SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES

ΠΟΣΟΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Γιώργος Λούντζης (PhD, MSc, MEng)

Εντεταλμένος Διδάσκων (ΕΣΠΑ)

2023-2024

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

1. ΟΛΙΚΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΚΑΙ ΟΛΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

2. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

Στις μονομεταβλητές συναρτήσεις:

Έστω y=y(x)

$$dy=\frac{\partial y}{\partial x}dx \rightarrow dy=y'(x)dx$$

Π.χ. $y= 3x^2-2x \rightarrow dy= (6x-2)\, dx$

Για πολυμεταβλητές συναρτήσεις → <u>ολικό διαφορικό</u>.

Έστω συνάρτηση y=y(x,z,ω) έχουμε:

$$y=y(x,z,\omega) \rightarrow dy=\frac{\partial y}{\partial x}dx+\frac{\partial y}{\partial z}dz+\frac{\partial y}{\partial \omega}d\omega$$

$$\rightarrow dy= y_x dx +y_z dz+ y_\omega\, d\omega$$

Με τον παραπάνω τρόπο υπολογίζεται προσεγγιστικά η μεταβολή της συνάρτησης y=y(x,z,ω) όταν από το σημείο που ορίζεται από τα (x,z,ω) πηγαίνουμε στο σημείο (x+dx, z+dz, ω+dω).

Π.χ. $y= 3x^2-4\omega^4 x+ 5\omega^2+20$

$$dy = (6x-4\omega^4)dx + (-16\omega^3 x + 10\omega)d\omega$$

Για τη «ν-μεταβλητή» συνάρτηση $y=y(x_1,x_2\dots,x_n)$: $dy=\frac{\partial y}{\partial x1} dx_1 +\dots+ \frac{\partial y}{\partial xn}dx_n$

→ $\boxed{dy= y_1 dx_1 +\dots+ y_n dx_n}$

ολικό διαφορικό

Παράδειγμα

Η συνολική κατανάλωση (Κ) σε μία χώρα εξαρτάται (δηλ. είναι συνάρτηση) από το εθνικό εισόδημα (Ε) της χώρας και από το ύψος του επιτοκίου (t) στην χώρα. Δηλαδή,

$$K = g(E,t)$$

Ολικό Διαφορικό:

$$dK = \frac{\partial k}{\partial E}\,dE + \frac{\partial K}{\partial t}\,dt$$

Άρα:

$$\frac{\partial K}{\partial E} > 0 \quad \text{αλλά} \quad \frac{\partial K}{\partial t} < 0$$

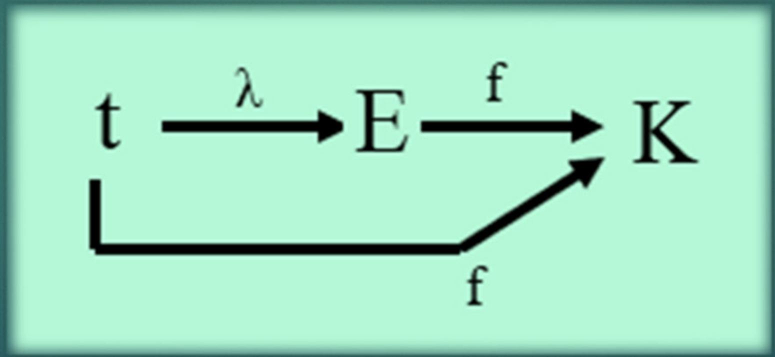
Ταυτόχρονα το εθνικό εισόδημα (Ε) εξαρτάται από το ύψος του επιτοκίου (t), δηλαδή, $E=\lambda(t)$

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

Συνεπώς στη σχέση Ε=λ(t) δεχόμαστε ότι $\frac{dE}{dt} > 0$

Άρα, K= f(E,t) όπου Ε=λ(t)

Η παράγωγος $\frac{\partial K}{\partial t}$ της μας δίνει τον ρυθμό μεταβολής της Κ όταν μεταβάλλεται το t <u>αλλά με το Ε σταθερό.</u>



ΕΝΟΤΗΤΑ 5

Α. Κατ΄ αρχάς παίρνουμε το ολικό διαφορικό της $K= g(E,t)$, δηλαδή

$$dK=\frac{\partial K}{\partial E}\,dE+\frac{\partial K}{\partial t}dt$$

Β. Στη συνέχεια διαιρούμε και τα δύο σκέλη της με το dt οπότε έχουμε

$$\frac{dK}{dt}=\frac{\partial K}{\partial E}\frac{dE}{dt}+\frac{\partial K}{\partial t}\frac{dt}{dt}$$

