SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES

ΠΑΝΤΕΙΟΝ
PANTEION

ΠΟΣΟΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Γιώργος Λούντζης (PhD, MSc, MEng)

Εντεταλμένος Διδάσκων (ΕΣΠΑ)
2023-2024

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

1. ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

2. ΔΕΥΤΕΡΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

3. ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΓΙΑ ΤΟΠΙΚΑ ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ

4. ΑΝΑΓΚΑΙΕΣ ΚΑΙ ΕΠΑΡΚΕΙΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

5. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Έστω,

$$P= k-aQ^2+\beta Q \text{ με } \kappa,\alpha,\beta>0$$

Τα συνολικά έσοδα (TR) της επιχείρησης θα είναι TR = Q * P

$$\rightarrow TR = Q(k-aQ^2+\beta Q)=kQ-aQ^3+\beta Q^2$$

Το **οριακό έσοδο** (MR) → $MR=\frac{d(TR)}{dQ}$ =-3aQ²+2βQ

Όμως, το MR μεταβάλλεται συγχρόνως με τη μεταβολή του Q.

Συνεπώς, ο λόγος μεταβολής στο MR ως προς την ποσότητα Q: $\frac{d(MR)}{dQ}$

Η πόσοτητα αυτή μας δίνει την κλίση της εφαπτομένης της συνάρτησης του MR για όλες τις τιμές της Q:

$$\frac{d(MR)}{dQ} = k - 6aQ + 2\beta$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Η σχέση $\frac{d(MR)}{dQ}$ = k - 6aQ + 2β
αποτελεί την κλίση της εφαπτομένης στη συνάρτηση των **οριακών εσόδων** (MR).

Η σχέση $\frac{d(MR)}{dQ}$ - είναι η παράγωγος της $\frac{d(TR)}{dQ}$:

$$\frac{d(MR)}{dQ} = \frac{\frac{d(d(TR))}{dQ}}{dQ} = \frac{d^2(TR)}{dQ^2}$$

που αποτελεί τη δεύτερη παράγωγο των συνολικών εσόδων (TR) ως προς το Q.
Η δεύτερη παράγωγος μπορεί να οριστεί ως εξής:

$$\frac{d^2(TR)}{dQ^2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η συνάρτηση του κόστους είναι της έξης μορφής:

$$TC = k + aQ - bQ^2 + gQ^3$$

όπου k, a, b και g > 0.

Το οριακό κόστος (MC) θα είναι:

$$MC = \frac{d(TC)}{dQ} = a - 2bQ + 3gQ^2$$

Η συνάρτηση του οριακού κόστους (MC) είναι καμπυλόγραμμη (συνάρτηση δευτέρου βαθμού). Συνεπώς, η κλίση της εφαπτομένης σε αυτή την περίπτωση μεταβάλλεται με την ποσότητα Q, δηλαδή:

$$\frac{d(MC)}{dQ} = \frac{d^2(TC)}{dQ^2} = -2b + 6gQ$$

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES
SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα A του R και χ_0 ένα σημείο του A, χ_0 e A. Τοπικό μέγιστο (τοπικό ελάχιστο) παρουσιάζει η f στο X_0 όταν και μόνον όταν

υπάρχει ανοικτό διάστημα (α, β) $\subset$ A με $X_0 \in$ (α, β)

και

$f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0)))$ V $\chi \in$ (α, β).

Ή ειδικότερα, όταν και μόνον όταν

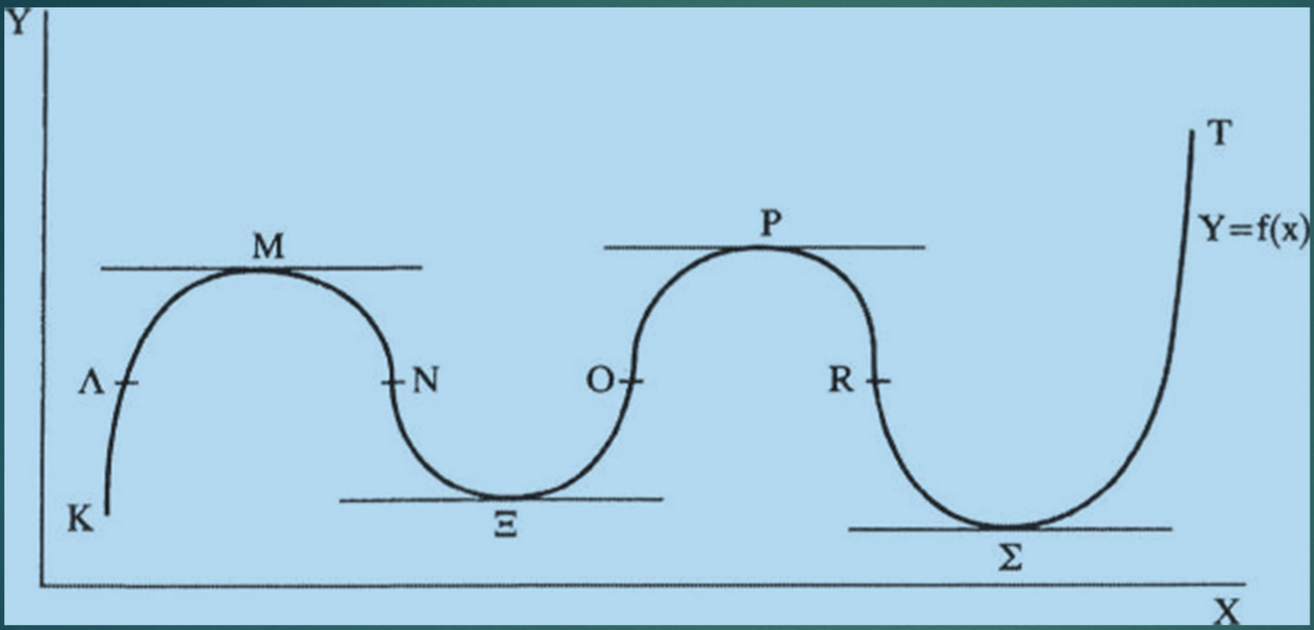
υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε V $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ είναι $f(x) \leq f(x0)$ $(f(x) \geq f(x0))$.

