ΠΑΝΤΕΙΟΝ
PANTEION

SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES

ΠΟΣΟΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Γιώργος Λούντζης (PhD, MSc, MEng)

Εντεταλμένος Διδάσκων (ΕΣΠΑ)
2023-2024

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES
SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

ΕΝΟΤΗΤΑ 8

1. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

2. ΑΟΡΙΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

3. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

4. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

5. ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 8

Έστω η F(x), η οποία είναι συνεχής σε κάθε σημείο x του κλειστού διαστήματος [a, b].

Οπότε η παράγωγος είναι: d/dx[F(x)] = DF(x) = f(x)

Όπου F(x) θα ονομάζεται αρχική συνάρτηση της f(x)… τότε και η F(x)+c (όπου c σταθερά) είναι αρχική συνάρτηση!

Δηλαδή, $\frac{d}{dx}$ [F(x)+c] = D * [F(x)+c] = DF(x)+Dc = f(x)+0 = f(x)

Αντιστρόφως, αν η $F_1(x)$ είναι μια άλλη αρχική συνάρτηση της f(x) στο διάστημα [a, b] θα προκύπτει:

$$F_1(x) = F(x)+c$$

Πράγματι, επειδή $F_1(x)$ και F(x) είναι και οι δύο αρχικές συναρτήσεις στο διάστημα [a, b], θα έχουμε $DF_1(x)$ = f(x) και DF(x) = f(x).

Άρα θα ισχύει και η σχέση $DF_1(x)$ = DF(x) για κάθε σημείο του διαστήματος [a, b]

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω η $f(x) = x^4$ $\rightarrow$ $f'(x) = 4x^3$

Συνεπώς, μια αρχική συνάρτηση της $f'(x) = 4x^3$ είναι η $f(x) = x^4$
Άρα, όλες οι αρχικές συναρτήσεις θα δίνονται από την $x^4 + c$

Ερώτημα:
Ποια συνάρτηση πρέπει να παραγωγίσουμε για να πάρουμε $4x^3$;

Απάντηση: $x^4 + c$

Ορίζω το αόριστο ολοκλήρωμα της $4x^3$: $\int 4x^3 = x^4 + c$.

Αόριστο ολοκλήρωμα ή αντι-παράγωγος

$$\int f(x)dx = F(x)+c$$

όπου c ο σταθερός όρος ολοκλήρωση

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

1. Το ολοκλήρωμα μιας σταθεράς k επί μιας συνάρτησης f(x) ισούται με τη σταθερά k επί το ολοκλήρωμα της συνάρτησης.

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

π.χ. $\int 4x^{-1}dx = 4 \int x^{-1}dx = 4Ln|x| +c$

2. Το ολοκλήρωμα του αθροίσματος ή της διαφοράς η συναρτήσεων είναι ίσο με το άθροισμα ή τη διαφορά των ολοκληρωμάτων τους.

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx+ \int g(x)dx$$

π.χ. $\int (4x^3 - 3x^{-2})dx =\int 4\chi^3 \, dx -\int 3x^{-2}dx = 4/4 \, x^4dx-3/-2+1 \, x^{-2+1}+c=x^4+3x^{-1}+c$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int(3x^3 - \chi+1)dx$

<u>Λύση</u>

$\int(3x^3- x+ 1)dx = 3\int x^3dx - \int xdx+\int dx =$

$= 3(\frac{1}{4}x^4) - \frac{1}{2}x^2 + x + c =$

$= \frac{3}{4}x^4- \frac{1}{2}x^2 + x + c$

Αρχικές και Οριακές Συνθήκες

ΕΝΟΤΗΤΑ 8

Πολλές φορές μας δίνεται μία αρχική συνθήκη [$Y = Y_0$ όταν $X = 0$] ή μία οριακή συνθήκη [$Y = Y_0$ όταν $X = X_0$], η οποία μοναδικά ορίζει το σταθερό όρο c του ολοκληρώματος.

Αυτό μας οδηγεί σε ένα μοναδικό προσδιορισμό του c, και άρα ορίζεται μία συγκεκριμένη καμπύλη από την οικογένεια των καμπυλών.

π.χ. Έχω την οριακή συνθήκη $Y = 11$ όταν $X = 3$ και το ολοκλήρωμα $y = \int 2dx$.

Άρα,

$$y = \int 2dx = 2x + c \quad \rightarrow \quad y = 2x + c$$

Για $y = 11$ όταν $x = 3$ $\quad \rightarrow \quad 11 = 2(3) + c \quad \rightarrow \quad c = 5$

Οπότε η τελική συνάρτηση είναι: $\quad y = 2x+5$

Οικονομικές Εφαρμογές

Οριακή Συνάρτηση → Συνολική Συνάρτηση

Έστω το οριακό κόστος (MC) μιας επιχείρησης: $MC = 3Q^2-4Q+5$

Η συνάρτηση του συνολικού κόστους TC(Q) από την αντι-παραγώγιση ή ολοκλήρωση της MC:

$$TC = \int (3Q^2 - 4Q+5)dQ = \frac{3}{3}Q^3 - \frac{4}{2}Q^2 + 5Q + c \quad \rightarrow \quad TC = Q^3 - 2Q^2 + 5Q + c$$

Προσδιορισμός σταθερού όρου c:

Όταν Q = 0, το συνολικό κόστος TC θα αποτελείται μόνο από το σταθερό κόστος FC (fixed cost).

Θέτοντας Q = 0 στη συνάρτηση TC: $TC = c = FC(Q)$

Τελικά, $TC = Q^3 - 2Q^2+5Q+FC$

Οικονομικές Εφαρμογές

Επένδυση και Συσσώρευση Κεφαλαίου

Απόθεμα του κεφαλαίου ως συνάρτηση του χρόνου: K(t)

Άρα ο ρυθμός συσσώρευσης του κεφαλάιου: $\frac{dK}{dt}$

Ρυθμός καθαρής επένδυσης (net-investment) στο χρόνο t: I(t)

$$\frac{dK}{dt} \equiv I(t)$$

$$K(t) = \int I(t)dt = \int \frac{dK}{dt}dt = \int dK$$

<u>Παράδειγμα</u>:

Έστω $I = 40t^{3/5}$, και η συσσώρευση κεφαλαίου στο χρόνο t = 0 είναι K = 75.

Να βρεθεί η συνάρτηση κεφαλαίου.

$$K=\int I(t)dt=\int 40\, t^{3/5}\, dt \;= 40\left(\frac{5}{8}\right)(t^{8/5}) + c = 25t^{8/5}+c$$

Για t = 0 και K = 75 στην παραπάνω σχέση, παίρνουμε: $75 = 0+c \rightarrow c = 75$.

Συνεπώς, η συνάρτηση του κεφαλαίου θα είναι: $K = 25t^{8/5}+75$.

Ορισμένα Ολοκληρώματα

Έστω το $\int f(x)dx$ = F(x) + c

Αν:

α) Επιλέξω δυο τιμές της μεταβλητής χ, a και b, π.χ. a < b,

β) Αντικαταστήσω τις δυο τιμές στο δεξιό μέρος της εξίσωσης και

γ) Πάρω τη διαφορά:

$$[F(b)+c] - [F(a)+c] = F(b) - F(a)$$

Συνεπώς, έχω μία συγκεκριμένη τιμή.

Αυτή η τιμή ονομάζεται το **ορισμένο ολοκλήρωμα της f(x) από το a ως το b**.

