Πίνακας Περιεχομένων

[1. Η διαχρονική αξία του χρήματος 3](#_Toc166409115)

[1.1. Οικονομικά μαθηματικά 3](#_Toc166409116)

[1.1.1. Βασικές Γνώσεις Μαθηματικών 3](#_Toc166409117)

[1.1.2. Η διαχρονική Αξία του χρήματος και ο εκτοκισμός 5](#_Toc166409118)

[1.1.3. Ετήσιο Πραγματικό Επιτόκιο ή Ετήσια Πραγματική Επιβάρυνση (ΕΠΕ) 9](#_Toc166409119)

[1.2. Ράντες (Annuities) 9](#_Toc166409120)

[1.3. Ερωτήσεις – Ασκήσεις 11](#_Toc166409121)

[1.3.1. Ερωτήσεις 11](#_Toc166409122)

[*1.1.1* *Ασκήσεις* 12](#_Toc166409123)

# Η διαχρονική αξία του χρήματος

Στη θεματική ενότητα αυτή εξετάζονται οι Ταμειακές Ροές, Επιτόκια, Τόκος, Ανατοκισμός, Προεξόφληση, Παρούσα και Μελλοντική Αξία, Προκαταβλητέες και Ληξιπρόθεσμες Ράντες, Χρεολυτικά και Τοκοχρεωλυτικά Δάνεια, Παρούσα και Μελλοντική Αξία άνισων ταμειακών ροών. Όλα τα παραπάνω θέματα αποτελούν τη βάση για την τεχνική ανάλυση της χρηματοδότησης των επιχειρήσεων.

# Οικονομικά μαθηματικά

# Βασικές Γνώσεις Μαθηματικών

Δυνάμεις

* 1. *Πολλαπλασιασμός ν παραγόντων*
	2. *Πράξεις με δυνάμεις*
		1.

Όρια και Γεωμετρικές Πρόοδοι

1. *Όρια*
2. *Γεωμετρική Πρόοδος*

Κάθε αριθμητική σειρά της μορφής :

Καλείται γεωμετρική πρόοδος και το άθροισμά της ισούται με :

Λογάριθμοι

1. *Εισαγωγικά στοιχεία:*

Με τους λογαρίθμους η παρακάτω σχέση μπορεί να γραφεί και ως:

 άρα γενικά, ισχύει:

Επίσης, ισχύει ότι:

1. *Σημαντικοί κανόνες που ισχύουν για τους λογαρίθμους:*
2. *Σχέσεις λογαρίθμων και δυνάμεων:*
3. *Ορισμοί για συμβολισμούς:*
4. *Χρήση των λογαρίθμων:*
5. Με τους λογαρίθμους μπορούμε να λύνουμε εξισώσεις με τους αγνώστους να βρίσκονται στους εκθέτες π.χ.

ή

ή λύστε ως προς y την εξίσωση

1. Οι λογάριθμοι χρησιμοποιούνται και επί ανισοτήτων π.χ.

1. Οι λογάριθμοι χρησιμοποιούνται στους υπολογισμούς της διαχρονικής αξίας χρήματος

Από τον τύπο του ανατοκισμού μπορούμε να λύσουμε ως προς το χρόνο που βρίσκεται στη δύναμη π.χ.

Σε πόσο χρόνο με ετήσιο ανατοκισμό και επιτόκιο 10% αρχικό κεφάλαιο 10.000 ευρώ θα γίνει 20.000 αντικαθιστώντας στον παραπάνω τύπο:

Ο τύπος του πλήρους ανατοκισμού μπορεί να λυθεί και ως προς το επιτόκιο και ως προς το χρόνο

1. Άλλες περιπτώσεις χρήσης λογαρίθμων, ποιό το x όταν:

Γενικά:

 .

