$

Αφού $b = -2/5 \neq 1$, έχω: $Y_t= Ab^t + a * \frac{1-b^t}{1-b} \rightarrow Y_t= A(-\frac{2}{5})^t + 28 * \frac{1-(-\frac{2}{5})^t}{1-(-\frac{2}{5})}$

ΛΥΣΗ

Εφόσον η αρχική τιμή της $Y_t$ είναι $Y_0 = 30$, θα μπορούμε να ορίσουμε το Α.

Έτσι, για t = 0, παίρνουμε:

$$Y_0 = 30 = A\left(-\frac{2}{5}\right)^0 + 28 * \frac{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^0}{1-\left(-\frac{2}{5}\right)}$$

$Y_o = 30 = A * 1 + 0 \rightarrow Y_0 = 30 = A \rightarrow A = 30$

Οπότε,

$$Y_t = 30\left(-\frac{2}{5}\right)^t + 28 * \frac{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^t}{1-\left(-\frac{2}{5}\right)} \rightarrow Y_t = 30\left(-\frac{2}{5}\right)^t + 28 * \frac{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^t}{7/5} \rightarrow Y_t = 10\left(-\frac{2}{5}\right)^t + 20 \quad \text{(γενική λύση)}$$

Συνεπώς, για t=1 $\quad Y_t = 10\left(-\frac{2}{5}\right)^1 + 20 = 16$

για t=2 $\quad Y_t = 10\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + 20 = 21{,}6$

ΛΥΣΗ



Πράγματι, από τη γενική λύση $Y_t = 10(-\frac{2}{5})^t + 20$ οδηγούμαστε στην αρχική εξίσωση διαφοράς $Y_t = -\frac{2}{5}\ Y_{t-1} + 28$ .

$$Y_1 = -\frac{2}{5}\ Y_0 + 28 = 16$$

$$Y_2 = -\frac{2}{5}\ Y_1 + 28 = 21{,}6$$

Αφού το $b = -\frac{2}{5} = -0{,}4$, $b < 0$ και $|b| < 1$, η μεταβλητή Y, θα ταλαντώνεται διαχρονικά και θα συγκλίνει στο επίπεδο ισορροπίας, όπως αυτό εκφράζεται από την ειδική λύση.

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

# ΕΝΟΤΗΤΑ 9

## ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΙΣΤΟΥ ΤΗΣ ΑΡΑΧΝΗΣ (THE COBWEB MODEL)

Έστω ότι η προσφερόμενη ποσότητα, $Q^s$ και η ζητούμενη ποσότητα $Q^D$, εξισώνονται κάτω από συνθήκες τέλειου ανταγωνισμού:

$$Q^D = f(P)$$
$$Q^s = f(P)$$
$$Q^S = Q^D$$

Μια μεταβολή της τιμής κατά τη διάρκεια της παραγωγής και της συγκομιδής έχει ελάχιστη επίδραση στην προσφερόμενη ποσότητα $Q^s$ στην παρούσα περίοδο t. Έτσι, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι μία μεταβολή στην τιμή P, η οποία μπορεί να επιτευχθεί για ένα προϊόν, έχει μια καθυστερημένη επίδραση. Με άλλα λόγια, η ποσότητα $Q^s$ στην περίοδο t μπορεί να εξαρτάται από την τιμή P που επικράτησε στην αγορά την προηγούμενη περίοδο t - 1. Για το λόγο αυτό μπορούμε να εκφράσουμε τη συνάρτηση της προσφοράς ως $Q^s = f(P_{t-1})$, οπότε το σύστημα

$$Q^d = \alpha - \beta P_t \; (\alpha, \beta > 0) \qquad Q^s = -\gamma + \delta P_{t-1} \quad (\gamma, \delta > 0) \qquad Q^s = Q^d$$

# ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



## ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΙΣΤΟΥ ΤΗΣ ΑΡΑΧΝΗΣ (THE COBWEB MODEL)

Από τις εξισώσεις

$$\left.\begin{array}{l} Q^d = \alpha - \beta P_t \\ Q^s = -\gamma + \delta P_{t-1} \\ Q^s = Q^d \end{array}\right\} \quad \beta P_t + \delta P_{t-1} = \alpha + \gamma \rightarrow \quad P_t = \frac{\alpha+\gamma}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} * P_{t-1}$$

Αφού $\beta > 0$ και $\delta > 0$, → λόγος $-\frac{\delta}{\beta} \neq 1$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο της γενικής λύσης $Y_t = \begin{cases} Ab^t + a * \frac{1-b^t}{1-b}, & \text{όταν } b \neq 1 \\ A + at, & \text{όταν } b = 1 \end{cases}$

$$P_t = \left(P_0 - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

όπου $P_0$ εκφράζει την αρχική τιμή.

Από τον παραπάνω τύπο μπορούμε να παρατηρήσουμε τρία σημεία όσον αφορά τη γραμμή επέκτασης στο χρόνο.

## ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



### ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΙΣΤΟΥ ΤΗΣ ΑΡΑΧΝΗΣ (THE COBWEB MODEL)

$$P_t = \left(P_0 - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

α) Όταν το οικονομικό πρότυπο βρίσκεται σε ισορροπία: $P_t = P_{t-1} = P^e$ όπου P είναι η τιμή ισορροπίας.

Από τα παραπάνω → $\beta P^{\varepsilon} + \delta P^{\varepsilon} = \alpha + \gamma$ → $(\beta+\delta)P^e = \alpha+\gamma$ → $P^e = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$

Ο όρος $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$ μπορεί να θεωρηθεί ευσταθής ισορροπία.

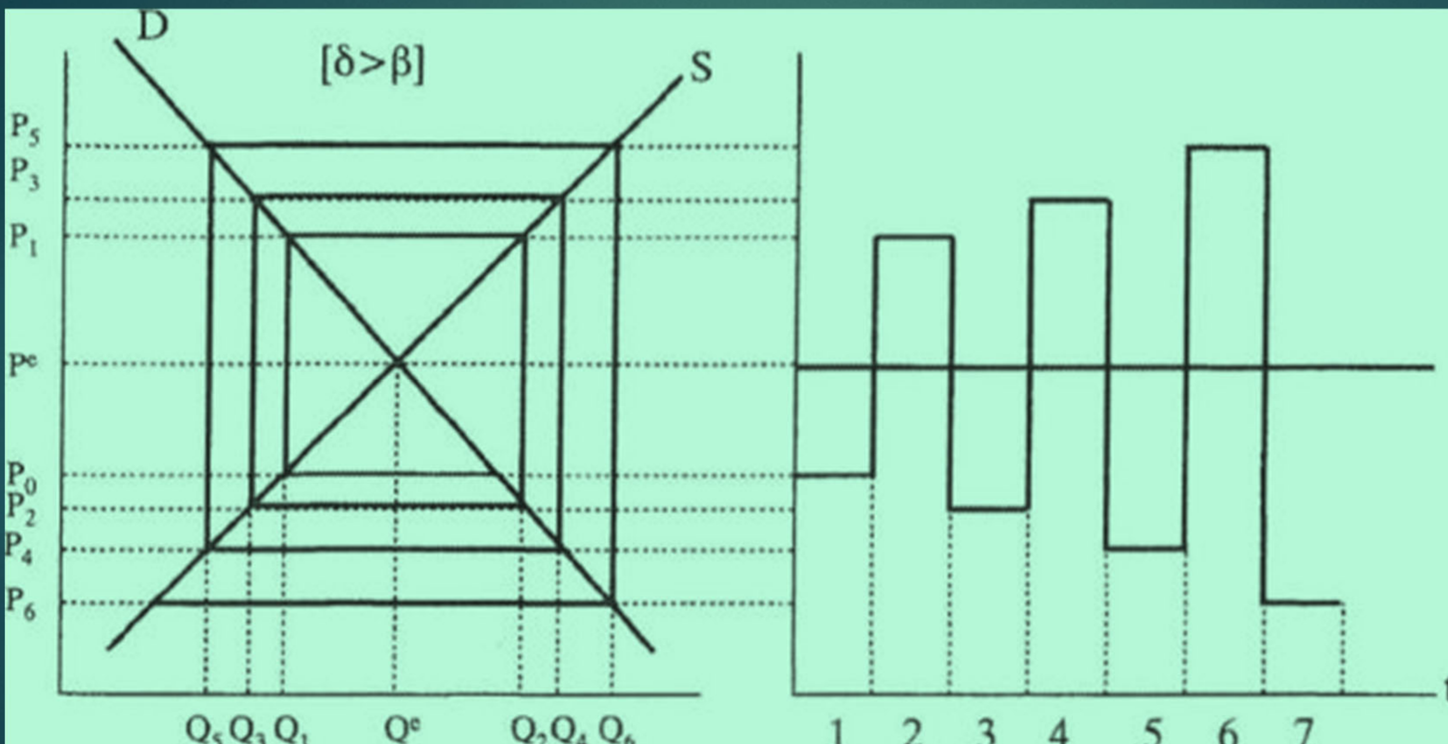
β) Αντικαθιστώντας την $P^e$ στον τύπο της γραμμής επέκτασης στο χρόνο μπορούμε να εκφράσουμε τη γραμμή επέκτασης στο χρόνο ως