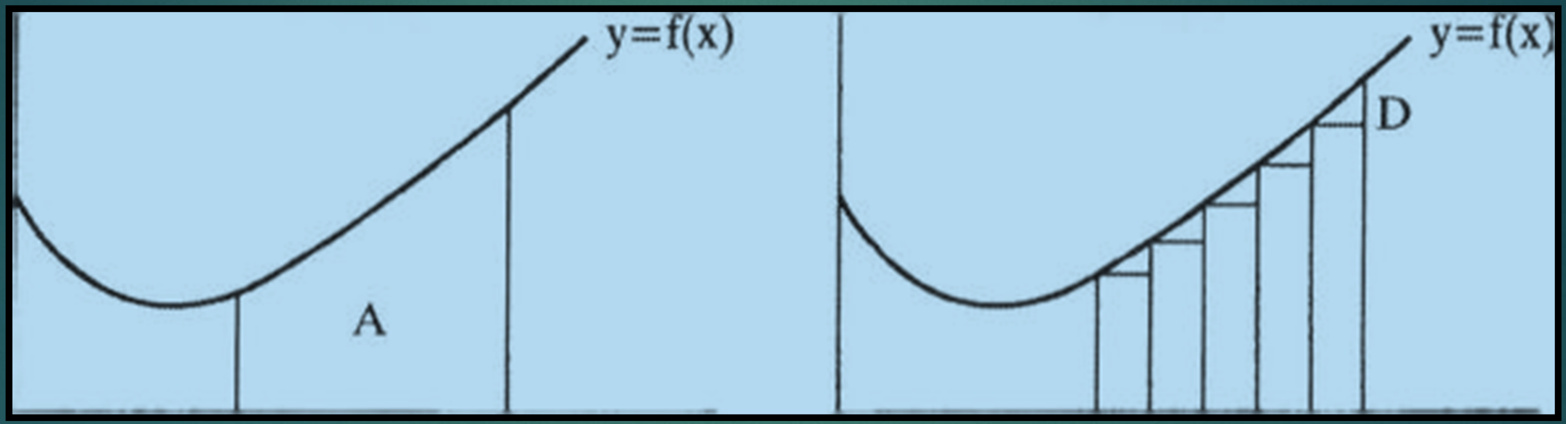
Το a και το b ορίζονται ως το χαμηλότερο όριο και το υψηλότερο όριο της ολοκλήρωσης αντίστοιχα.

Οπότε και γράφω: $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_b^a = F(b)-F(a)$

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES
SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

Ορισμένα Ολοκληρώματα

Διαγραμματικά:



$$A=\lim_{n\to\infty}= \Sigma_{i=1}^{n} f(X_i)\Delta X_i$$

Βασικό Θεώρημα Λογισμού

ΕΝΟΤΗΤΑ 8

Έστω f(x) μια συνάρτηση συνεχής και ολοκληρώσιμη στο διάστημα [a, b] και F(x) μια αρχική συνάρτηση της f(x) στο διάστημα [a, b]: F(x) = f(x) σε κάθε σημείο t του διαστήματος [a, b]. Εάν α < m < b, θα είναι:

$$\int_m^t f(x)dx = F(x)\Big|_m^t = F(t)-F(m) \text{ Ve}[a,b]$$

όπου το σύμβολο $\Big|_m^t$ δείχνει ότι t και m θα υποκαταστήσουν διαδοχικά τη μεταβλητή x.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να εκτιμηθούν τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα:

1. $\int_1^5 8x\,dx$

2. $\int_1^3 (4x^3+6x)\,dx$

<u>ΛΥΣΗ</u>

1. $\int_1^5 8x\,dx = 4x^2+c\,|_1^5 = 4(5)^2+c - 4(1)^2+c = 96$

2. $\int_1^3 (4x^3+6x)\,dx = [x^4+3x^2]^3_1 = [(3)^4+3(3)^2]-[(1)^4+3(1)^2] = 108-4 = 104$

Το 96 και το 104 είναι τα εμβαδά κάτω από τις καμπύλες

$y = 4x^2[1, 5]$ και $y = x^4+3x^2[1, 3]$ αντίστοιχα.

Ορισμένα Ολοκληρώματα

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

1. Το ολοκλήρωμα αλλάζει πρόσημο όταν αναστρέψουμε τα όρια της ολοκλήρωσης, δηλαδή:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

2. Αν για τη συνάρτηση y = f(x) το διάστημα ορίζεται [a, a], τότε η τιμή του ολοκληρώματος είναι ίση με μηδέν.

$$\int_a^a f(x)dx = F(a)-F(a)=0$$

3. Το ορισμένο ολοκλήρωμα μπορεί να εκφρασθεί ως το άθροισμα των υπο-ολοκληρωμάτων.

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \text{ όπου } a \le b \le c$$

4. Το άθροισμα ή η διαφορά δύο ορισμένων ολοκληρωμάτων με ίδια όρια ολοκλήρωσης [a, b] είναι ίσο με το ορισμένο ολοκλήρωμα του αθροίσματος ή της διαφοράς των δύο συναρτήσεων.

$$\int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx]$$

5. Αν κ είναι μια σταθερά και η f(x) είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα [a, b], θα ισχύει:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$\int_1^3 2x^3dx = \int_3^1 2x^3dx$

ΛΥΣΗ

$\int_1^3 2x^3dx = \frac{1}{2}\, x^4|_1{}^3 = \frac{1}{2}\,(3)^4 - \frac{1}{2}\,(1)^4 = 40$

$\int_3^1 2x^3dx = \frac{1}{2}x^4|_3{}^1 = \frac{1}{2}\,(1)^4 - \frac{1}{2}\,(3)^4 = -40$

$\int_0^4 6xdx = \int_0^3 6xdx + \int_3^4 6xdx$

ΛΥΣΗ:

$\int_0^4 6xdx = 3x^2|_0{}^4 = 3(4)^2 - 3(0)^2 = 48$

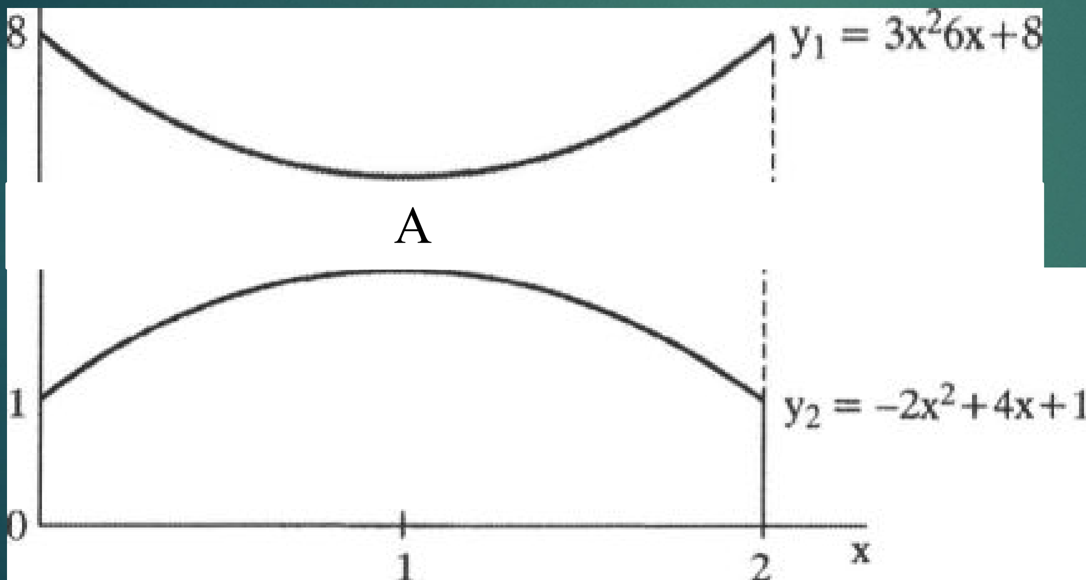
$\int_0^3 6xdx = 3x^2|_0{}^3 = 3(3)^2 - 3(0)^2 = 27$

$\int_3^4 6xdx = 3x^2|_4{}^4 = 3(4)^2 - 3(3)^2 = 21$

Περιοχή μεταξύ των καμπυλών

Έστω οι συναρτήσεις: $y_1 = 3χ^2 - 6χ+8$ και $y_2 = -2χ^2+4χ+1$ στο διάστημα [0, 2].
Για να βρούμε το εμβαδό της περιοχής Α, που ορίζεται μεταξύ των συναρτήσεων y_1 και y_2 και του διαστήματος [0, 2] (διάγραμμα), ακολουθούμε τα εξής στάδια:

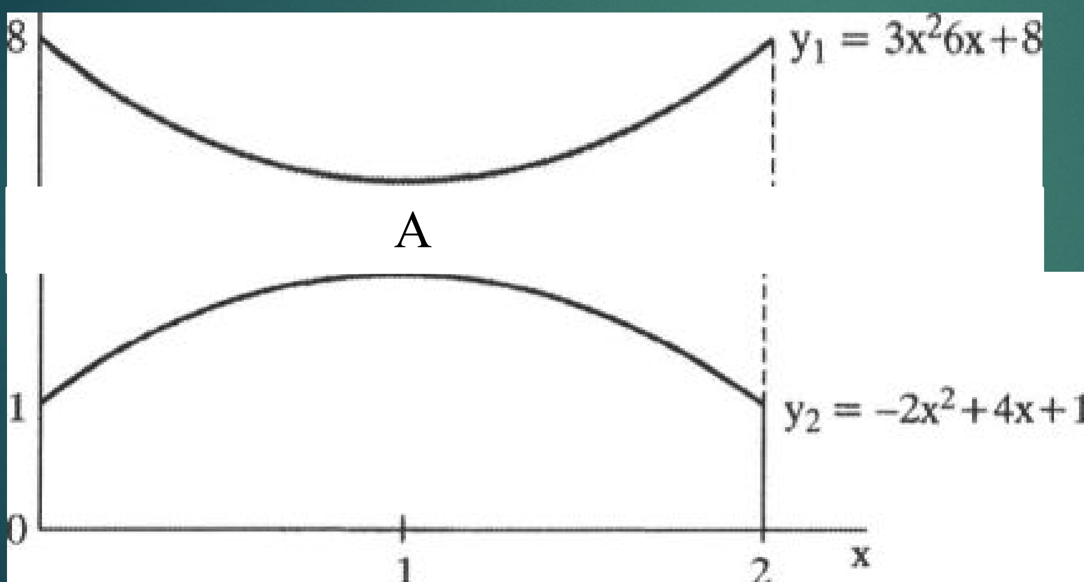
α) Στους άξονες y και x απεικονίζουμε τις καμπύλες που ορίζονται από τις συναρτήσεις y_1 και y_2



Περιοχή μεταξύ των καμπυλών

β) Αφού η y, βρίσκεται πάνω από την y_2, η περιοχή A είναι απλώς αυτή που βρίσκεται κάτω από την y, μείον την περιοχή που βρίσκεται κάτω από την y_2 για το διάστημα [0, 2]. Έτσι,

$$A = \int_0^2[(3x^2-6x+8)dx- \int_0^2[\ (-2x^2+4x+1)]dx$$



$$A=\int_0^2[(3x^2 - 6x + 8) - (-2x^2 + 4x + 1)]dx =$$

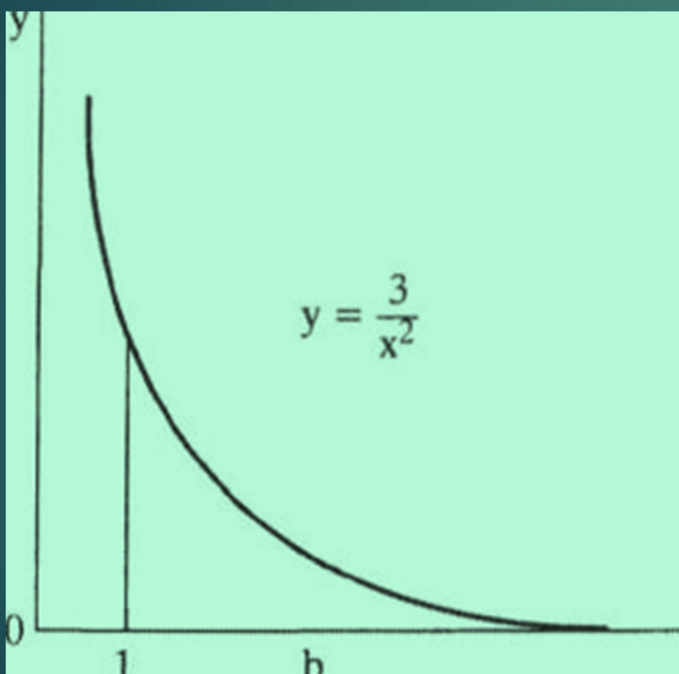
$$=\int_0^2(5x^2 - 10x + 7)dx=(\frac{5}{3}x^3-5x^2+7x)|_0^2$$

$$= 7*\frac{1}{3} - 0 = 7*\frac{1}{3}$$

Άρα, το εμβαδό A που βρίσκεται μεταξύ των δύο καμπυλών θα είναι ίσο με $\frac{7}{3}$.

Γενικευμένα Ολοκληρώματα

Τι συμβαίνει όταν το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης που μπορεί να πάρει άπειρες τιμές ή όταν το διάστημα [a, b] δεν είναι πεπερασμένο, δηλαδή όταν $\alpha \to \infty$ ή $b \to \infty$
Τότε έχουμε την περίπτωση του γενικευμένου ολοκληρώματος.



Η συνάρτηση $Y = 3/X^2$ είναι συνεχής στο διάστημα [a, b] και τείνει στο άπειρο για $X \to 0$

$$\int_a^b f(X)dX = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(X)dX, \quad \varepsilon > 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$I=\int_0^1 1/\sqrt{X}$

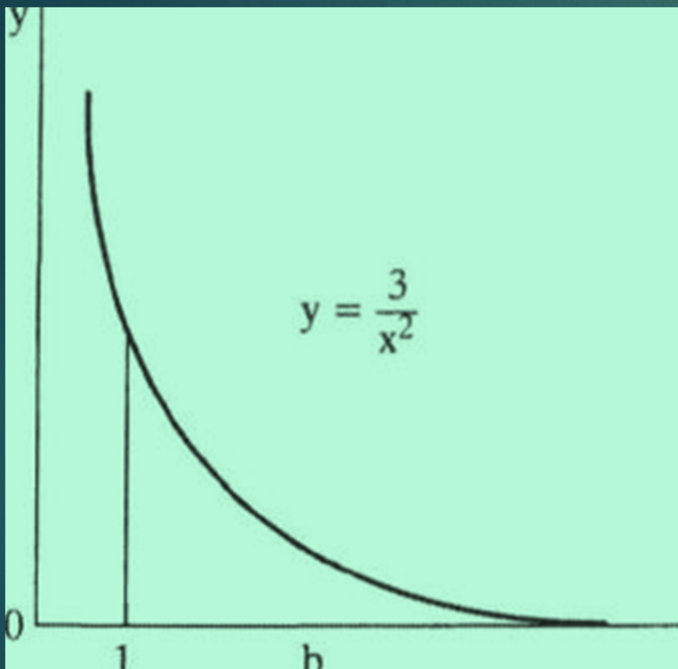
επειδή η συνάρτηση $\frac{1}{\sqrt{X}}$ είναι απροσδιόριστη στο σημείο 0 θα έχουμε:

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{1} 1/\sqrt{X} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1} 1/\sqrt{X} = \lim_{\varepsilon\to 0}[2\sqrt{X}]_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon\to 0}[2-2\sqrt{\varepsilon}]=2$$

Αν η συνάρτηση είναι απροσδιόριστη σε ένα σημείο X_0 $[a < X_0 < b]$, θα έχουμε

$$\int_a^b f(X)dX = \lim_{\varepsilon 1\to 0}\int_a^{\chi 0-\varepsilon 1} f(X)dX + \lim_{\varepsilon 2\to 0}\int_{\chi 0+\varepsilon 2}^{b} f(X)dX$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