→ $\frac{dK}{dt}$ (ολική παράγωγος της K ως προς το t) $=\frac{\partial K}{\partial E}\frac{dE}{dt}+\frac{\partial K}{\partial t}$

Παράδειγμα - Εφαρμογή

K= 10+0,7E-0,2t^2 όπου E=0,1t^2

$\frac{\partial K}{\partial E} = 0{,}7$ $\frac{\partial K}{\partial t} = -0{,}4t$ $\frac{dE}{dt} = 0{,}2t$

οπότε, $\frac{dK}{dt} = 0{,}7 \cdot 0{,}2t + (-0{,}4t) = 0{,}14t - 0{,}40t = -0{,}26t$

Παρατηρούμε ότι $\frac{\partial K}{\partial t}$**= -0,4t** αλλά $\frac{dK}{dt}$ **= -0,26t**.

Δηλαδή με σταθερό το Ε, η αρνητική επίδραση μιας δεδομένης αύξησης του t πάνω στο Κ είναι μεγαλύτερη από την αρνητική επίδραση της ίδιας αύξησης του t πάνω στο Κ αλλά με το Ε μη σταθερό.

Γενικά: Αν y=f(x,z) όπου x=λ (z), τότε η ολική παράγωγος προς y προς την z είναι

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{dx}{dz} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{dz}{dz} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{dx}{dz} + \frac{\partial y}{\partial z} \rightarrow \frac{dy}{dz} = f_x\frac{dx}{dz} + f_z\frac{dz}{dz} = f_x\frac{dx}{dz} + f_z$$

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω η συνάρτηση χρησιμότητας:

$$U = X^{1/2}Y^{1/4}$$

Να βρεθεί:

Η κλίση της καμπύλης αδιαφορίας $U = X^{1/2}\,Y^{1/4}$

ΛΥΣΗ

Η κλίση της καμπύλης αδιαφορίας δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dY}{dX} = -\ \frac{Ux}{Uy} = -\ \frac{\frac{d(X^{1/2}Y^{1/4})}{dX}}{\frac{d(X^{1/2}Y^{1/4})/}{dY}} = -\ \frac{\frac{1}{2}X^{-1/2}Y^{1/4}}{\frac{1}{4}X^{1/2}Y^{-3/4}} = -2\ \frac{Y}{X}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Η γενική μορφή της CES συνάρτησης παραγωγής είναι:

$$Q = \gamma\ (\delta K^{-\rho} + (1 - \delta)L^{-})^{-\mu/\rho}$$

όπου γ και $\mu \geq 0$, $\rho \geq -1$ και $0 \leq \delta \leq 1$.

Το μ δείχνει το βαθμό ομοιογένειας της συνάρτησης.
Αν $\mu = 1$, θα έχουμε σταθερές αποδόσεις κλίμακας.
Το γ εκφράζει την αποδοτικότητα,
το δ είναι παράμετρος διανομής και
το ρ η παράμετρος υποκατάστασης μεταξύ των συντελεστών παραγωγής κεφαλαίου (K) και εργασίας (L).

Να βρεθεί ο οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης.

ΛΥΣΗ

Ο οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης δίνεται από τη σχέση:

$$MRTS_{L,K} = \frac{dK}{dL} = -\frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}} = -\frac{\frac{\partial((\gamma(\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho})^{-\mu/\rho})}{\partial L}}{\frac{\partial((\gamma(\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho})^{-\mu/\rho})}{\partial K}}$$

Οι προς παραγώγιση συναρτήσεις είναι σύνθετες.

Γνωρίζουμε ότι αν $Y = f(u)$ και $u = g(x)$, τότε

$$\frac{dY}{dx} = \frac{dY}{du} \cdot \frac{du}{dX}$$

ΛΥΣΗ

Θέτω $u = \delta K^{-\rho} + (1 - d)L^{-\rho}$,

οπότε: $$\frac{dK}{dL} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial L}}{\frac{\partial f}{\partial K}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial L}}{\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial K}} = -\frac{\frac{\partial(\gamma u^{-\mu/\rho})}{\partial u}\cdot\frac{\partial(\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho})}{\partial L}}{\frac{\partial(\gamma u^{-\mu/\rho})}{\partial u}\cdot\frac{\partial(\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho})}{\partial K}}$$