$$P_t = (P_0 - P^{\varepsilon}) \cdot \left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + P^{\varepsilon}$$

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΙΣΤΟΥ ΤΗΣ ΑΡΑΧΝΗΣ (THE COBWEB MODEL)

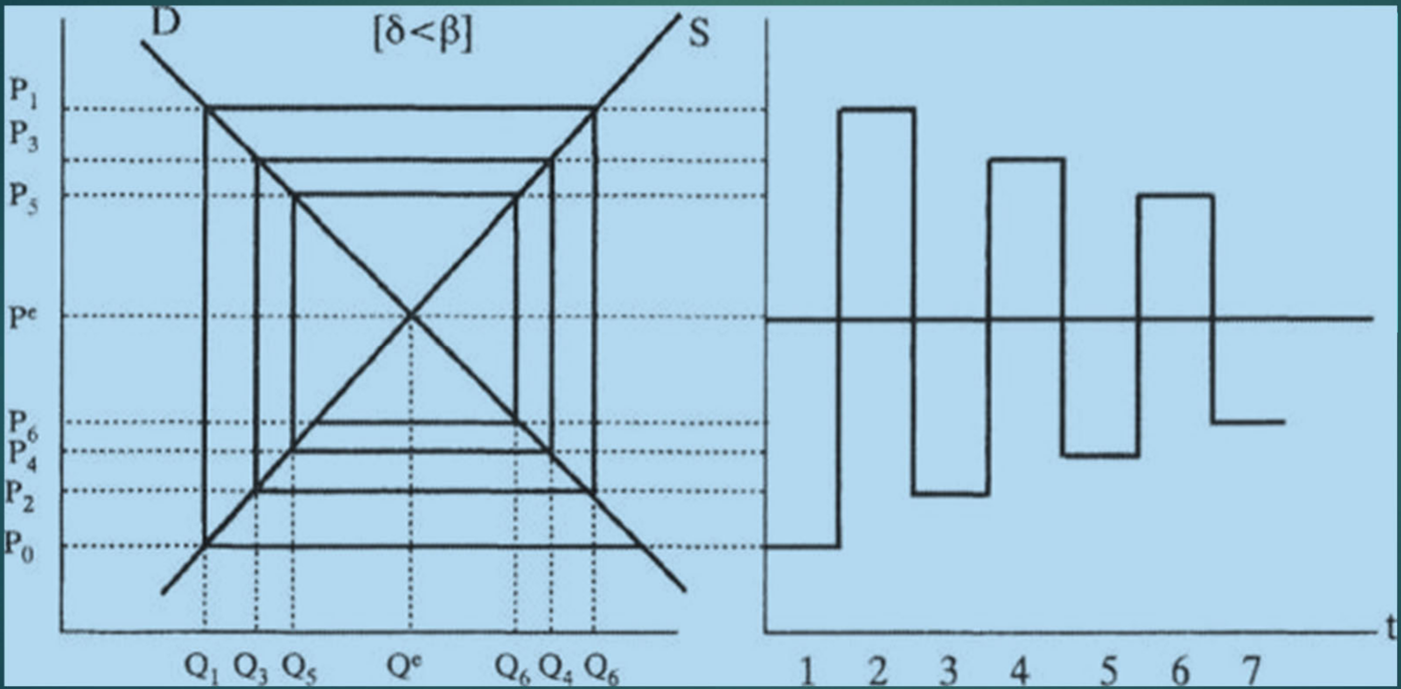



$Q^d = \alpha - \beta P_t$
$Q^s = -\gamma + \delta P_{t-1}$
$Q^s = Q^d$

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES
SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT



## ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΙΣΤΟΥ ΤΗΣ ΑΡΑΧΝΗΣ (THE COBWEB MODEL)

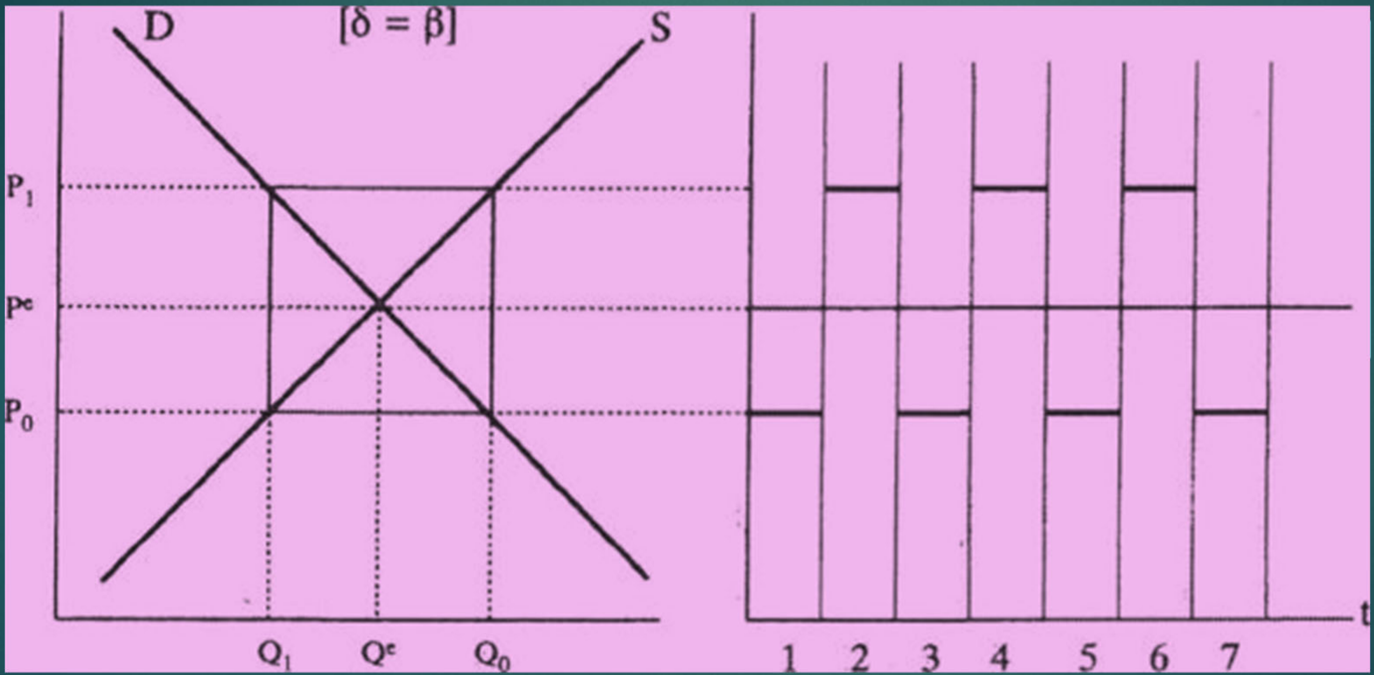



$$Q^d = \alpha - \beta P_t$$
$$Q^s = -\gamma + \delta P_{t-1}$$
$$Q^s = Q^d$$

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

# ΕΝΟΤΗΤΑ 9

## ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΙΣΤΟΥ ΤΗΣ ΑΡΑΧΝΗΣ (THE COBWEB MODEL)




$$Q^d = \alpha - \beta P_t$$
$$Q^s = -\gamma + \delta P_{t-1}$$
$$Q^s = Q^d$$

## Αλληλεπίδραση πολλαπλασιαστή και επιταχυντή

Η αρχή του επιταχυντή είναι μια θεωρία προσδιορισμού των επενδύσεων, σύμφωνα με την οποία το ύψος των επενδύσεων είναι συνάρτηση των μεταβολών του εισοδήματος. Στην απλούστερή της μορφή είναι:

$$I_t = c(Y_t - Y_{t-1})$$

($I_t$) η επένδυση μιας περιόδου

(Y) εισόδημα

C ο λόγος κεφαλαίου-προϊόντος, δηλαδή $\frac{K}{Q}$ και προσδιορίζει το μέγεθος της επένδυσης για δεδομένη μεταβολή του εισοδήματο