$\int_1^{\infty} \frac{3}{\chi^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{\infty} \frac{3}{\chi^2}\,dx =$

$= \lim_{b\to\infty} [3(\frac{1}{-2+1})x^{-2+1}]_1^b =$

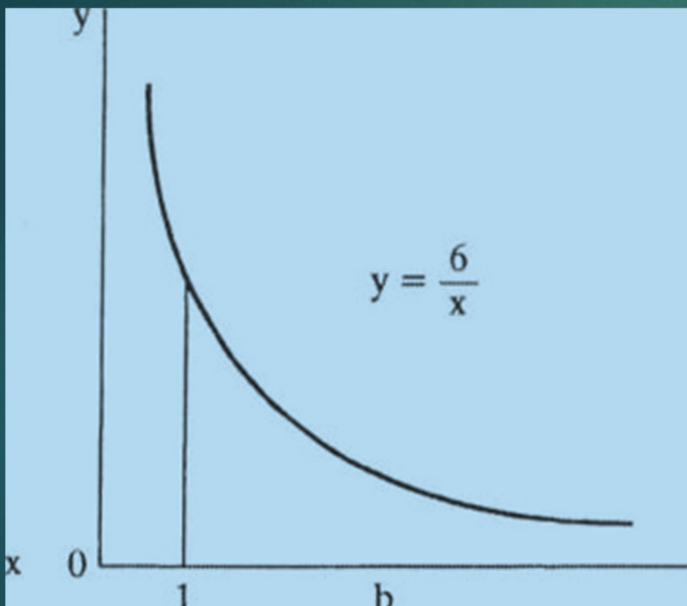
$= \lim_{b\to\infty} [-\frac{3}{x}]_1^b = \lim_{b\to\infty} [-\frac{3}{b} - \frac{-3}{1}] =$

$= \lim_{b\to\infty} (-\frac{3}{b}+3) = 3$

διότι, καθώς b —> 00 ο λόγος $-\frac{3}{b}$ —> 0.

Συνεπώς, η συνάρτηση είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη και η περιοχή κάτω από την καμπύλη είναι ίση με 3.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



$\int_1^{00} 6/x \ dx \ = \lim_{b\to\infty} \int_b^1 6/xdx \ =$

$= \lim_{b\to\infty}[6Lnx]_1^b = \lim_{b\to\infty}[6Ln|b| - 6Ln|1|]$

$= \lim_{b\to\infty}[6Ln|b|]$

$(Ln|1|=0)$

Επομένως, καθώς $b\to\infty$ και $6Ln|b|\to\infty$.

Άρα, το ολοκλήρωμα δεν ορίζεται.

ΕΝΟΤΗΤΑ 8

Η πιθανότητα P, ότι ένα γεγονός θα συμβεί, μπορεί να μετρηθεί από την αντίστοιχη περιοχή κάτω από μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (probability density function). Μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι μια συνεχής συνάρτηση f(x), όταν

1. $f(x) \geq 0$: Η πιθανότητα δεν μπορεί να είναι αρνητική.

2. $\int_{-00}^{00} f(x)dx = 1$: Η πιθανότητα του γεγονότος που συμβαίνει καθ' όλη τη διάρκεια του διαστήματος της x είναι 1.

3. $P(a < \chi < b) = \int_{\alpha}^{b} f(x)dx$: Η πιθανότητα της τιμής της x να βρίσκεται μεταξύ του διαστήματος [a, b] είναι η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος από το a στο b.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Το ποσοστό της παράδοσης επιστολών που πραγματοποιήθηκαν μέσα σε μια μέρα δίνεται από τη συνάρτηση πιθανοτήτων συχνότητας $f(x) = 12(x^2-x^3)$ για $0 < χ < 1$.

Ποια είναι η πιθανότητα ότι:

α. Το 50% ή λιγότερο της παράδοσης των επιστολών θα ολοκληρωθεί μέσα σε μια μέρα:

$P_a=\int_0^{0,5} 12(x^2-x^3)dx=12[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}]_0^{0,5}=12[(\frac{0,125}{3} - \frac{0,0625}{4})-0]$ ή $P_a=0,3125$.

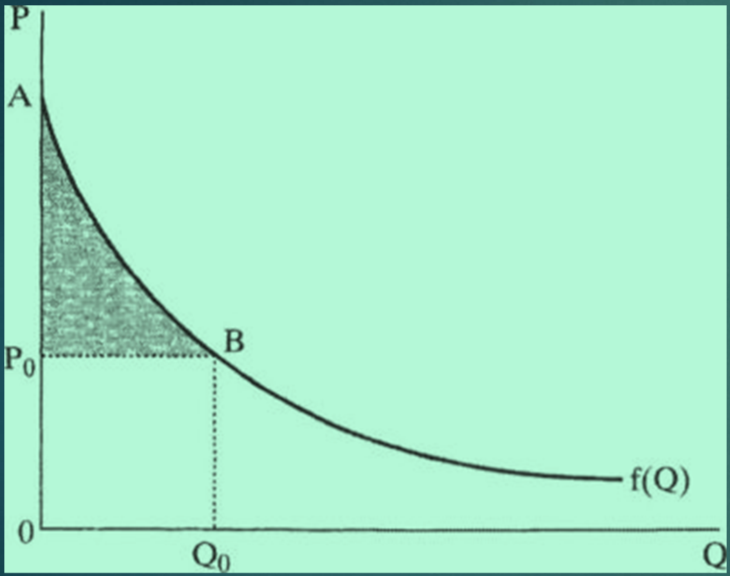
β. Το 50% ή περισσότερο θα ολοκληρωθεί κατά τη διάρκεια μιας ημέρας:

$P_β=\int_{0,5}^{1} 12(x^2-x^3)dx=12[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}]_{0,5}^{1}=12[(\frac{1}{3} - \frac{1}{4})-(\frac{0,125}{3} - \frac{0,0625}{4}]$ ή $P_β=0,684$.

Οικονομικές Εφαρμογές

ΕΝΟΤΗΤΑ 8

Πλεόνασμα Καταναλωτή



$$\int_0^{Q0} f(Q)dQ\text{-}Q_0P_0$$

Π.χ.

Έστω η συνάρτηση ζήτησης $P = 45 - 2Q - Q^2$.

Επίσης, όταν η τιμή στην αγορά είναι $P_0 = 10$, η ποσότητα που πουλιέται είναι $Q_0 = 5$.

Το συνολικό πλεόνασμα του καταναλωτή:

$$\int_{Q=0}^{Q=5} f(Q)dQ\text{-}Q_0P_0 = \int_0^5 (45 - 2Q - Q^2)dQ\text{-}Q_0P_0 = [45Q\text{-}Q^2\text{-}\frac{Q^3}{3}]_0^5 =$$

$$= (225\text{-}25\text{-}\frac{125}{3})\text{-}(0) = 158{,}3\text{-}\ Q_0P_03$$

Η περιοχή P_0BQ_00 είναι ίση με $P_0Q_0 = 10 * 5 = 50$.

Άρα, το πλεόνασμα του καταναλωτή είναι ίσο με: 158,33 - 50 = 108,33.

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES
SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω ότι η συνάρτηση ζήτησης κάποιου αγαθού είναι Q= 8-2 $\sqrt{P}$.

α) Να βρείτε το πλεόνασμα του καταναλωτή που αντιστοιχεί στην τιμή P=2.

β) Να βρείτε το πλεόνασμα του καταναλωτή που αντιστοιχεί στην τιμή P=4.

γ) Να βρείτε το πλεόνασμα του καταναλωτή καθώς η τιμή μειώνεται από P=4 σε P=2.