Ο πραγματικός αριθμός $f(x_0)$ ονομάζεται **τοπικό μέγιστο** (**τοπικό ελάχιστο**) της συνάρτησης f.

Το τοπικό μέγιστο και το τοπικό ελάχιστο αποτελούν τα **ακρότατα της συνάρτησης**.

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES
SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

ENOTHTA 3



Συνθήκες για Ακρότατα

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Τοπικό Μέγιστο έχω όταν

$$\frac{dY}{dX} = 0$$ ΑΝΑΓΚΑΙΑ ΣΥΝΘΗΚΗ

$$\frac{d^2Y}{dX^2} < 0$$ ΕΠΑΡΚΗΣ ΣΥΝΘΗΚΗ

Τοπικό Ελάχιστο έχω όταν

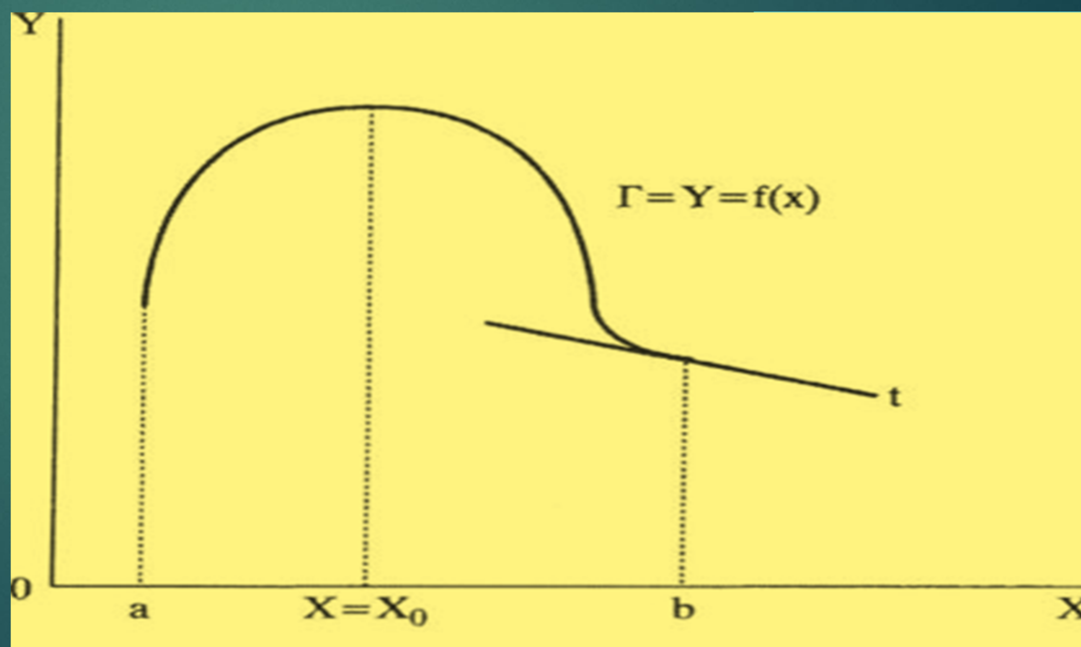
$$\frac{dY}{dX} = 0$$ ΑΝΑΓΚΑΙΑ ΣΥΝΘΗΚΗ

$$\frac{d^2Y}{dX^2} > 0$$ ΕΠΑΡΚΗΣ ΣΥΝΘΗΚΗ

Συνθήκες για Ακρότατα

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Τα παραπάνω ισχύουν όταν το X_0 ΔΕΝ συμπίπτει με τα άκρα της συνάρτησης.



ΕΝΟΤΗΤΑ 3

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΙΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΕΣΟΔΩΝ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Έστω η συνάρτηση ζήτησης μιας επιχείρησης έχει τη μορφή: $P = k - a \cdot Q$

Τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης είναι: $TR = P \cdot Q$

$$TR = (k - a \cdot Q) \cdot Q = k \cdot Q - a \cdot Q^2$$

Θα έχω τοπικό μέγιστο, όταν

$$\frac{d(TR)}{dQ} = 0 \quad \text{Αναγκαία συνθήκη.}$$

$$\frac{d^2(TR)}{dQ^2} < 0 \quad \text{Επαρκής συνθήκη.}$$

ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΕΣΟΔΩΝ

$$TR = k \cdot Q - a \cdot Q^2$$

Συνεπώς, $$\frac{d(TR)}{dQ} = (k \cdot Q - a \cdot Q^2) = k - 2aQ = 0$$

$$\rightarrow \; Q = \frac{k}{2a}$$

και

$$\frac{d^2(TR)}{dQ^2} = \frac{d^2(k \cdot Q - a \cdot Q^2)}{dQ^2} = -2a < 0$$

Άρα, η (TR) παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο στο $Q = \frac{k}{2a}$

ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΕΣΟΔΩΝ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Διαγραμματικά

Εφόσον (TR) είναι μέγιστο, όταν το $Q = \frac{k}{2a}$,

η ελαστικότητα της ζήτησης θα είναι:

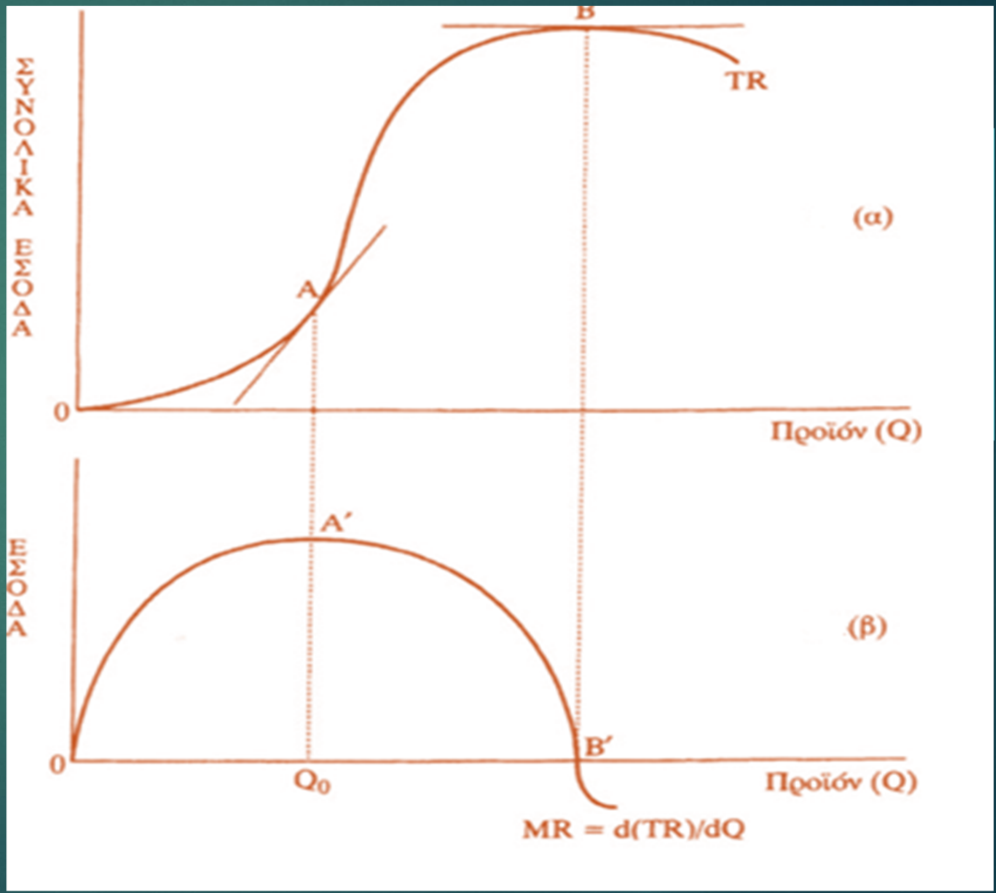
$$E_d = \left(\frac{P}{Q}\right)\left(\frac{dQ}{dP}\right)$$

$$P = k - aQ$$

$$\frac{dQ}{dP} = -\frac{1}{a}$$

$$E_d = \left[\frac{k - aQ}{Q}\right] * \left(-\frac{1}{a}\right)$$

$$Q = \frac{k}{2a} \Rightarrow E_d = \frac{k - a * \frac{k}{2a}}{\frac{k}{2a}} * \left(-\frac{1}{a}\right) = -1$$



ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΜΕΣΟ ΚΟΣΤΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Έστω η συνάρτηση κόστους μιας επιχείρησης είναι:

$$TC = k + aQ + bQ^2$$

όπου, k, a, και b > 0

Μέσο Κόστος

$$AC = \frac{TC}{Q}$$

$$AC = \frac{k + aQ + bQ^2}{Q} = \frac{k}{Q} + a + b \cdot Q$$

Εύρεση ελάχιστου:

$$\frac{d(AC)}{dQ} = 0 \quad \text{Αναγκαία συνθήκη}$$

$$\frac{d^2(AC)}{dQ^2} > 0 \quad \text{Επαρκής συνθήκη}$$

ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΜΕΣΟ ΚΟΣΤΟΣ

$$\frac{d(AC)}{dQ} = \frac{d\left(\frac{k}{Q} + \mathrm{a} + \mathrm{b}\cdot \mathrm{Q}\right)}{dQ} = \frac{d(\mathrm{k}\cdot Q^{-1} + \mathrm{a} + \mathrm{b}\cdot \mathrm{Q})}{dQ} = -\mathrm{k} \cdot Q^{-2} + \mathrm{b} = 0$$

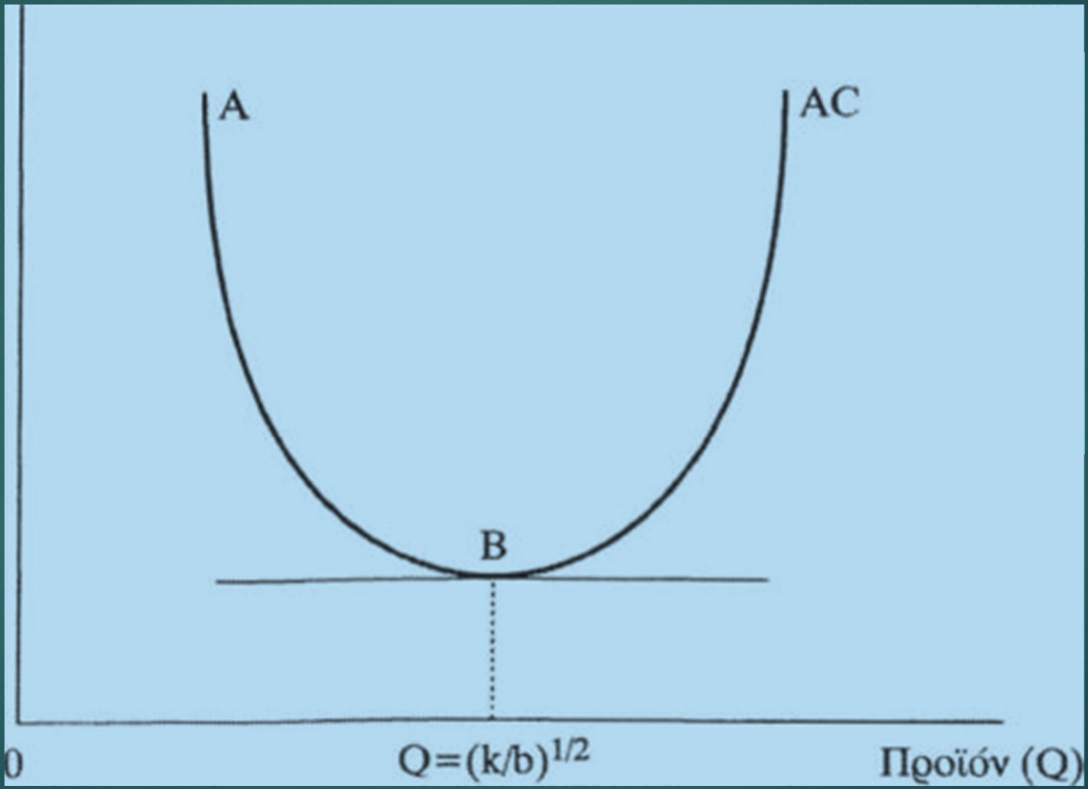
$$\Rightarrow \frac{k}{Q^2} = \mathrm{b} \Rightarrow Q^2 = \frac{k}{b} \Rightarrow \boxed{\mathrm{Q} = \left(\frac{k}{b}\right)^{1/2}}$$

$$\frac{d^2(AC)}{dQ^2} = \frac{d(-\mathrm{k} \cdot Q^{-2} + \mathrm{b})}{dQ} = -(-2 \cdot \mathrm{k} \cdot Q^{-3}) = \underline{\frac{2k}{Q^3} > 0 \text{ για κάθε } \mathrm{Q} > 0}$$