## Αλληλεπίδραση πολλαπλασιαστή και επιταχυντή

Στη θεωρία του πολλαπλασιαστή μια αύξηση της επένδυσης έχει σαν αποτέλεσμα πολλαπλάσια αύξηση του εισοδήματος. Σε αλγεβρική μορφή ο πολλαπλασιαστής, στην απλούστερή του μορφή, δίδεται από τη σχέση

$$\Delta Y = \frac{1}{1-\beta}\,\Delta I \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta Y}{\Delta I} = \frac{1}{1-\beta}\ ,\ 0<\beta<1$$

όπου

ΔΥ, η μεταβολή του εισοδήματος

ΔΙ, η μεταβολή των επενδύσεων μεταξύ δύο διαδοχικών περιόδων αντιστοίχως και

β η οριακή ροπή για κατανάλωση.

## Αλληλεπίδραση πολλαπλασιαστή και επιταχυντή

Έστω το οικονομικό υπόδειγμα:

$$\left.\begin{aligned} C_t &= \alpha+\beta Y_t \\ I_t &= c(Y_t - Y_{t-1}) \\ Y_t &= C_t + I_t \end{aligned}\right\}$$

$\rightarrow Y_t = \alpha+\beta Y_t + c(Y_t - Y_{t-1})$

$\rightarrow Y_t = -\frac{\alpha}{c-(1-\beta)} + \frac{c}{c-(1-\beta)} Y_{t-1}$

Πρώτου βαθμού εξίσωση διαφοράς και δείχνει ότι το επίπεδο του εισοδήματος μιας περιόδου είναι συνάρτηση του εισοδήματος της προηγούμενης περιόδου.

# ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

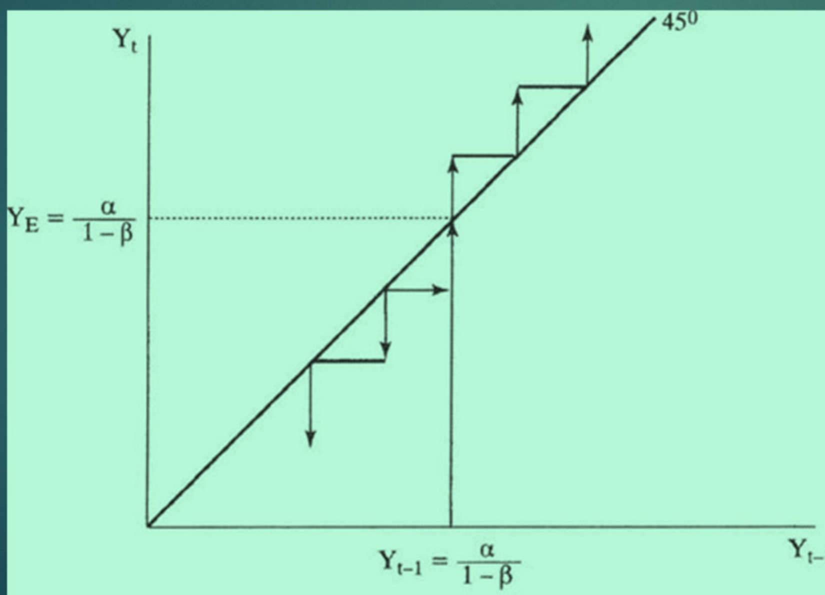
# ΕΝΟΤΗΤΑ 9

## Αλληλεπίδραση πολλαπλασιαστή και επιταχυντή

$$Y_t = -\frac{\alpha}{c-(1-\beta)} + \frac{c}{c-(1-\beta)} Y_{t-1}$$

$$Y_t = [Y_0 - (-\frac{\alpha}{c-(1-\beta)} / 1 - \frac{c}{c-(1-\beta)}] * (\frac{c}{c-(1-\beta)})^t + -\frac{\alpha}{c-(1-\beta)} / 1 - \frac{c}{c-(1-\beta)} \rightarrow \mathbf{Y_t = (Y_0 - \frac{\alpha}{1-\beta}) * (\frac{c}{c-(1-\beta)})^t + \frac{\alpha}{1-\beta}}$$

Ο λόγος $\frac{\alpha}{1-\beta}$ μπορεί να θεωρηθεί ως η διαχρονική τιμή ισορροπίας του εισοδήματος δηλαδή $Y_E = \frac{\alpha}{1-\beta}$




$$Y_t = (Y_0 - Y_E) * (\frac{c}{c-(1-\beta)}) + Y_E$$

## ΑΣΚΗΣΗ

Να σχολιαστεί η γραμμή επέκτασης των ακόλουθων συναρτήσεων:

$Y_t = 3^t + 1$

$Y_t = -3\left(\frac{1}{4}\right)^t + 2$

$Y_t = 2\left(-\frac{4}{5}\right)^t + 9$

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES
SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT



## ΛΥΣΗ

Οι συναρτήσεις είναι της μορφής: $Y_t = Mb^t + c$

Η μορφή της γραμμής επέκτασης εξαρτάται από την τιμή του b. Συγκεκριμένα:

Για την $Y_t = 3^t + 1$, $b = 3 > 1$, άρα η γραμμή επέκτασης αποκλίνει από το επίπεδο ισορροπίας και μεταβάλλεται θετικά με αυξητικό ρυθμό.

Για την $Y_t = -3(\frac{1}{4})^t + 2$, $0 < b < 1$, άρα η γραμμή επέκτασης θα μειώνεται καθώς συγκλίνει προς το επίπεδο ισορροπίας.

Για την $Y_t = 2(-\frac{4}{5})^t + 9$, $-1 < b < 0$, άρα η γραμμή επέκτασης θα ταλαντώνεται εναλλάσσοντας πρόσημα καθώς συγκλίνει προς το επίπεδο ισορροπίας.

## ΑΣΚΗΣΗ

Να βρεθεί η λύση των ακόλουθων εξισώσεων διαφοράς και να σχολιαστεί η γραμμή επέκτασης.