ΛΥΣΗ

α) Η μέγιστη τιμή είναι P=16. Το πλεόνασμα του καταναλωτή είναι:
$CS_1 = \int_2^{16} D(P)dp = \int_2^{16}(8 - 2\sqrt{P})dp = 8P|_2^{16} - \frac{4}{3}P^{3/2}|_2^{16} = 30,4379.$

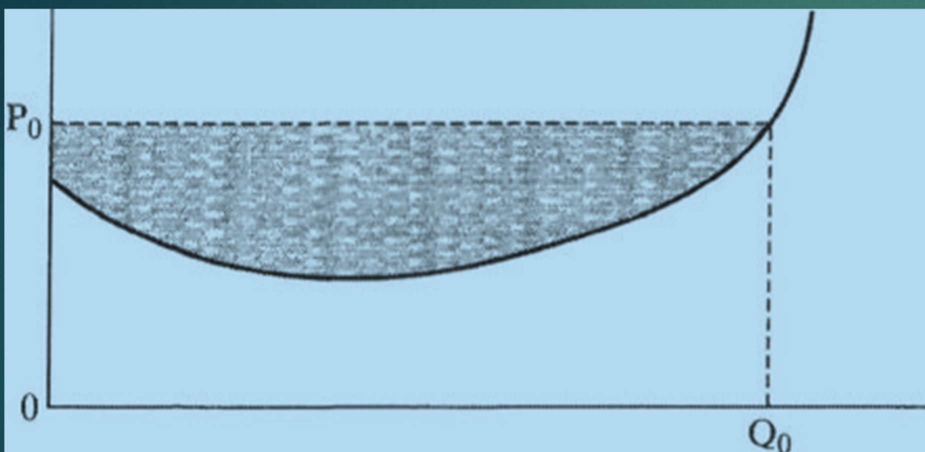
β) Παρόμοια είναι:
$CS_2 = \int_4^{16} D(P)dp = \int_4^{16}(8 - 2\sqrt{P})dp = 8P|_4^{16} - \frac{4}{3}P^{3/2}|_4^{16} = 21,333.$

γ) $\Delta CS = -\int_2^{4} D(P)dp = \int_2^{4} D(P)dp = 8P|_2^{4} - \frac{4}{3}P^{3/2}|_2^{4} = 9,1046 = CS_1 - CS_2.$

Οικονομικές Εφαρμογές

ΕΝΟΤΗΤΑ 8

Πλεόνασμα Παραγωγού



$$Q_o P_o - \int_0^{Q0} f(Q)dQ$$

Π.χ.

Έστω η συνάρτηση προσφοράς $P = (Q+3)^2$.

Να βρεθεί το πλεόνασμα του παραγωγού (PS) στην τιμή $P_0 = 81$ και $Q_0 = 6$.

$$PS = (81)\text{-}(6) - \int_0^6 (Q+3)^2 dq = 486 - [\tfrac{1}{3} -(Q+3)^3]_o^6$$

$$\rightarrow PS = 486 - [\tfrac{1}{3}(6+3)^3 - \tfrac{1}{3}(0+3)^3] = 234.$$

Οικονομικές Εφαρμογές

Άριστη χρήση μη ανανεώσιμων πόρων

Έστω ότι το απόθεμα πετρελαίου στο υπέδαφος είναι 20 μονάδες (S = 20), το οποίο μπορεί να εξορυχτεί με σταθερό οριακό κόστος 2 ευρώ ανά μονάδα (MC = 2 ευρώ).

Ας υποθέσουμε ότι το απόθεμα εξαντλείται σε δύο χρονικές περιόδους, ώστε, αν Q_0 και Q_1, είναι οι ποσότητες που εξορύσσονται στην περίοδο 0 και 1 αντίστοιχα, οπότε

$$Q_0+Q_1=20=S$$

Καμπύλη ζήτησης πετρελαίου: $P_t = 8 - 0{,}4Q_t$, όπου P και Q_t είναι η τιμή και η ποσότητα στην περίοδο t.

Επιτόκιο r = 10%.

Με βάση τα παραπάνω δεδομένα το ερώτημα που πρέπει να απαντηθεί είναι:

Ποια είναι τα επίπεδα του εξορυσσόμενου πετρελαίου σε καθεμιά από τις δυο περιόδους που μεγιστοποιούν το καθαρό κοινωνικό όφελος;

Οικονομικές Εφαρμογές

ΕΝΟΤΗΤΑ 8

Άριστη χρήση μη ανανεώσιμων πόρων

Καθαρό Συνολικό Όφελος = συνολικό όφελος και των δύο περιόδων (ολοκλήρωμα της P - ολοκλήρωμα MC)

$$NPV=[\int_0^{Q0}(8-0{,}4Q)dQ-\int_0^{Q0}2dQ]+[\int_0^{Q1}\frac{8-0{,}4Q}{1+r}dQ-\int_0^{Q1}\frac{2}{1+r}dQ]$$

Ποια τα Q_0 και Q_1 για max NPV υπό τον περιορισμό του περιορισμένου αποθέματος του πετρελαίου, δηλαδή $Q_0+Q_1 = 20$???

→ Μέθοδος Lagrange

Οικονομικές Εφαρμογές

Άριστη χρήση μη ανανεώσιμων πόρων

$$NPV=\left[\int_0^{Q0}(8-0{,}4Q)dQ-\int_0^{Q0}2dQ\right]+\left[\int_0^{Q1}\frac{8-0{,}4Q}{1+r}dQ-\int_0^{Q1}\frac{2}{1+r}dQ\right.$$

Περιορισμός: $Q_0+Q_1=20$

$$L=\left[\int_0^{Q0}(8-0{,}4Q)dQ-\int_0^{Q0}2dQ\right]+\left[\int_0^{Q1}\frac{8-0{,}4Q}{1+r}dQ-\int_0^{Q1}\frac{2}{1+r}dQ+\lambda(20-Q_0-Q_1)\right.$$

Οι πρώτες συνθήκες για μεγιστοποίηση είναι:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial Q0}=8-0{,}4Q_0-2-\lambda=0\\&\frac{\partial L}{\partial Q1}=\left(\frac{8-0{,}4Q_1-2}{1+r}\right)-\lambda=0\\&\frac{\partial L}{\partial \lambda}=20-Q_0-Q_1=0\end{aligned}\right\}\quad Q_o=10{,}238,\ Q_1=9{,}762 \text{ και } \lambda=1{,}905$$

Οικονομικές Εφαρμογές

Άριστη χρήση μη ανανεώσιμων πόρων

NPV=$[\int_0^{Q0}(8-0{,}4Q)dQ - \int_0^{Q0} 2dQ] + [\int_0^{Q1} \frac{8-0{,}4Q}{1+r} dQ - \int_0^{Q1} \frac{2}{1+r} dQ$

Περιορισμός: $Q_0+Q_1 = 20$

Άρα, $P_o = 3{,}905$ και $P_1 = 4{,}095$

Οι δεύτερες συνθήκες για μεγιστοποίηση απαιτούν όπως

dS = 0

και

$d^2L < 0$

$$dS = 0 \rightarrow d20 = Q_0 dQo + Q_1 dQ_1 \quad \rightarrow \quad 0 = Q_0 dQ0 + Q_1 dQ_1 \rightarrow \quad dQo = -\frac{Q_1}{Q_0} dQ_1$$

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial Q_0} dQ_0{}^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial Q_1} dQ_1{}^2 + \frac{2\partial^2 L}{\partial Q_1 \partial Q0} dQ_1 dQ_2$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial Q_0} = -0{,}4, \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial Q_1} = \frac{0{,}4}{1+r}, \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial Q_1 \partial Q0} = 0$$

Οικονομικές Εφαρμογές

ΕΝΟΤΗΤΑ 8

Άριστη χρήση μη ανανεώσιμων πόρων

NPV=$[\int_0^{Q0}(8-0{,}4Q)dQ$-$\int_0^{Q0}2dQ]$+$[\int_0^{Q1}\frac{8-0{,}4Q}{1+r}dQ$ - $\int_0^{Q1}\frac{2}{1+r}dQ$

Περιορισμός: $Q_0+Q_1 = 20$

Συνεπώς,

$$d^2L = -0{,}4\ dQ_0^2 - \frac{0{,}4}{1+r}\ dQ_1^2$$

$$dQo = -\frac{Q_1}{Q_0}\ dQ_1$$

$$d^2L = -0{,}4\ \left(\frac{Q_1}{Q_0}dQ_1\right)^2 - \frac{0{,}4}{1+r}\ dQ_1^2 < 0,$$ που ισχύει.