όμως $$\frac{\partial(\gamma u^{-\mu/\rho})}{\partial u} = -\frac{\mu}{\rho}\gamma u^{-\mu/\rho-1},$$

$$\frac{\partial(\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho})}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}(\delta K^{-\rho}) + \frac{\partial}{\partial L}(1-\delta)L^{-\rho} = 0-\rho(1-\delta)L^{-\rho-1}$$

$$\frac{\partial(\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho})}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K}(\delta K^{-\rho}) + \frac{\partial}{\partial K}(1-\delta)L^{-\rho} = -\rho\delta K^{-\rho-1}+0$$

Άρα, $$\frac{dK}{dL} = \frac{-\rho(1-\delta)L^{-\rho-1}}{-\rho\delta K^{-\rho-1}} = (1-\delta/\delta)(L/K)^{-(\rho+1)}$$

Ομογενείς Συναρτήσεις

Μία **διαφορική εξίσωση** ονομάζεται **ομογενής** σε κάθε μία από τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

1) εάν η εξίσωση είναι πρώτης τάξης και οι συντελεστές των διαφορικών **dx και dy** είναι του ίδιου βαθμού ομογενείς συναρτήσεις των μεταβλητών,
και
2) εάν είναι γραμμικές οποιασδήποτε τάξης, αλλά ο σταθερός όρος είναι μηδενικός.

Ομογενής Διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

Μία συνηθισμένη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης της μορφής:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

είναι ομογενής, εάν και οι δύο συναρτήσεις $M(x, y)$ *και* $N(x, y)$ είναι ομογενείς συναρτήσεις του ίδιου βαθμού n.
Δηλ. πολλαπλασιάζοντας κάθε μεταβλητή με την παράμετρο λ, να ισχύει:

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n M(x, y) \; \kappa\alpha\iota \; N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n N(x, y)$$

Έτσι,

$$\frac{M(\lambda x, \lambda y)}{N(\lambda x, \lambda y)} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται η συνάρτηση παραγωγής

$$Q=\frac{aLK-bL^{2}-cK^{2}}{aL+bK}$$

Να βρεθεί:

α) ότι η παραπάνω συνάρτηση είναι ομογενής πρώτου βαθμού και

β) ότι η ομογένεια της οριακής παραγωγικότητας της εργασίας και του κεφαλαίου είναι μηδενικού βαθμού.

ΛΥΣΗ

α) ότι η συνάρτηση $Q=\frac{aLK-bL^2-cK^2}{aL+bK}$ είναι ομογενής πρώτου βαθμού

Γνωρίζουμε ότι αν Q = f(K,L) μια συνάρτηση παραγωγής και ισχύει

$$f(\lambda K,\lambda L) = \lambda^{\mu} f(KL) = \lambda Q$$

τότε η συνάρτηση είναι ομογενής πρώτου βαθμού.

Έστω ότι το κεφάλαιο και η εργασία αυξάνονται κατά το ίδιο ποσοστό λ.

Τότε η συνάρτηση παραγωγής γίνεται:

$$Q_1=\frac{a(\lambda L)(\lambda K)-b(\lambda L)^2-c(\lambda K)^2}{a(\lambda L)+b(\lambda K)}=\frac{a\lambda^2 LK-b\,\lambda^2 L^2-c\,\lambda^2 K^2}{a\lambda L+b\lambda K}$$

$$\rightarrow Q_1{}'=\frac{\lambda^2(aLK-b\,L^2-c\,K^2)}{\lambda(a\lambda L+b\lambda K)}=\frac{\lambda(aLK-b\,L^2-c\,K^2)}{a\lambda L+b\lambda K}=\lambda\cdot Q$$

Άρα, η συνάρτηση παραγωγής είναι ομογενής πρώτου βαθμού.

ΛΥΣΗ

β) ότι η ομογένεια της οριακής παραγωγικότητας της εργασίας και του κεφαλαίου είναι μηδενικού βαθμού.