$Y_t = \frac{1}{3} Y_{t-1} + 6$ (Yo=1)

$Y_t = -2 Y_{t-1} + 1$ (Yo=1)

$Y_t = Y_{t-1} + 3$ $(Y_0 = 2)$

**ΛΥΣΗ**



Η λύση της εξίσωσης διαφοράς της μορφής: $Y_t = \alpha + b\, Y_{t-1}$, α, b σταθερές και $Y_0 = A$

Είναι η:

$$Y_t = \begin{cases} Ab^t a * \frac{1-b^t}{1-b}, & \text{όταν } b \neq 1 \\ A + at, \text{όταν} b = 1 \end{cases}$$

Η εξίσωση $Y_t = \frac{1}{3} Y_{t-1} + 6$ , Yo=1 έχει: $a = 6$, $b = \frac{1}{3} \neq 1$, $A=1$

Άρα η γενική λύση είναι: $Y_t = Ab^t + a * \frac{1-b^t}{1-b} = (\frac{1}{3})^t + 6 * \frac{\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^t\right]}{1-\frac{1}{3}} = (\frac{1}{3})^t + 9(1-(\frac{1}{3})^t)$ $\rightarrow Y_t = -8(\frac{1}{3})^t + 9$

Αφού $0 < b < 1$ η γραμμή επέκτασης θα συγκλίνει προς το επίπεδο ισορροπίας.

Η εξίσωση $Y_t = -2Y_{t-1}, +1$, $Y_0 = 1$ έχει: $a = 1$, $b = -2$, $A = 1$

Άρα γενική λύση είναι: $Y_t = Ab^t + a * \frac{1-b^t}{1-b} = (-2)^t + \frac{[1-(-2)^t]}{1+2} = (-2)^t + \frac{1}{3}(1-(-2)^t)$ $\rightarrow Y_t = \frac{2}{3}(-2)^t + \frac{1}{3}$

## ΛΥΣΗ

Αφού $b < -1$ η γραμμή επέκτασης ταλαντώνεται και απομακρύνεται το επίπεδο ισορροπίας.

Η εξίσωση $Y_t = Y_{t-1}, +3$, $Y_0 = 2$ έχει: $a = 3$, $b = 1$, $A = 2$

Άρα γενική λύση είναι: $Y_t = 2 + 3t$

Άρα, αφού $b = 1$, η γραμμή επέκτασης έχει γραμμική συμπεριφορά θετικής κλίσης με διαρκή απομάκρυνση από την αρχική τιμή $Y_0 = 2$.

# ΕΝΟΤΗΤΑ 9

## ΑΣΚΗΣΗ

Θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις αποταμίευσης και επένδυσης δίνονται από τις ακόλουθες εξισώσεις

$$S_t = sY_t$$

$$I_t = g(Y_t - Y_{t-1})$$

$$S_t = I_t$$

όπου S και I η αποταμίευση και η επένδυση αντιστοίχως, s και g η οριακή ροπή για αποταμίευση και η οριακή ροπή για επένδυση και, τέλος, $Y_t$, το εισόδημα. Επίσης, γνωρίζουμε ότι $g = \frac{2}{3}$ και $s = \frac{1}{2}$ ενώ η αρχική συνθήκη είναι $Y_0 = 3$.

Ζητείται να βρεθεί η τιμή του εισοδήματος ισορροπίας Y, για οποιαδήποτε χρονική περίοδο και να ελεγχθεί εάν το εισόδημα συγκλίνει διαχρονικά στο σημείο ισορροπίας.

ΛΥΣΗ



Αντικαθιστώντας στη σχέση: $S_t = I_t$, παίρνουμε: $S_t = I_t \rightarrow sY_t = g(Y_t - Y_{t-1})$

$$\rightarrow \quad (s-g)Y_t = -gY_{t-1} \quad \rightarrow \quad Y_t = \frac{g}{g-s} Y_{t-1}$$

Για $g = \frac{2}{3}$ και $s = \frac{1}{2}$, η προς επίλυση εξίσωση διαφορών γίνεται:

$$Y_t = \frac{2/3}{\left(\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)} Y_{t-1} \quad \rightarrow \quad Y_t = 4Y_{t-1}, \quad Yo = 3$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι της γενικής μορφής $Y_t = bY_{t-1} + \alpha$,

όπου $\alpha = 0$, $b = 4 \neq 1$ και $A = 3$.