Άρα, ο άριστος ρυθμός εξόρυξης για την περίοδο 0 και 1 απαιτεί όπως εξορύσσονται οι ποσότητες $Q_0 = 10{,}238$ και $Q_1 = 9{,}762$ και πωλούνται στην τιμή $P_0 = 3{,}905$ και $P_1 = 4{,}095$ αντιστοίχως.

Οικονομικές Εφαρμογές

Πλεόνασμα Καταναλωτή και Σταθερή Ελαστικότητα

Μια καμπύλη ζήτησης της μορφής $P=aQ^{-\beta}$ με α και β σταθερές, έχει σταθερή ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή. Πράγματι,

$$E_d = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{1}{dP/dQ} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{1}{-a\beta Q^{-\beta-1}} \cdot \frac{aQ^{-\beta}}{Q} = -\frac{1}{\beta} \quad \rightarrow \quad \text{σταθερή}$$

Για να εκτιμήσουμε το πλεόνασμα του καταναλωτή από Q = 0 μέχρι Q = q* πρέπει να αφαιρέσουμε (P)(q*) από την περιοχή κάτω από τη συνάρτηση της ζήτησης σ' αυτό το διάστημα.

Το πλεόνασμα του καταναλωτή (CS) είναι:

$$CS= \int aQ^{-\beta} - P\,q^* = (a(q^*)^{1-\beta}/1-\beta) - a(q^*)^{1-\beta} = \alpha(q^*)^{1-\beta} * \left[\frac{1}{1-\beta} - 1\right] = \alpha(q^*)^{1-\beta} * \left[\frac{\beta}{1-\beta}\right] - P\,q^*$$

Οικονομικές Εφαρμογές

Πλεόνασμα Καταναλωτή και Σταθερή Ελαστικότητα

Η περιοχή που ορίζεται από τη συνάρτηση ζήτησης στο διάστημα 0 μέχρι q* είναι:

$$q^* = \int_0^{q^*} aQ^{-a}dq = [\,(\alpha Q^{-\beta+1})/-\beta+1]_0^{q^*} = (\alpha(q^*)^{1-\beta})/1-\beta \qquad \forall\ \beta<1.$$

- Αν β > 1, τότε η ελαστικότητα της ζήτησης ως προς την τιμή θα είναι $E_d < 1$, με συνέπεια η περιοχή αυτή να μην ορίζεται.
- Το β πρέπει να είναι μικρότερο του 1 (β < 1) και η E_D πρέπει να είναι μεγαλύτερη του 1($E_d > 1$).

$$Pq^* = [\,\alpha(q^*)^{-\beta}\,]q^* = a(q^*)^{1-\beta}, \qquad \text{αφού } P = a(q^*)^{-\beta} \text{ όταν } Q = q^*$$

Συνεπώς, το πλεόνασμα: $CS = (\alpha(q^*)^{1-\beta})/1-\beta - \alpha(q^*)^{1-\beta} = \alpha(q^*)^{1-\beta} * [\frac{1}{1-\beta} - 1] = \alpha(q^*)^{1-\beta} * [\frac{\beta}{1-\beta}]$

Όμως $a(q^*)^{1-\beta} = Pq^*$ που είναι η ποσότητα που ξοδεύτηκε από τον καταναλωτή. Άρα, όταν μια συνάρτηση ζήτησης έχει μια σταθερή ελαστικότητα ζήτησης, το πλεόνασμα του καταναλωτή είναι μια σταθερά.

ΑΣΚΗΣΗ

Να βρεθεί:

α) Η συνάρτηση TR και

β) η συνάρτηση ζήτησης όταν $MR = 84 - 4Q - Q^2$.

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι για $MR = 84 - 4Q - Q^2$ $\rightarrow TR = \int MR dQ = \int (84 - 4Q - Q^2) dQ$

$\rightarrow TR = 84Q - 2Q^2 - \frac{1}{3}Q^3 + c$

Για $Q = 0$ $\rightarrow$ $TR = 0$, άρα $c = 0$

β) Αν P η τιμή, τότε τα συνολικά έσοδα θα είναι $TR = PQ$.

Οπότε από την $TR = 84Q - 2Q^2 - \frac{1}{3}Q^3 + c$: $84Q - 2Q^2 - \frac{1}{3}Q^3 = PQ$

$\rightarrow$ $P = 84 - 2Q - \frac{1}{3}Q^2$, η συνάρτηση ζήτησης.

ΕΝΟΤΗΤΑ 8

ΑΣΚΗΣΗ

Δίνονται οι παρακάτω συναρτήσεις ζήτησης

1. $Q = 10 - P$
2. $Q = 64P^{-2}$

Να βρεθεί το πλεόνασμα του καταναλωτή, όταν $P = 4$ και $P = 5$.

ΛΥΣΗ

Από θεωρία, αν P = f(Q) η συνάρτηση ζήτησης, τότε το πλεόνασμα του καταναλωτή είναι:

$CS = \int f(Q)dQ - Q_0P_0$, με το σημείο ($Q_o$, Po) σημείο ισορροπίας

1. Για $P_o = 4$, $Q_0 = 10 - 4 \rightarrow Q_0 = 6$

$CS = \int_0^6 (10 - Q)dQ - Q_0P_0 = [10Q - \frac{Q^2}{2}]_0^6 - 4*6 = 10*6 - \frac{6^2}{2} - 4*6 \rightarrow CS = 18$, και για $P_o = 5 \rightarrow Q_o = 10-5 = 5$

Συνεπώς, $CS = \int_0^5 (10 - Q)dQ - Q_0P_0 = [10Q - \frac{Q^2}{2}]_0^5 - Q_0P_0 = 10*5 - \frac{25}{2} - 5*5 \rightarrow CS = 12{,}5$

2. Η συνάρτηση ζήτησης είναι $Q = 64P^{-2} \rightarrow P^2 = 64/Q \rightarrow P = 8/\sqrt{Q}$

Για $P_o = 4$, $Q_o = 64 * 4^{-2} \rightarrow Q_0 = 4$

Άρα, το πλεόνασμα θα είναι $CS = \int_0^{Q0} f(Q)dQ - Q_0P_0 = \int_0^4 8/\sqrt{Q} - Q_0P_0 = 8[2\sqrt{Q}]_0^4 - 4*4 \rightarrow CS = 16$

Για $P_0 = 5$, $Qo = 64\ 5^{-2} = 2{,}56$

Οπότε, $CS = \int_0^{Q0} f(Q)dQ - Q_0P_0 = \int_0^{2,56} 8/\sqrt{Q} - 5*2{,}56 = 8[2\sqrt{Q}]_0^{2,56} - 12{,}8 \rightarrow CS = 12{,}8$

ΑΣΚΗΣΗ

Οι συνθήκες παραγωγής μιας εταιρίας κατασκευής λαμπτήρων αντανακλάται στις ακόλουθες συναρτήσεις:

$MC = Q/(1+2Q)^{3/2}$

$MR = 48 - 16Q + Q^2$

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι η επιχείρηση αντιμετωπίζει σταθερό κόστος λειτουργίας FC = 500 χρηματικές μονάδες.

Να βρεθεί:

α) Η συνάρτηση του συνολικού κόστους.

β) Η συνάρτηση των κερδών.

γ) Η συνάρτηση ζήτησης για λαμπτήρες.