Άρα, το μέσο κόστος (AC) αποκτά τη μικρότερη τιμή, όταν $Q = \left(\frac{k}{b}\right)^{1/2}$

ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΜΕΣΟ ΚΟΣΤΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3



PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES
SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΕΡΔΩΝ ΜΟΝΟΠΩΛΙΟΥ

Κέρδος (Π) μιας μονοπωλιακής επιχείρησης

$$\Pi = TR - TC$$

όπου TR: συνολικά έσοδα

TC: συνολικό κόστος

Έστω ότι η συνάρτηση του συνολικού κόστους: $TC = k + a\cdot Q + b\cdot Q^2$

,με $k, a, b, \delta, \gamma > 0$

και η συνάρτηση ζήτησης: $P = \delta - \gamma\cdot Q$

Τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης θα είναι: $TR = P\cdot Q$

$$TR = Q(\delta - \gamma Q) = \delta\cdot Q - \gamma\cdot Q^2$$

$$\Pi = TR - TC = \delta\cdot Q - \gamma\cdot Q^2 - (k + a\cdot Q + b\cdot Q^2) = \delta\cdot Q - \gamma\cdot Q^2 - k - a\cdot Q - b\cdot Q^2$$

$$\boxed{\Pi = -(b+\gamma)\cdot Q^2 + (\delta - \alpha)\cdot Q - k}$$

ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΕΡΔΩΝ ΜΟΝΟΠΩΛΙΟΥ

$$\Pi = -(b+\gamma)\cdot Q^2 + (\delta-\alpha)\cdot Q - k$$

Μέγιστο κέρδος, όταν:

$$\frac{d\Pi}{dQ} = 0 \qquad \text{Αναγκαία συνθήκη}$$

$$\frac{d^2\Pi}{dQ^2} < 0 \qquad \text{Επαρκής συνθήκη}$$

$$\frac{d\Pi}{dQ} = \frac{d(-(b+\gamma)\cdot Q^2 + (\delta-\alpha)\cdot Q - k)}{dQ} = -2\cdot(b+\gamma)\cdot Q + (\delta-\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2\cdot(b+\gamma)\cdot Q = (\delta-\alpha) \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{\delta-a}{2(b+\gamma)}$$

ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΕΡΔΩΝ ΜΟΝΟΠΩΛΙΟΥ

$$\Pi = -(b+\gamma)\cdot Q^2 + (\delta-\alpha)\cdot Q - k$$

$$\frac{d^2\Pi}{dQ^2} = \frac{d^2(-(b+\gamma)\cdot Q^2 + (\delta-\alpha)\cdot Q - k)}{dQ^2} = \frac{d\{-2\cdot(b+\gamma)\cdot Q + (\delta-\alpha)\}}{dQ} = -2\cdot(b+\gamma)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\Pi}{dQ^2} = -2\cdot(b+\gamma) \quad < 0$$

Η μονοπωλιακη επιχείρηση ***μεγιστοποιεί*** *το κέρδος για* $Q = \dfrac{\delta-a}{2(b+\gamma)}$

ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΕΡΔΩΝ ΜΟΝΟΠΩΛΙΟΥ

$$\Pi = -(b+\gamma)\cdot Q^2 + (\delta-\alpha)\cdot Q - k$$

$$\frac{d^2\Pi}{dQ^2} = \frac{d^2(-(b+\gamma)\cdot Q^2 + (\delta-\alpha)\cdot Q - k)}{dQ^2} = \frac{d\{-2\cdot(b+\gamma)\cdot Q + (\delta-\alpha)\}}{dQ} = -2\cdot(b+\gamma)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\Pi}{dQ^2} = -2\cdot(b+\gamma) \quad < 0$$

Η μονοπωλιακη επιχείρηση ***μεγιστοποιεί*** *το κέρδος για* $Q = \dfrac{\delta-a}{2(b+\gamma)}$

ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΕΡΔΩΝ ΜΟΝΟΠΩΛΙΟΥ

Εναλλακτικά,

$TC = k + a \cdot Q + b \cdot Q^2$

$TR = \delta \cdot Q - \gamma \cdot Q^2$

Μεγιστοποίηση κερδών του μονοπωλητή όταν:

$$MR = MC$$

$$\left.\begin{aligned} MR &= \frac{d(TR)}{dQ} = \frac{d(\delta \cdot Q - \gamma \cdot Q^2)}{dQ} = -2\gamma Q + \delta \\ MC &= \frac{d(TC)}{dQ} = \frac{d(k + a \cdot Q + b \cdot Q^2)}{dQ} = 2bQ + a \end{aligned}\right\} -2\gamma Q + \delta = 2bQ + a \Rightarrow \delta - a = 2bQ + 2\gamma Q$$

$$\Rightarrow Q = \frac{\delta - a}{2(b+\gamma)}$$

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES
SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΕΡΔΩΝ ΜΟΝΟΠΩΛΙΟΥ..ΜΕ ΦΟΡΟ

Η επιβολή ενός εφάπαξ φόρου T, θα μεταβάλει τη συνάρτηση του κόστους ως εξής:

$TC = k+aQ+bQ^2+T \rightarrow TC=(k+T)+aQ+bQ^2$

Η παραγόμενη ποσότητα Q αποκτά την ίδια τιμή

$$Q=\frac{\delta-a}{2(b+\gamma)}$$

Όμως, η νέα συνάρτηση του κέρδους: $\Pi_T = TR - TC$

$TR = P \cdot Q$

$P = \delta - \gamma \cdot Q$

$$\boxed{\Pi_T=\delta Q-\gamma Q^2-[(k+T)+aQ+bQ^2]}$$

ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΕΡΔΩΝ ΜΟΝΟΠΩΛΙΟΥ..ΜΕ ΦΟΡΟ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

$$\Pi = \delta\cdot Q - \gamma\cdot Q^2 - [k + a\cdot Q + b\cdot Q^2]$$

$$\Pi_T = \delta Q - \gamma Q^2 - [(k+T) + aQ + bQ^2]$$

Τι γίνεται, όμως, όταν ο φόρος (t) που επιβάλλεται, μεταβάλλεται ανάλογα με τις μεταβολές στην παραγωγή;

→Μεταβολή της παραγόμενης ποσότητα (Q)
→Μεταβολή στα κέρδη της επιχείρησης (Π)

ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΕΡΔΩΝ ΜΟΝΟΠΩΛΙΟΥ..ΜΕ ΦΟΡΟ

Έστω ότι $TC = k+a\cdot Q+b\cdot Q^2+t\cdot Q$

Τα κέρδη της επιχείρησης $\Pi t = \delta Q - \gamma Q^2 - [k+tQ+aQ+bQ^2]$

→ $\boxed{\Pi t=-(\gamma+b)Q^2+(\delta-a-t)Q-k}$

Τα κέρδη της επιχείρησης θα μεγιστοποιούνται, όταν:

$\frac{d\Pi t}{dQ} = 0$ Αναγκαία συνθήκη

$\frac{d^2\Pi t}{dQ^2} < 0$ Επαρκής συνθήκη

ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΕΡΔΩΝ ΜΟΝΟΠΩΛΙΟΥ..ΜΕ ΦΟΡΟ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

$$\frac{d\Pi t}{dQ} = \frac{d[-(\gamma+b)Q^2+(\delta-a-t)Q-k]}{dQ} = -2(\gamma+b)Q+\delta - a - t = 0 \Rightarrow Q=\frac{\delta-a-t}{2(\gamma+b)}$$

$$\frac{d^2\Pi t}{dQ^2} = \frac{d^2[-(\gamma+b)Q^2+(\delta-a-t)Q-k]}{dQ^2} = -2(\gamma+b) < 0$$

Τα συνολικά έσοδα από το φόρο είναι: $T = t \cdot Q$

Από προηγούμενα βρέθηκε ότι η παραγόμενη ποσότητα μετά την επιβολή του φόρου t είναι:

$$Q = \frac{(\delta - a - t)}{2(b+\gamma)}$$

Άρα,

$$T = t \cdot Q = t \cdot \frac{(\delta - a - t)}{2(b+\gamma)} \Rightarrow T = \frac{(\delta t - at - t^2)}{2(b+\gamma)}$$

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES
SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΕΣΟΔΩΝ ΤΩΝ ΦΟΡΩΝ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

$$T = \frac{(\delta t - at - t^2)}{2(b+\gamma)}$$

Τα φορολογικά έσοδα μεγιστοποιούνται όταν:

$\frac{dT}{dt} = 0$ Αναγκαία συνθήκη

$\frac{d^2T}{dt^2} < 0$ Επαρκής συνθήκη

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dT}{dt} = \frac{(\delta - a - 2t)}{2(b+\gamma)} = 0 \rightarrow t = \frac{\delta - \alpha}{2} \\ &\frac{d^2T}{dt^2} = -\frac{2}{2(b+\gamma)} = -\frac{1}{b+\gamma} < 0 \end{aligned}\right\}$$

Τα φορολογικά έσοδα της κυβέρνησης είναι μέγιστα για

$$t = \frac{\delta - \alpha}{2}$$

Οπότε, $Q = \frac{(\delta - a - t)}{2(b+\gamma)} = \frac{(\delta - a - \frac{\delta - \alpha}{2})}{2(b+\gamma)} \rightarrow$ $Q = \frac{(\delta - a)}{4(b+\gamma)}$

και $T = t \cdot Q = \frac{\delta - \alpha}{2} \cdot \frac{(\delta - a)}{4(b+\gamma)} \rightarrow$ $T = \frac{(\delta - \alpha)^2}{8(b+\gamma)}$

ΑΣΚΗΣΗ

Μια οικογενειακή επιχείρηση έχει πάγιο κόστος 180 χιλ. Ευρώ ανά εβδομάδα ενώ το εβδομαδιαίο μεταβλητό κόστος δίνεται από την ακόλουθη συνάρτηση:

$$TVC = 3Q^2 - 42Q$$

όπου Q η παραγόμενη ποσότητα ανά εβδομάδα.

Η συνάρτηση της ζήτησης για οποιαδήποτε εβδομάδα του χρόνου δίνεται από την ακόλουθη συνάρτηση:

$$P = 26 - 0{,}8Q$$

όπου P είναι η τιμή σε χιλιάδες ευρώ κατά 100 μονάδες παραγωγής.

ΑΣΚΗΣΗ

Ζητείται:

α) Να βρεθεί η εβδομαδιαία παραγωγή, η οποία ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος (AC) ανά εβδομάδα και στη συνέχεια να προσδιοριστεί το εβδομαδιαίο συνολικό κόστος (TC) και το μέσο κόστος (AC) σ’ αυτό το επίπεδο παραγωγής.

ΛΥΣΗ

Το εβδομαδιαίο συνολικό κόστος ισούται με το εβδομαδιαίο μεταβλητό κόστος συν το πάγιο κόστος.

Δηλαδή,

$$TC = TVC + FC \rightarrow TC = 3Q^2 - 42Q + 180$$

Το μέσο εβδομαδιαίο κόστος είναι:

$$AC = \frac{TC}{Q} \rightarrow AC = 3Q-42 + \frac{180}{Q}$$

Για ACmin θα πρέπει:

$\frac{dAC}{dQ}$ =0 Αναγκαία συνθήκη

$\frac{d^2AC}{dQ^2}$>0 Επαρκής συνθήκη

ΛΥΣΗ

$\frac{dAC}{dQ} = 0 \rightarrow \frac{d\left(3Q - 42 + \frac{180}{Q}\right)}{dQ} = 0 \quad \rightarrow \quad 3 - \frac{180}{Q^2} = 0$

$Q^2 = 60 \quad \rightarrow \quad Q = \begin{matrix} 7{,}745 \text{ δεκτή} \\ -7{,}745 \text{ απορρίπτεται} \end{matrix}$

$\frac{d^2AC}{dQ^2} > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d\left(3 - \frac{180}{Q^2}\right)}{dQ} > 0 \quad \rightarrow \quad -(-2 \cdot 60Q^{-3}) > 0$ για $Q = 7{,}745$ ισχύει.