# Η διαχρονική Αξία του χρήματος και ο εκτοκισμός

Απλός εκτοκισμός

*Ορισμοί:*

* Ο *Τόκος* υπολογίζεται από τον πολλαπλασιασμό ενός χρηματικού κεφαλαίου με το επιτόκιο και με την χρονική περίοδο (έτη) στην οποία αντιστοιχούν οι τόκοι.
* *Επιτόκιο* είναι η απόδοση ενός χρηματικού κεφαλαίου 100 Ευρώ για διάστημα ενός έτους. Το επιτόκιο εκφράζεται ως ποσοστό επί τοις εκατό (%) π.χ. επιτόκιο 10 % σημαίνει ότι για 100 ευρώ η απόδοσή τους σε τόκο για ένα χρόνο ανέρχεται στα 10 ευρώ.
* Η *Μελλοντική Αξία Κεφαλαίου* είναι η αξία ενός χρηματικού κεφαλαίου σε μία μελλοντική χρονική στιγμή. Ορίζεται ως το Αρχικό Κεφάλαιο συν τους τόκους που θα προκύψουν για την περίοδο από την παρούσα χρονική στιγμή μέχρι την μελλοντική χρονική στιγμή.
* Η *Παρούσα Αξία Κεφαλαίου* ταυτίζεται με ένα Αρχικό χρηματικό κεφάλαιο, δηλαδή είναι η αξία ενός χρηματικού κεφαλαίου σήμερα.
* *Προεξόφληση*, είναι η διαδικασία εύρεσης της παρούσας αξίας ενός χρηματικού κεφαλαίου όταν είναι γνωστή η Μελλοντική του Αξία.

*Υπολογισμός τόκου:*

*Υπολογισμός Μελλοντικής Αξίας:*

Όπου: : Αρχικό κεφάλαιο

 : Μελλοντικό κεφάλαιο

 : Επιτόκιο

 : Έτη Εκτοκισμού

Όταν η χρονική διάρκεια είναι μικρότερη του έτους π.χ. m < 1 έτος ή 2 εξάμηνα ή 3 τετράμηνα ή 4 τρίμηνα ή 12 μήνες ή 52 εβδομάδες ή 365 ημέρες, τότε το n αντικαθίσταται με το κλάσμα m (σε εξάμηνα ή τετράμηνα ή τρίμηνα ή μήνες ή εβδομάδες ή ημέρες) / (2 εξάμηνα ή 3 τετράμηνα ή 4 τρίμηνα ή 12 μήνες ή 52 εβδομάδες ή 365 ημέρες).

Έστω ότι θέλουμε να τοκίσουμε για 1 εξάμηνο τότε n=1 (εξάμηνο) / 2 (εξάμηνα που αποτελούν το έτος).

Έστω ότι θέλουμε να τοκίσουμε για 3 εξάμηνα τότε n=3 (εξάμηνα) / 2 (εξάμηνα που αποτελούν το έτος).

Έστω ότι θέλουμε να τοκίσουμε για 273 ημέρες τότε n= 273(ημέρες) / 365 (ημέρες που αποτελούν το έτος).

Έστω ότι θέλουμε να τοκίσουμε για 7 τετράμηνα τότε n=7 (τετράμηνα ) / 3 (τετράμηνα που αποτελούν το έτος) κοκ.

Ο Αριθμός που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του Αρχικού Κεφαλαίου με τον χρόνο όπως αναφέρθηκε παραπάνω, δηλαδή το ποσό που εάν πολλαπλασιαστεί με το επιτόκιο θα μας δώσει τους τόκους καλείται στην Τραπεζική Πρακτική, *Τοκάριθμος*.

*Υπολογισμός Παρούσας Αξίας:*

*Υπολογισμός Επιτοκίου και Χρόνου εκτοκισμού:*

Ανατοκισμός

*Ορισμοί:*

* Ο *Ανατοκισμός* είναι η διαδικασία κατά την οποία οι τόκοι μιας περιόδου προστίθενται στο κεφάλαιο για να υπολογισθούν οι τόκοι της επόμενης περιόδου.
* *Περίοδοι Ανατοκισμού* μπορεί να είναι οι οποιεσδήποτε χρονικές περίοδοι κατά τις οποίες οι τόκοι γίνονται κεφάλαιο. Οι περίοδοι ανατοκισμού διακρίνονται σε:
* *Ετήσιος Ανατοκισμός*, οι τόκοι κάθε έτους προστίθενται στο κεφάλαιο και υπολογίζονται οι τόκοι του επομένου έτους επί του νέου κεφαλαίου και όχι επί του αρχικού.
* *Ανατοκισμός εντός του έτους, εξαμηνιαίος, τετραμηνιαίος, τριμηνιαίος, μηνιαίος εβδομαδιαίος ημερήσιος ανατοκισμός.* Οι περίοδοι ανατοκισμού, εντός του έτους, είναι αντίστοιχα 2,3,4,12,52,365.
* *Ανατοκισμός μεγαλύτερος του έτους, διετής τριετής τετραετής κο*κ.
* *Προεξόφληση με ανατοκισμό*, είναι η διαδικασία εύρεσης της παρούσας αξίας ενός χρηματικού κεφαλαίου όταν είναι γνωστή η Μελλοντική του Αξία και ισχύει η διαδικασία του ανατοκισμού.