Η οριακή παραγωγικότητα της εργασίας δίνεται από τη σχέση:

$$\mathrm{MPL} = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial\left(\frac{aLK - bL^2 - cK^2}{aL + bK}\right)}{\partial L}$$

Θέτω $g(L) = aLK - bL^2 - cK^2$ και $h(L) = aL + bK$.

$$\mathrm{MPL} = \frac{\partial\left(\frac{g(L)}{h(L)}\right)}{\partial L} = \frac{\left[h(L)\frac{\partial g(L)}{\partial L}\right) - \left(g(L)\frac{\partial h(L)}{\partial L}\right]}{h(L)^2} = \frac{(aL+bK)(aK-2bL)-(aLK-bL^2-cK^2)a}{(aL+bK)^2} = \frac{a^2LK - 2abL^2 + abK^2 - 2b^2KL - a^2LK + abL^2 + acK^2}{(aL+bK)^2}$$

$$\rightarrow \quad \mathrm{MPL} = \frac{-abL^2 + a(b+c)K^2 - 2b^2KL}{(aL+bK)^2}$$

Έστω ότι το κεφάλαιο και η εργασία αυξάνονται κατά το ίδιο ποσοστό λ.
Τότε η οριακή παραγωγικότητα της εργασίας γίνεται:

$$\mathrm{MPL1} = \frac{-ab(\lambda L)^2 + a(b+c)(\lambda K)^2 - 2b^2(\lambda K)(\lambda L)}{(a(\lambda L)+b(\lambda K))^2} = \frac{-ab\lambda^2L^2 + a(b+c)\lambda^2K^2 - 2b^2\lambda^2KL}{\lambda^2((aL+bK))^2} = \frac{\lambda^2(-abL^2 + a(b+c)K^2 - 2b^2KL)}{\lambda^2((aL+bK))^2} / = \frac{-abL^2 + a(b+c)K^2 - 2b^2KL}{(aL+bK)^2} = \mathrm{MPL}.$$

Άρα, η οριακή παραγωγικότητα της εργασίας είναι ομογενής μηδενικο βαθμού.

ΛΥΣΗ

Η οριακή παραγωγικότητα του κεφαλαίου δίνεται από τη σχέση: MPK$=\frac{\partial Q}{\partial K}=\frac{\partial\left(\frac{(aLK-bL^2-cK^2)}{aL+bK}\right)}{\partial K}$

Θέτω $g(K) = aLK-bL^2-cK^2$ και $h(K) = aL+bK$.

$$MPK=\frac{\partial\left(\frac{g(K)}{h(K)}\right)}{\partial K}=\frac{[(h(K)\frac{\partial g(K)}{\partial K})-(g(K)\frac{\partial h(K)}{\partial L})]}{h(K)^2}=\frac{(aL+bK)(aL-2cK)-(aLK-bL^2-cK^2)b}{(aL+bK)^2}=$$

$$\rightarrow MPK=\frac{a^2L^2-2acLK+abKL-2bcK^2-abLK+b^2L^2+bcK^2}{(aL+bK)^2}=\frac{(a^2+b^2)L^2-bcK^2-2acKL}{(aL+bK)^2}$$

Έστω ότι το κεφάλαιο και η εργασία αυξάνονται κατά το ίδιο ποσοστό λ.

Τότε η οριακή παραγωγικότητα της εργασίας γίνεται:

$$MPK1=\frac{(a^2+b^2)(\lambda L)^2-bc(\lambda K)^2-2ac(\lambda K)(\lambda L)}{(a(\lambda L)+b(\lambda K))^2}=\frac{(a^2+b^2)\lambda^2L^2-bc\lambda^2K^2-2ac\lambda^2KL}{\lambda((aL+bK))^2}=\frac{\lambda^2((a^2+b^2)L^2-bcK^2-2acKL)}{\lambda^2(aL+bK)^2}$$

$$\rightarrow MPK1=\frac{(a^2+b^2)L^2-bcK^2-2acKL}{(aL+bK)^2}=MPK$$

Άρα, η οριακή παραγωγικότητα του κεφαλαίου είναι ομογενής μηδενικού βαθμού.

Ομογενείς Συναρτήσεις

Αν $Q = f(K,L)$ μια συνάρτηση παραγωγής και $f(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\mu} f(K, L)$,

τότε

- αν $\mu > 1$, οι αποδόσεις κλίμακας είναι αύξουσες,
- αν $\mu = 1$, είναι σταθερές και
- αν $\mu < 1$, είναι φθίνουσες.

ΑΣΚΗΣΗ

Δίνονται οι πιο κάτω συναρτήσεις παραγωγής:

$$Q_1 = aL^{a}K^{1-\alpha} - bL^{b}K^{1-b}, \qquad 0<a \;\; b<1$$

$$Q_2 = \frac{aL^2K(K+L)}{b(L^2+K^2)}$$

Q η παραγόμενη ποσότητα,

L ο συντελεστής εργασίας,

K ο συντελεστής κεφάλαιο.