Επομένως, η εβδομαδιαία παραγωγή που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος AC είναι ίση με $Q = 7{,}745$.

ΛΥΣΗ

Άρα, για $Q = 7{,}745 \rightarrow$ $TC = 3Q^2 - 42Q + 180$

$TC=3\cdot(7{,}745)^2 - 42\cdot(7{,}745) + 180 \rightarrow$

$TC = 179{,}955 - 325{,}29 + 180 \rightarrow$

$TC = 34{,}665$

και $AC = \frac{TC}{Q} \rightarrow$ $AC = \frac{34{,}665}{7{,}745} \rightarrow$ $AC = 4{,}475$

ΑΣΚΗΣΗ

Ζητείται:

β) Να βρεθεί η εβδομαδιαία παραγωγή και η τιμή (P) που μεγιστοποιεί τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης.

ΛΥΣΗ

Τα εβδομαδιαία έσοδα δίνονται από:

$$TR = P \cdot Q \rightarrow TR = (26 - 0{,}8Q) \cdot Q \rightarrow TR = 26Q - 0{,}8Q^2$$

Για να μεγιστοποιούνται τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης θα πρέπει:

$$\frac{dTR}{dQ} = 0 \quad \text{Αναγκαία συνθήκη}$$

$$\frac{d^2TR}{dQ^2} < 0 \quad \text{Επαρκής συνθήκη}$$

Άρα,

$$\frac{dTR}{dQ} = 0 \rightarrow \frac{d(26Q - 0{,}8Q^2)}{dQ} = 0 \rightarrow 26 - 1{,}6Q = 0 \rightarrow Q = 16{,}25.$$

και $\frac{d^2TR}{dQ^2} < 0 \rightarrow -1{,}6 < 0$, που ισχύει.

Άρα, για Q = 16,25, **μεγιστοποιούνται** τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης.

Και η τιμή ισούται με: $P = 26 - 0{,}8 * 16{,}25 \rightarrow P = 13$

ΑΣΚΗΣΗ

Ζητείται:

γ) Να βρεθεί η εβδομαδιαία παραγωγή και η τιμή που μεγιστοποιεί τα κέρδη της επιχείρησης. Να προσδιοριστεί επίσης το επίπεδο της παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη της επιχείρησης. Να γίνει διαγραμματική παρουσίαση του συνολικού κόστους, των συνολικών εσόδων και του κέρδους της επιχείρησης.

ΛΥΣΗ

Τα κέρδη δίνονται από: $\Pi = TR - TC \rightarrow \Pi = 26Q - 0{,}8Q^2 - 3Q^2 + 42Q - 180 \rightarrow \Pi = -3{,}8Q^2 + 68Q - 180$

Για Πmax $\frac{d\Pi}{dQ} = 0$ Αναγκαία συνθήκη

$\frac{d^2\Pi}{dQ^2} < 0$ Επαρκής συνθήκη

Συνεπώς,

$$\frac{d\Pi}{dQ} = 0 \rightarrow -7{,}6Q + 68 = 0 \rightarrow Q = \frac{68}{7{,}6} \rightarrow Q = 8{,}947$$

Και $\frac{d^2\Pi}{dQ^2} < 0 \rightarrow -7{,}6 < 0$ ικανοποιείται η επαρκής συνθήκη.

Άρα, για να μεγιστοποιούνται τα κέρδη της επιχείρησης, θα πρέπει Q = 8,947.

Και η τιμή ισούται με:

$$P = 26 - 0{,}8 * 8{,}947 \rightarrow P = 18{,}84$$

ΛΥΣΗ

Συνεπώς, Q = 8,947·100 = 894,7 μονάδες παραγωγής ανά εβδομάδα

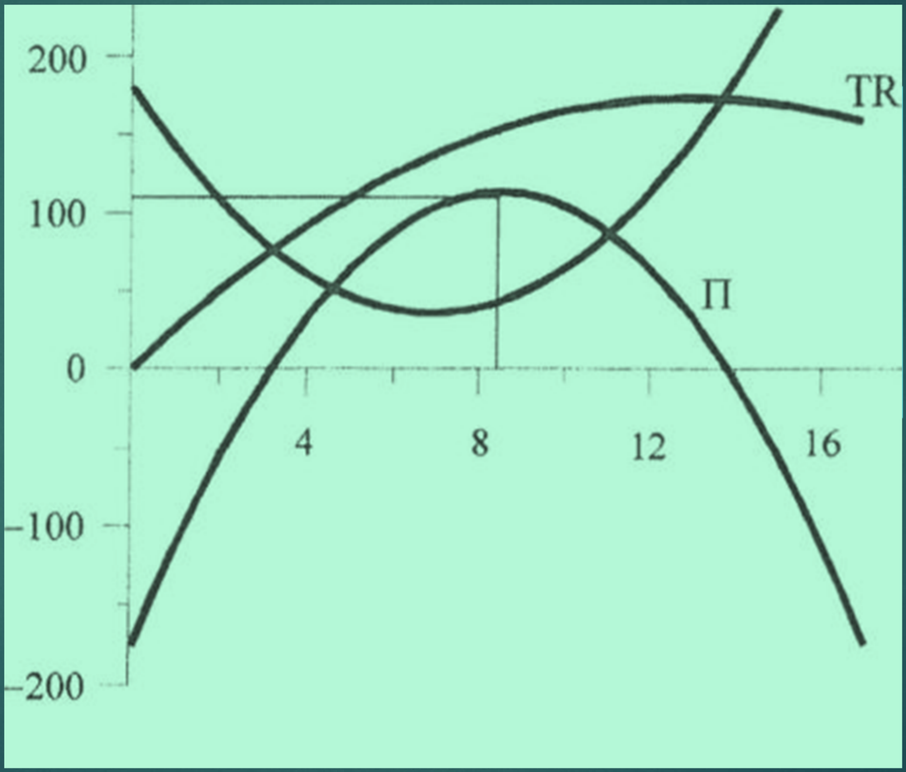
και P = 18,84 ανά 100 μονάδες παραγωγής.