Άρα η γενική λύση είναι: $Y_t = Ab^t + a * \frac{1-b^t}{1-b} = 3*4^t$

Αφού $b = 4 > 1$, η γραμμή επέκτασης αποκλίνει διαχρονικά από το επίπεδο ισορροπίας $c = 0$.

## ΑΣΚΗΣΗ

Δίνονται οι ακόλουθες συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης για το υπόδειγμα του ιστού της αράχνης:

a) $Q_t^d=18-3P_t$, $Q_t^s=-3+P_{t-1}$, $P_0=50$

β) $Q_t^d=22-3P_t$, $Q_t^s=-2+P_{t-1}$, $P_0=60$

γ) $Q_t^d=19-6P_t$, $Q_t^s=-5+6P_{t-1}$, $P_0=100$

Να βρεθεί η τιμή του εισοδήματος για κάθε υπόδειγμα και να εξεταστεί εάν η ισορροπία είναι ευσταθής.

ΛΥΣΗ



Έστω $Q_t^d = α – βP_t$, συνάρτηση ζήτησης με α, β > 0 και $Q_t^s = -γ + δP_{t-1}$ η συνάρτηση προσφοράς.

Το οικονομικό πρότυπο βρίσκεται σε ισορροπία όταν: $P_t = P_{t-1} = P^e$

Η τιμή ισορροπίας είναι: $P^e = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$

Η γραμμή επέκτασης στο χρόνο είναι η: $P_t=(P_0-P_e)(-\frac{\delta}{\beta})^t+P^e$

α) Για $Q_t^d = 18 - 3P_t$ , $Q_t^s = -3 + 4P_{t-1}$ και Po = 50, ισχύει: α=18, β = 3, γ = 3, δ = 4

Η τιμή ισορροπίας είναι: $P^e = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} = \frac{18+3}{3+4} = \frac{21}{7} = 3$

Η γραμμή επέκτασης εκφράζεται από την: $P_t=(P_0-P_e)(-\frac{\delta}{\beta})^t+P^e$ → $P_t=47(-\frac{4}{3})^t+3$

Αφού $\frac{\delta}{\beta} = \frac{4}{3} > 1$, το σύστημα είναι ασταθές ή αποκλίνον.

ΛΥΣΗ



β) Για $Q_t^d = 22 - 3P_t$, $Q_t^s = -2 + P_{t-1}$ και Po = 60, ισχύει: $\alpha=22$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$, $\delta = 1$

Η τιμή ισορροπίας είναι: $P^e = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} = \frac{22+2}{3+1} = \frac{24}{4} = 6$

Η γραμμή επέκτασης εκφράζεται από την: $P_t = (P_0 - P_e)(-\frac{\delta}{\beta})^t + P^e \rightarrow P_t = 54(-\frac{1}{3})^t + 6$

Αφού $\frac{\delta}{\beta} = \frac{1}{3} < 1$, το σύστημα είναι συγκλίνον.

γ) Για $Q_t^d = 19 - 6P_t$, $Q_t^s = -5 + 6P_{t-1}$ και Po = 100, ισχύει: $\alpha=19$, $\beta = 6$, $\gamma = 5$, $\delta = 6$

Η τιμή ισορροπίας είναι: $P^e = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} = \frac{19+5}{6+6} = \frac{24}{12} = 2$

Η γραμμή επέκτασης εκφράζεται από την: $P_t = (P_0 - P_e)(-\frac{\delta}{\beta})^t + P^e \rightarrow P_t = 98(-1)^t + 2$

Αφού $\frac{\delta}{\beta} = 1$, η απόκλιση της ταλάντωσης ως προς την τιμή ισορροπίας είναι σταθερή, άρα το σύστημα δεν αποκλίνει ούτε συγκλίνει.

# ΤΕΛΟΣ 9ΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