Να προσδιοριστεί, για καθεμιά από τις παραπάνω συναρτήσεις, η φύση των αποδόσεων κλίμακας.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι το κεφάλαιο (K) και η εργασία (L) αυξάνονται κατά το ίδιο ποσοστό λ.

Τότε οι συναρτήσεις παραγωγής γίνονται:

$$Q_1' = a(\lambda L)^a (\lambda K)^{1-\alpha} - b(\lambda L)^b (\lambda K)^{1-b} = a\lambda^\alpha L^a \lambda^{1-\alpha} K^{1-\alpha} - b\lambda^b L^b \lambda^{1-b} K^{1-b} = a\lambda L^a K^{1-\alpha} - b\lambda L^b K^{1-b}$$

$$\rightarrow Q_1' = \lambda(aL^a K^{1-\alpha} - bL^b K^{1-b}) = \lambda Q_1$$

$$Q_2' = \frac{a(\lambda L)^2 (\lambda K)(\lambda K + \lambda L)}{b((\lambda L)^2 + (\lambda K)^2)} = \frac{\alpha\lambda^2 L^2 \lambda K \lambda (K+L)}{b\lambda^2 (L^2 + K^2)} = \frac{\lambda^4 (\alpha L^2 K(K+L))}{b\lambda^2 (L^2 + K^2)}$$

$$\rightarrow Q_2' = \frac{\lambda^2 aL^2 K(K+L)}{b(L^2 + K^2)} = \lambda^2 Q_2$$

Άρα, οι αποδόσεις κλίμακας για την

Q1 είναι σταθερές (μ=1)

και αύξουσες για την Q2 (μ=2) .

ΑΣΚΗΣΗ

Να αποδειχθεί ότι για τη συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas η ελαστικότητα υποκατάστασης είναι ίση με τη μονάδα. Η ελαστικότητα υποκατάστασης δίνεται από τον τύπο:

$$\sigma = \frac{\dfrac{\partial\left(\frac{K}{L}\right)}{K/L}}{d\left(\dfrac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}}\right) / \dfrac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}}}$$

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas δίνεται από τη σχέση: $Q = AL^aK^b$

$$\sigma = \frac{\frac{\partial\left(\frac{K}{L}\right)}{K/L}}{\mathbf{d}\left(\frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}}\right) / \frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}}}$$

Υπολογίζω τους επιμέρους όρους:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial(AL^aK^b)}{\partial L} = AK^b\frac{\partial(L^a)}{\partial L} = AK^b aL^{a-1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\partial(AL^aK^b)}{\partial K} = AL^a\frac{\partial(K^b)}{\partial K} = AbK^{b-1}L^a$$

$$\frac{\partial Q}{\partial L} / \frac{\partial Q}{\partial K} = AK^b aL^{a-1} / AbK^{b-1}L^a = a/b * K/L$$

$$\mathbf{d}\left(\frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}}\right) = d(a/b * K/L) = a/b\, d(K/L)$$

$$\sigma = \frac{\frac{\partial\left(\frac{K}{L}\right)}{K/L}}{\mathbf{d}\left(\frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}}\right) / \frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}}} = \frac{\frac{\partial\left(\frac{K}{L}\right)}{\left(\frac{K}{L}\right)}}{\left(\frac{a}{b}\right) * \mathbf{d}(K/L) / \left(\frac{a}{b}\right) * \left(\frac{K}{L}\right)} = 1$$

ΑΣΚΗΣΗ

Δείξτε ότι στην περίπτωση μιας συνάρτησης παραγωγής τύπου Cobb-Douglas ο επιχειρηματίας μεγιστοποιεί το κέρδος του σε ένα σύστημα τέλειου ανταγωνισμού, όταν υπάρχουν φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας.

Η συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas είναι: $Q = AL^aK^b$

Το συνολικό κόστος TC δίνεται από τη σχέση: $TC = rK + wL$

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas είναι: $Q = AL^aK^b$

Το συνολικό κόστος TC δίνεται από τη σχέση: $TC = rK + wL$

Ο λόγος του οριακού προϊόντος της εργασίας (MPL) προς το οριακό προϊόν του κεφαλαίου (MPK) είναι:

$$\frac{MPL}{MPK} = \frac{dQ}{dL} \Big/ \frac{dQ}{dK} = \frac{w}{r}$$

$$MPL = \frac{dQ}{dL} = \frac{d(AL^aK^b)}{dL} = AaL^{a-1}K^b$$

$$MPK = \frac{dQ}{dK} = \frac{d(AL^aK^b)}{dK} = AbL^aK^{b-1}$$

$$\frac{w}{r} = (AaL^{a-1}K^b)/(AbL^aK^{b-1})$$

$$\rightarrow \frac{w}{r} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{K}{L}\right)$$

$$\rightarrow K = \left(\frac{w}{r}\right)\left(\frac{b}{a}\right)L$$

$Q = AL^aK^b$ $\Rightarrow$

$$Q = AL^a\left(\left(\frac{w}{r}\right)\left(\frac{b}{a}\right)L\right)^b = A\left(\left(\frac{w}{r}\right)\left(\frac{b}{a}\right)\right)^bL^{a+b}$$