Σ' αυτό το επίπεδο παραγωγής:

$$\Pi_{max} = -3{,}8 \cdot (8{,}947)^2 + (68 \cdot 8{,}947) - 180 \rightarrow \Pi_{max} = 124{,}211$$

ΛΥΣΗ

Διαγραμματικά



ΑΣΚΗΣΗ

Ζητείται:

δ) Αν η ζήτηση της επιχείρησης πέσει κατά 20% σε οποιοδήποτε επίπεδο τιμών, να προσδιοριστεί η επίπτωση στα κέρδη της επιχείρησης. Να γίνει διαγραμματική παρουσίαση.

ΛΥΣΗ

Η νέα ποσότητα προϊόντος είναι:

$$Q' = 0{,}80 \cdot Q \rightarrow Q = Q'/0{,}8 \quad \text{και} \quad P = 26 - 0{,}8 \cdot Q'/0{,}8 \rightarrow P = 26 - Q'$$

Τα κέρδη: $\Pi = TR - TC$

Όμως, τα συνολικά έσοδα τώρα είναι:

$$TR = P \cdot Q' \rightarrow TR = 26Q' - Q'^2$$

Ενώ η συνάρτηση του συνολικού κόστους παραμένει η ίδια. Δηλαδή: $TC = 3Q'^2 - 42Q' + 180$

Άρα,

$$\Pi = 26Q' - Q'^2 - 3Q'^2 + 42Q' - 180 \rightarrow \Pi = -4Q'^2 + 68Q' - 180$$

Για Πmax:

$$\frac{d\Pi}{dQ'} = 0 \quad \text{Αναγκαία συνθήκη}$$

$$\frac{d^2\Pi}{dQ'^2} < 0 \quad \text{Επαρκής συνθήκη}$$

ΛΥΣΗ

$\frac{d\Pi}{dQ'}$ =0 → -8Q΄+68=0 → Q΄= $\frac{68}{8}$ → Q΄=8,5

$\frac{d^2\Pi}{dQ'^2}$ = -8 < 0 , που ισχύει

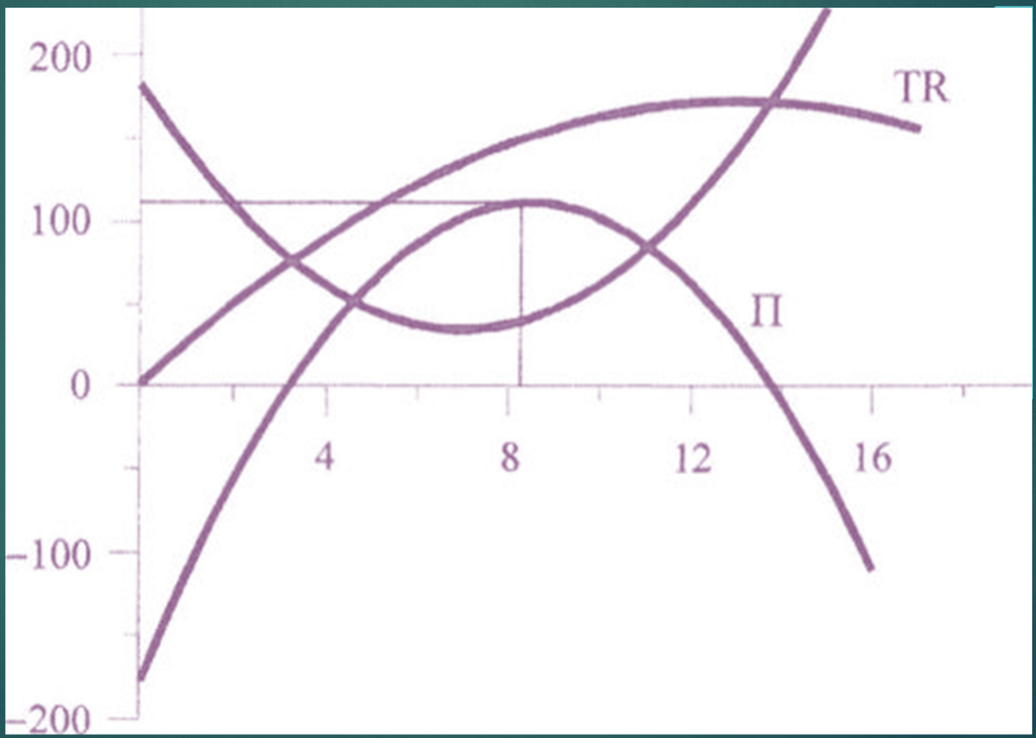
Άρα Πmax όταν Q' = 8,5 και P = 26 - 8,5 → P= 17,5

$\Pi_{max} = -4(8,5)^2 + (68 \cdot 8,5) - 180$ → $\Pi_{max} = 109$

Συνεπώς, μειώνονται και τα κέρδη κατά *124,211 - 109 = 15,211*

ΛΥΣΗ

Διαγραμματικά



ΑΣΚΗΣΗ

Ζητείται:

ε) Αν ο επιχειρηματίας αποφασίσει να αλλάξει την τιμή του προϊόντος από εκείνη που μεγιστοποιεί το κέρδος στη βάση των δεδομένων του (δ) ερωτήματος, βρείτε το μέγεθος της μείωσης των κερδών συναρτήσει της μεταβολής της τιμής.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι η τιμή είναι ίση με $P = 17{,}5$ (από το προηγούμενο ερώτημα).