*Υπολογισμός Μελλοντικής Αξίας με Ανατοκισμό:*

*Με ετήσιο Ανατοκισμό* πχ για 4 έτη τότε:

Αντικαθιστώντας την (9) στην (8) και μετά στην (7) και μετά στην (6) έχουμε:

Γενικεύοντας την (10) για n έτη έχουμε:

*Με μικρότερο του έτους Ανατοκισμό* π.χ. για m=(2 ή 3 ή 4 ή 12 ή 52 ή 365) περιόδους εντός του έτους και για n έτη τότε διαιρούμε το επιτόκιο με τις περιόδους ανά έτος για να βρούμε το επιτόκιο που ισχύει για τη περίοδο και πολλαπλασιάζουμε τα έτη με τις περιόδους ανά έτος για να βρούμε τις συνολικές περιόδους που θα εκτοκισθεί το αρχικό κεφάλαιο και έτσι:

*Με μεγαλύτερο του Ανατοκισμό* π.χ. ανά m=(2 έτη ή 3 έτη ή 4 έτη) έτη και για n συνολικά έτη τότε πολλαπλασιάζουμε το επιτόκιο με τα έτη ανατοκισμού για να βρούμε το επιτόκιο που ισχύει για τα έτη ανατοκισμού και διαιρούμε τα έτη με τα έτη ανατοκισμού για να βρούμε τις συνολικές περιόδους που θα εκτοκισθεί ανατοκιζόμενο το αρχικό κεφάλαιο και έτσι:

*Υπολογισμός Παρούσας Αξίας με Ανατοκισμό:*

*Με ετήσιο Ανατοκισμό* τότε:

*Με μικρότερο του έτους Ανατοκισμό:*

*Με μεγαλύτερο του Ανατοκισμό:*

*Υπολογισμός Επιτοκίου και Χρόνου εκτοκισμού:*

Λύνοντας τον τύπο (11) ως προς το επιτόκιο

Λύνοντας τον τύπο (11) ως προς το χρόνο και κάνοντας χρήση των λογαρίθμων.

 Προσεγγιστικά ισχύει και ο τύπος του Pressler

Διαρκής ή Συνεχόμενος Ανατοκισμός

*Ορισμοί:*

*Διαρκής ή Συνεχόμενος Ανατοκισμός,* είναι ηδιαδικασία όπου για απειροελάχιστα μικρή περίοδο χρόνου πραγματοποιείται ο ανατοκισμός. Δηλαδή όπως ήδη έχουμε αναφέρει στα όρια ισχύει ότι:

Η χρήση των Νεπερίων λογαρίθμων είναι μεγάλης σημασίας και εκεί στηρίζεται ο κλάδος του Financial Engineering.

*Υπολογισμός Μελλοντικής Αξίας με Διαρκή Ανατοκισμό:*

*Υπολογισμός Μελλοντικής Αξίας για συνεχή χρονικό διάστημα ():*

*Υπολογισμός Παρούσας Αξίας με Διαρκή Ανατοκισμό:*

*Υπολογισμός Επιτοκίου και Χρόνου εκτοκισμού:*

Λύνοντας τον τύπο (21) ως προς το επιτόκιο με την χρήση των Νεπερίων λογαρίθμων έχουμε:

Λύνοντας τον τύπο (21) ως προς το χρόνο με την χρήση των Νεπερίων λογαρίθμων έχουμε:

# Ετήσιο Πραγματικό Επιτόκιο ή Ετήσια Πραγματική Επιβάρυνση (ΕΠΕ)

*Ορισμοί:*

Όταν ασκείται η διαδικασία του ανατοκισμού σε περιόδους μικρότερες του έτους ή όταν ασκείται ο διαρκής εκτοκισμός το επιτόκιο που χρησιμοποιείται διαφέρει από το επιτόκιο που ισχύει στον ετήσιο ανατοκισμό διότι η απόδοση εντός του έτους αυξάνεται με τους τόκους που υπολογίζονται επί των τόκων βάση της διαδικασίας του ανατοκισμού. *Ετήσιο Πραγματικό Επιτόκιο ή Ετήσια Πραγματική Επιβάρυνση* είναι το ετήσιο επιτόκιο που εξισώνει την απόδοση του ανατοκισμού έτσι για ανατοκισμό για περιόδους μικρότερες του έτους ισχύει:

Ενώ για το διαρκή ανατοκισμό:

Ένα επιτόκιο 9 τοις εκατό που ισχύει για ετήσιο ανατοκισμό και ταυτίζεται με το πραγματικό εάν χρησιμοποιηθεί σε ανατοκισμό σε περιόδους μικρότερε του έτους ή στον διαρκή το πραγματικό επιτόκιο θα είναι για, έτος 9,00%, εξάμηνο 9,20%, τετράμηνο 9,27%, τρίμηνο 9,31%, μήνα 9,38%, ενώ με το διαρκή 9,42%.