ΛΥΣΗ

α. Γνωρίζουμε ότι $TC = \int MC\, dQ$ → $TC=\int \frac{Q}{(1+2Q)^{3/2}}\, dQ$

Εφαρμόζουμε την ακόλουθη αντικατάσταση:

Θέτω $u^2 = 1 + 2Q$ → $Q = \frac{u^2-1}{2}$ → $2Q = u^2 - 1$

Αλλά $d(2Q) = 2dQ = (u^2 - 1)'du$ → $2d(Q) = 2udu$ → $dQ = u\, du$

Συνεπώς, η TC γίνεται: $TC=\int \frac{u^2-1}{2} * \frac{1}{(u^2)^{\wedge}3/2} u\, du=\int \frac{u^2-1}{2} * \frac{1}{u^3} u\, du \rightarrow$

$TC=\int [(u^2 - 1)/2\, u^2\,]du =1/2\int [(u^2 - 1)/\, u^2\,]du =\frac{1}{2}\int (\frac{u^2}{u^2} - \frac{1}{u^2})du =\frac{1}{2}\int (1-\frac{1}{u^2})du = \frac{1}{2}\int du-\frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2}du$

→ $TC = \frac{1}{2} u-\frac{1}{2} *\frac{1}{1-2} u^{-2+1}+c = \frac{1}{2} u-\frac{1}{2} (-1)\, u^{-1}+c = \frac{1}{2} u +\frac{1}{2u} +c$ → $TC=(\frac{1}{2})*\frac{u^2+1}{u}+c$

ΛΥΣΗ

$TC=(\frac{1}{2})*\frac{u^2+1}{u}+c$

Άρα αφού $2Q = u^2 - 1$:

$TC = \frac{1}{2}*[(1+2Q+1)/(1+2Q)^{1/2}]+c = \frac{1}{2}*[2+2Q/(1+2Q)^{1/2}]+c = \frac{1}{2}*[2(1+Q)/(1+2Q)^{1/2}]+c$

$\rightarrow$ $TC= [(1+Q)/ (1+2Q)^{1/2}]+c$

Γνωρίζουμε ότι FC = 500, οπότε με βάση την αρχική συνθήκη θα έχουμε:

Για $Q = 0$ $\rightarrow$ $FC = TC = 500$ $\rightarrow$ $[(1+0)/ (1+2*0)^{1/2}]+c= 500$ $\rightarrow$

$\rightarrow$ $1/\sqrt{1}+ c = 500$ $\rightarrow$ $1 + C = 500$ $\rightarrow$ $c=499$

Οπότε, $TC= [(1+Q)/ (1+2Q)^{1/2}]+499$

ΛΥΣΗ

β. Το κέρδος δίνεται από τη σχέση: $\Pi = TR - TC$

Όπου:

$$TC= [(1+Q)/ (1+2Q)^{1/2}]+499$$

Αντιπαραγωγίζοντας την MR:

$TR = \int MR\, dQ \rightarrow TR= \int(48 - 16Q + Q^2)dQ=48Q-\frac{1}{2}*Q^2+\frac{1}{3}Q^3+c \rightarrow TR=\frac{1}{3}Q^3-8Q^2+48Q+c$

Με βάση την αρχική συνθήκη, όταν $Q = 0 \rightarrow TR = 0 \rightarrow$ και $c = 0$

Συνεπώς,

$$TR=\frac{1}{3}Q^3-8Q^2+48Q$$

Τελικά,

$$\Pi=\frac{1}{3}Q^3-8Q^2+48Q- (1+Q)/ (1+2Q)^{1/2}-499$$

ΛΥΣΗ

γ. Γνωρίζουμε ότι

$$TR = P * Q \rightarrow P = AR = TR/Q \rightarrow P = \frac{1}{3}(Q^3 - 8Q^2 + 48Q)/Q$$

$$\rightarrow P = \frac{1}{3}Q^2 - 8Q + 48 = \frac{1}{3}(Q^2 - 24Q + 144) = \frac{1}{3}(12-Q)^2$$

Η συνάρτηση ζήτησης για λαμπτήρες δίνεται, λοιπόν, από την $P = \frac{1}{3}(12-Q)^2$

ΑΣΚΗΣΗ

Δίνονται οι ακόλουθες συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς :

$P = \frac{75}{(1+Q)^2}$ Συνάρτηση ζήτησης

$P = 2 + \frac{Q^2}{16}$ Συνάρτηση προσφοράς

Να βρεθεί το πλεόνασμα του καταναλωτή και το πλεόνασμα του παραγωγού, όταν P = 3.

Να γίνει και διαγραμματική παράσταση.

ΛΥΣΗ

Για P = 3, η συνάρτηση ζήτησης δίνει:

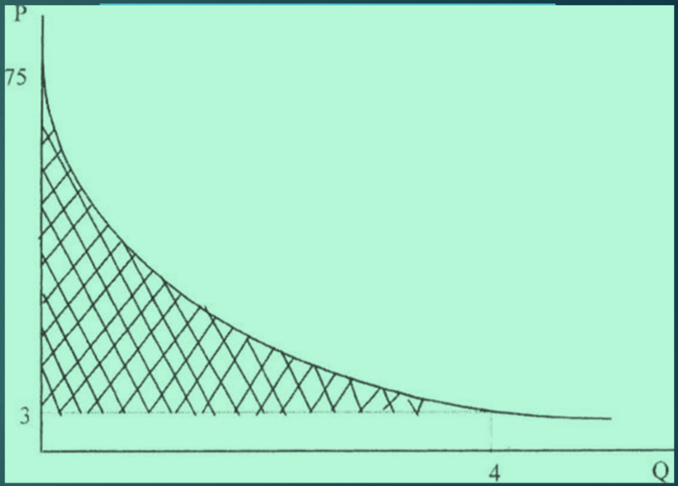
$3 = \frac{75}{(1+Q)^2}$ → $3(1+Q)^2=75$ → $(1+Q)^2=\frac{75}{3}$ → $(1+Q)^2=25 \rightarrow 1+Q=\sqrt{25}$ → $1+Q=\pm 5$

→ Q=4 αποδεκτή ή Q=-6 μη αποδεκτή

Οπότε, για P = 3 και Q = 4, οι δαπάνες του καταναλωτή είναι: $P \cdot Q = 12$

Το πλεόνασμα του καταναλωτή: $CS=\int_0^4 [75(1+Q)^{-2}]dQ-12$

Αντικαθιστώ όπου $U=1+Q$ → $\frac{du}{dQ}=1$ → $du=dQ$



Άρα,

$CS=75\int_0^4 [(u)^{-2}]du-12=75[\frac{1}{-1} * u^{-1}]_0^4-12=75*[-(1+Q)^{-1}]_0^4-12=75[(-\frac{1}{5})-(-1)]-12$ → $CS=75*\frac{4}{5}-12=60-12$

→ CS=48

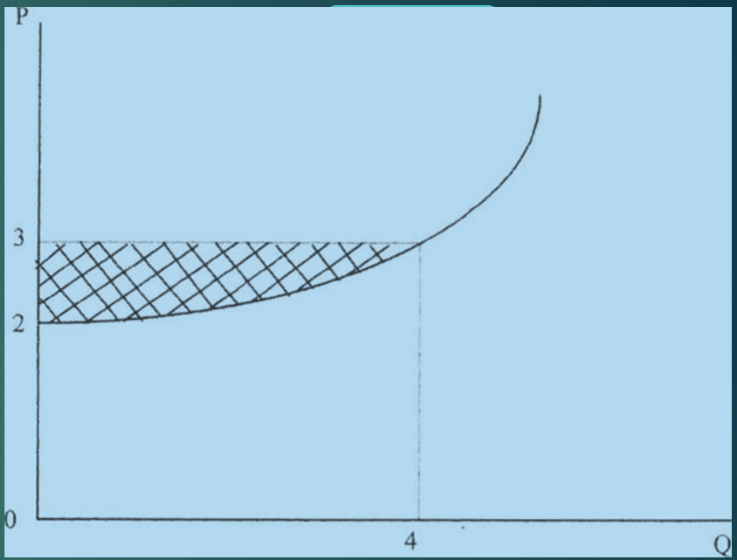
ΕΝΟΤΗΤΑ 8

ΛΥΣΗ

Για P = 3, η συνάρτηση προσφοράς δίνει:

$3 = 2 + \frac{Q^2}{16}$ → $1 = \frac{Q^2}{16}$ → $Q^2 = 16$ → $Q = \sqrt{16}$

→$Q = -4$ μη αποδεκτή οικονομικά ή $Q = 4$ αποδεκτή



Οπότε, για P = 3 και Q = 4,

το έσοδο του παραγωγού θα είναι: $P \cdot Q = 12$.