Υποθέτω ότι ο επιχειρηματίας θέλει να αλλάξει την τιμή του προϊόντος κατά x (όπου $x \neq 0$).

$$P' = 17{,}5 + x$$

και η νέα συνάρτηση ζήτησης η: $P' = 26 - Q \rightarrow 17{,}5 + x = 26 - Q \rightarrow Q = 26 - 17{,}5 - x \rightarrow Q = 8{,}5 - x$

Η συνάρτηση συνολικών εσόδων και συνάρτηση συνολικού κόστους:

$$\left.\begin{array}{l} TR = P \cdot Q \rightarrow TR = (17{,}5 + x)\cdot(8{,}5 - x) \rightarrow TR = 148{,}75 - 9x - x^2 \\ TC = 3Q^2 - 42Q + 180 \rightarrow TC = 3(8{,}5 - x)^2 - 42(8{,}5 - x) + 180 \\ \rightarrow TC = 3(72{,}25 - 17x + x^2) - 357 + 42x + 180 \rightarrow TC = 3x^2 - 9x + 39{,}75 \end{array}\right\}$$

$$\Pi = TR - TC \rightarrow \Pi = 148{,}75 - 9x - x^2 - 3x^2 + 9x - 39{,}75 \rightarrow \Pi = -4x^2 + 109$$

Επομένως, **όταν $x = 0$, τότε $\Pi = 109$** (Π_{max} από το δ)

ΑΣΚΗΣΗ

Ένας μονοπωλητής αντιμετωπίζει την παρακάτω συνάρτηση κόστους:

$$TC = \alpha Q^2 + \beta Q + \gamma, \qquad \alpha > 0 \text{ και } \gamma > \beta$$

Η αγοραία συνάρτηση ζήτησης είναι:

$$P = \gamma - \alpha Q^2$$

Να αποδειχθεί ότι η ποσότητα που μεγιστοποιεί τα κέρδη του μονοπωλητή είναι ίση με:

$$Q = \frac{\sqrt{\alpha^2 + 3a(\gamma - \beta)} - \alpha}{3\alpha}$$

ΛΥΣΗ

Τα συνολικά έσοδα:

$$TR = P \cdot Q \rightarrow TR = (\gamma - aQ^2)\cdot Q \rightarrow TR = \gamma Q - aQ^3$$

Οπότε,

$$\Pi = TR - TC \rightarrow \Pi = \gamma Q - aQ^3 - aQ^2 - \beta Q - \gamma \rightarrow$$
$$\Pi = - \alpha Q^3 - \alpha Q^2 + (\gamma - \beta)Q - \gamma$$

Για να μεγιστοποιούνται τα κέρδη:

$\frac{d\Pi}{dQ} = 0$ Αναγκαία συνθήκη

$\frac{d^2\Pi}{dQ^2} < 0$ Επαρκής συνθήκη

ΛΥΣΗ

$$\frac{d\Pi}{dQ} = \frac{d(-\alpha Q^3 - \alpha Q^2 + (\gamma-\beta)Q - \gamma)}{dQ} = 0 \rightarrow -3\alpha Q^2 - 2\alpha Q + (\gamma - \beta) = 0$$

Διακρίνουσα: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2\alpha)^2 - 4(-3\alpha)\cdot(\gamma - \beta)$

$$= 4\alpha^2 + 12\alpha(\gamma - \beta)$$

$$= 4\alpha[\alpha + 3(\gamma - \beta)] > 0$$ → γιατί $\alpha>0$ και $\gamma>\beta$

Άρα,

$$Q_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2\alpha \pm \sqrt{4\alpha[\alpha + 3(\gamma-\beta)]}}{2(-3\alpha)} = \frac{2\alpha \pm 2\sqrt{[\alpha^2 + 3\alpha(\gamma-\beta)]}}{-6\alpha} \rightarrow Q_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{[\alpha^2 + 3\alpha(\gamma-\beta)]}}{-3\alpha}$$

$$Q1 = \frac{\alpha + \sqrt{[\alpha^2 + 3\alpha(\gamma-\beta)]}}{-3\alpha}$$ Απορρίπτεται

$$Q2 = \frac{\alpha - \sqrt{[\alpha^2 + 3\alpha(\gamma-\beta)]}}{-3\alpha}$$

ΛΥΣΗ

Το Q που μεγιστοποιεί τα κέρδη του μονοπωλητή είναι η $Q_2 = \frac{\alpha - \sqrt{[\alpha^2 + 3\alpha(\gamma-\beta)]}}{-3\alpha}$

ή $Q = \frac{\sqrt{[\alpha^2 + 3\alpha(\gamma-\beta)]} - \alpha}{3\alpha}$

Για μεγιστοποίηση των κερδών του μονοπωλητή:

$\frac{d^2\Pi}{dQ^2} < 0 \rightarrow \frac{d^2(-\alpha Q^3 - \alpha Q^2 + (\gamma - \beta)Q - \gamma)}{dQ^2} = -6aQ - 2\alpha < 0 \rightarrow -6aQ < 2a$

$\rightarrow Q > -\frac{2\alpha}{6\alpha} \quad \rightarrow \quad Q > -\frac{1}{3}$

που ισχύει αφούτ η ποσότητα Q είναι θετική.

Άρα η ποσότητα που μεγιστοποιεί τα κέρδη του μονοπωλητή είναι:

$$Q = \frac{\sqrt{[\alpha^2 + 3\alpha(\gamma-\beta)]} - \alpha}{3\alpha}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Η καμπύλη ζήτησης για το προϊόν μιας επιχείρησης είναι: $Q = 1.000 - P$

Πόσες μονάδες προϊόντος πρέπει να πουλά η επιχείρηση για να μεγιστοποιεί τα έσοδά της.

ΛΥΣΗ

Η τιμή δίνεται από τη σχέση: $P = 1.000 - Q$

Τα έσοδα: $TR = P \cdot Q \rightarrow TR = (1.000 - Q)Q \rightarrow TR = 1.000Q - Q^2$

Για να μεγιστοποιούνται τα έσοδα της επιχείρησης θα πρέπει:

$\frac{dTR}{dQ} = 0$ Αναγκαία συνθήκη

$\frac{d^2TR}{dQ^2} < 0$ Επαρκής συνθήκη

$\frac{dTR}{dQ} = 0 \rightarrow 1000 - 2Q = 0 \rightarrow Q = 500$

$\frac{d^2TR}{dQ^2} = \frac{d^2(1.000Q - Q^2)}{dQ^2} = -2 < 0$ που ισχύει.

Επομένως, τα έσοδα μεγιστοποιούνται όταν Q = 500.

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