ΛΥΣΗ

TC = rK + wL

$$TC=\left(\frac{wb}{a}\right)L+wL = \left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}+1\right)wL \rightarrow L=\frac{aTC}{(a+b)w}$$

$Q = A\left(\left(\frac{w}{r}\right)\left(\frac{b}{a}\right)\right)^{b}L^{a+b}$

$$Q = A\left(\left(\frac{w}{r}\right)\left(\frac{b}{a}\right)\right)^{b}\left(\frac{aTC}{(a+b)w}\right)^{a+b} \rightarrow Q = \frac{\mathbf{A}}{(\mathbf{a+b})^{\mathbf{a+b}}}\left(\frac{a}{w}\right)^{a}\left(\frac{b}{r}\right)^{b} TC^{a+b}$$

$$\rightarrow TC=(a+b)\frac{1}{A}\left(\frac{w}{a}\right)^{a}\left(\frac{r}{b}\right)^{b}Q^{1/a+b}$$

Θέτω: $B=(a+b)\frac{1}{A}\left(\frac{w}{a}\right)^{a}\left(\frac{r}{b}\right)^{b}$

οπότε: $TC=B\,Q^{1/a+b}$

Το οριακό κόστος θα είναι:

$$MC=\frac{dC}{dQ}=d(B\,Q^{1/a+b})/dQ=B*\frac{1}{a+b}Q^{1/a+b-1}$$

ΛΥΣΗ

Θέτω: $B=(a+b)\frac{1}{A}(\frac{w}{a})^a(\frac{r}{b})^b$ οπότε: $TC=B\,Q^{1/a+b}$

Το οριακό κόστος θα είναι: $MC=\frac{dC}{dQ}=\frac{d(B\cdot Q^{1/a+b})}{dQ}=B\cdot\frac{1}{a+b}\,Q^{\frac{1}{a+b}-1}$

Μια τελείως ανταγωνιστική επιχείρηση μεγιστοποιεί το ολικό της κέρδος, το οριακό κόστος ανέρχεται (MC ↗):

$$\frac{dMC}{dQ}>0$$

$$\frac{dMC}{dQ}=\frac{d(B\cdot\frac{1}{a+b}\,Q^{\frac{1}{a+b}-1})}{dQ}=\frac{B}{a+b}\left(\frac{1}{a+b}-1\right)Q^{\frac{1}{a+b}-2}$$

Για να ισχύει $\frac{dMC}{dQ}>0$, θα πρέπει $(\frac{1}{a+b}-1)>0$, αφού τα υπόλοιπα μέλη της παραπάνω εξίσωσης είναι θετικά.

$$\left(\frac{1}{a+b}-1\right)>0 \rightarrow \frac{1}{a+b}>1 \rightarrow \alpha+b<1$$

ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι αν $Q = f(K,L)$ μια συνάρτηση παραγωγής και $f(\lambda K,/\lambda L) = \lambda^{\mu} f(K,L)$, τότε
αν $\mu > 1$, οι αποδόσεις κλίμακας είναι αύξουσες,
αν $\mu = 1$ είναι σταθερές και
αν $\mu < 1$, είναι φθίνουσες.

$$Q(\lambda K,\lambda L) = A(\lambda L)^{a}(\lambda K)^{b}= A\lambda^{\alpha}\, \lambda^{\beta} L^{a}K^{b} =\lambda^{a+b} A\, L^{a}K^{b} =\lambda^{a+b}\, Q(K,L)$$

Συνεπώς, όταν $a + b < 1$ → ***οι αποδόσεις κλίμακας είναι φθίνουσες***.

Άρα, αν η παραγωγή γίνεται σύμφωνα με τη συνάρτηση CobbDouglas, ο επιχειρηματίας **μεγιστοποιεί** το κέρδος του σ’ ένα σύστημα τέλειου ανταγωνισμού, όταν υπάρχουν **φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας**.

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