Επομένως, το πλεόνασμα του παραγωγού:

$PS = 12 - \int_0^4 \left(2 + \frac{Q^2}{16}\right) dQ = 12 - [2Q + \frac{1}{1}6 * \frac{1}{3} Q^3]_0^4 = 12 - [2Q + \frac{Q^3}{48}]_0^4 = 12 - [(8 + \frac{64}{48}) - 0]$

→ PS=12-9,3 → PS=2,67

ΑΣΚΗΣΗ

Το Κέντρο Προγραμματισμού και Ανάπτυξης (Κ.ΕΠΕ) της ελληνικής οικονομίας εξετάζει τα σχέδιά του που αφορούν την άρδευση των δυτικών περιοχών της χώρας. Η αξία του ήδη υπάρχοντος αρδευτικού εξοπλισμού είναι 20δισ. ευρώ. Σε συνεργασία με την παγκόσμια τράπεζα, το ΚΕΠΕ εκτιμά ότι το ποσό των χρημάτων το οποίο πρέπει να επενδυθεί για τα επόμενα πέντε χρόνια μπορεί να προσδιοριστεί από την ακόλουθη συνάρτηση

$$I(t) = 4t + 0{,}9t^2 - 0{,}002t^3$$

Όπου t είναι ο χρόνος που πραγματοποιείται η επένδυση και I είναι το ποσό της επένδυσης εκφρασμένο σε δισεκατομμύρια ευρώ. Ζητείται

α) να εκτιμηθεί, στο τέλος του πενταετούς επενδυτικού προγράμματος, πόσα χρήματα θα έχουν επενδυθεί στον αρδευτικό εξοπλισμό της χώρας και

β) να εξεταστεί, εάν στο τέλος του πέμπτου χρόνου η συνάρτηση των επενδύσεων γίνει $I(t) = 50 + 5te^{-1}$, πόσο χρόνο θα απαιτούσε το επόμενο επενδυτικό σχέδιο, εάν χρειαζόταν εξοπλισμός αξίας 255δισ. ευρώ. για να τελειώσει το αρδευτικό πρόγραμμα της χώρας.

ΛΥΣΗ

α) Η αξία του ήδη υπάρχοντος εξοπλισμού είναι 20 δισ. ευρώ. Στο τέλος του πενταετούς προγράμματος το σύνολο των επενδυμένων χρημάτων θα είναι:

$$K1 = 20 + \int_0^5 (4t + 0{,}9t^2 - 0{,}002t^3)dt = 20 + [4\frac{t^2}{2}]_0^5 + [0{,}9\frac{t^3}{3}]_0^5 - [0{,}002\frac{t^4}{4}]_0^5 =$$

$= 20+50+37{,}5-0{,}3125 = 107{,}1875$ δις ευρώ.

ΛΥΣΗ

β) Να εξεταστεί, εάν στο τέλος του πέμπτου χρόνου η συνάρτηση των επενδύσεων γίνει $I(t) = 50 + 5te^{-1}$, πόσο χρόνο θα απαιτούσε το επόμενο επενδυτικό σχέδιο, εάν χρειαζόταν εξοπλισμός αξίας 255δισ. ευρώ για να τελειώσει το αρδευτικό πρόγραμμα της χώρας.

Στο τέλος του πενταετούς προγράμματος θα έχουν ήδη επενδυθεί $K_1 = 107{,}1875$ δισ. ευρώ.

Από τον 5ο ως τον τελευταίο χρόνο Τ θα έχουν ξοδευτεί $K_2 = 255 - 107{,}1875 = 147{,}8125$ δισ. ευρώ

Άρα , $K_2=\int_5^T(50 + 50te^{-1})dt=[50]_5^T+[\frac{50}{e} * \frac{t^2}{2}]_5^T$

→ $147{,}8125=50T-250+(9{,}197T^2-229{,}92)$ → $9{,}197T^2+50T-627{,}73=0$

$\Delta = \beta^2 -4\alpha\gamma = 50^2 - 4 \cdot 9{,}197 *(-627{,}73) = 160^2$

Οι λύσεις είναι: $T_{1,2}= \frac{-50\pm160}{2*9{,}197}=$ $T1 = -11{,}416$ απορρίπτεται
$T2 = 5{,}98$ δεκτή

Άρα το επόμενο επενδυτικό πρόγραμμα θα απαιτούσε περίπου 1 χρόνο.

ΑΣΚΗΣΗ

Οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς κάτω από ανταγωνισμό είναι $p_d = 16 - x^2$ και $p_s = 2x^2 + 4$.

Βρείτε το πλεόνασμα του καταναλωτή και του παραγωγού στην τιμή ισορροπίας της αγοράς.

ΛΥΣΗ

Για την ισορροπία στην αγορά: Ζητούμενη ποσότητα = προσφερόμενη ποσότητα →

$16-x^2=2x^2+4$ → $3x^2=12$ → $x^2=4$ → $x=2$ (το $x=-2$ μη αποδεκτό). Άρα $x_0=2$.

$$P_0=16-2^2=12$$

$$P_0x_0=12*2=24$$

Πλεόνασμα καταναλωτή

$CS=\int_0^{x0} f(x)dx - poxo = \int_0^2 (16-x^2)dx - 24 = [16x-\frac{x^3}{3}]_0^2 - 24 = 32-\frac{8}{3}-24 = \frac{16}{3}$ μονάδες

Πλεόνασμα παραγωγού

$PS = P_0X_0 - \int_0^{x0} g(x)dx = 24 - \int_0^2 (4+2x^2)dx = 24 - [\frac{2x^3}{3}+4x]_0^2 = 24-2*\frac{8}{3}-8 = \frac{32}{3}$ μονάδες.

ΑΣΚΗΣΗ

Αν μία επιχείρηση έχει συνάρτηση οριακού κόστους

$MC=180+0.3q^2$ και

οριακού εσόδου $MR=540-0.6q^2$

και τα συνολικά σταθερά κόστη είναι 65$.

Ποιο είναι το μέγιστο κέρδος που μπορεί να έχει; (υποθέστε ότι απαιτούνται οι συνθήκες δεύτερης τάξης για το μέγιστο).

ΛΥΣΗ

Τα κέρδη μεγιστοποιούνται όταν MC=MR.

Άρα, $180+0.3q^2=540-0.6q^2 \rightarrow 0.9q^2=360 \rightarrow q^2=400 \rightarrow q=20$.

Για να βρούμε τα πραγματικά κέρδη (Π), ολοκληρώνουμε για να πάρουμε TR και TC και μετά αφαιρούμε TC από TR.

$TR=\int MRdq= TR=\int(540-0.6q^2)dq= 540q-0.2q^3$

$TC=\int MCdq+ TFC= TR=\int(180+0.3q^2)dq+65= 180q+0.1q^3+65$

$\Pi=TR-TC=540q-0.2q^3-(180q+0.1q^3+65)= 540q-0.2q^3-180q-0.1q^3-65=360q-0.3q^3-65$.

Όταν q=20 το μέγιστο επίπεδο κέρδους είναι:

$$\Pi=360(20)-0.3(20)^3-65=4{,}735\$.$$

ΤΕΛΟΣ 8ΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