# Ράντες (Annuities)

*Ορισμοί:*

* *Ράντες (Annuities)* είναι ίσες ή άνισες ταμειακές ροές σε διαφορετικές, ίσες ή άνισες περιόδους του χρόνου.
* *Δόση ή Όρος της Ράντας (Α)* είναι το διαθέσιμο χρηματικό κεφάλαιο ανά χρονική περίοδο. Εάν οι δόσεις είναι σταθερές ίδιες τότε η ράντα λέγεται σταθερή αν όχι καλείται μεταβλητή.
* *Λήξη είναι η χρονική στιγμή* που καθίσταται διαθέσιμη η δόση της ράντας. Όταν η δόση καταβάλλεται στη αρχή μιας περιόδου καλείται προκαταβλητέα ράντα, ενώ εάν καταβάλλεται στο τέλος λέγεται ληξιπρόθεσμη.
* *Περίοδος* το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο λήψεων. Δηλαδή έχουμε ετήσιες εξαμηνιαίες, τριμηνιαίες μηνιαίες εβδομαδιαίες ράντες.
* *Αρχή – τέλος ράντας*. Ταυτίζεται με την έναρξη και την λήξη των ταμιακών ροών των δόσεων. Η ράντα χωρίς τέλος καλείται Διηνεκής ράντα (Perpetual)

*Μελλοντική αξία σταθερής ράντας:*

Ληξιπρόθεσμη ετήσια

Η παράσταση εντός της παρενθέσεως είναι γεωμετρική πρόοδος με άθροισμα:

Προκαταβλητέα

Μελλοντική αξία σταθερής περιοδικής ράντας m περιόδων εντός του έτους όπως και στην περίπτωση του ανατοκισμού διαιρούμε το επιτόκιο και πολλαπλασιάζουμε τα έτη με τον αριθμό των περιόδων εντός του έτους:

*Παρούσα αξία σταθερής ετήσιας ράντας:*

Ληξιπρόθεσμη ετήσια

Η παράσταση εντός της παρενθέσεως είναι γεωμετρική πρόοδο με άθροισμα:

*Παρούσα αξία Διηνεκούς Ράντας:*

Λαμβανομένου υπόψη ότι:

Παρούσα αξία σταθερής περιοδικής ράντας m περιόδων εντός του έτους όπως και στην περίπτωση του ανατοκισμού διαιρούμε το επιτόκιο και πολλαπλασιάζουμε τα έτη με τον αριθμό των περιόδων εντός του έτους:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Μελλοντική Αξία | Παρούσα αξία | Υπολογισμός επιτοκίου | Υπολογισμός Χρόνου |
| Απλός εκτοκισμός  |  |  |  |  |
| ΑνατοκισμόςΕτήσιος Και για m περιόδους εντός έτους |  |  |  |  |
| Διαρκής Εκτοκισμός  |  |  |  |  |
|  | Ετήσιο Πραγματικό Επιτόκιο |
| ΑνατοκισμόςΕτήσιος Και για m περιόδους εντός έτους |  |
| Διαρκής Εκτοκισμός  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ΡΑΝΤΕΣ | Μελλοντική Αξία | Παρούσα αξία |
| Ετήσιες ΡάντεςΛηξιπρόθεσμηΠροκαταβλητέα  |  |  |
| Περιοδική Ράντα‘m’ περιόδων ανά έτος π.χ. εξαμηνιαία, τριμηνιαία, μηνιαία… |  |  |
|  | Ετήσια | Περιοδική |
| Διηνεκής (perpetual )ΛηξιπρόθεσμηΠροκαταβλητέα  |  |  |

###

# Ερωτήσεις – Ασκήσεις

# Ερωτήσεις

1. Τι συναρτησιακή μορφή έχει ο διαρκής ανατοκισμός και γιατί;
2. Τι καλούμε προεξόφληση και πως το ποσό προεξόφλησης επηρεάζεται από την περίοδο ανατοκισμού;
3. Που χρησιμοποιείται η παρούσα αξία και που η μελλοντική αξία μιας ταμειακής ροής σε σχέση με τις χρηματοδοτήσεις και τη χρηματοοικονομική διαχείριση μιας Επιχείρησης;
4. Τι καλούμε ετήσια πραγματική επιβάρυνση ή πραγματικό επιτόκιο και πως υπολογίζεται;

### *Ασκήσεις*

*ΒΑΣΙΚΟΙ ΣYΜΒΟΛΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΕΝΝΟΙΕΣ*

* Παρούσα αξία (PV). Επιτόκιο (I). Τόκος (INT). Έτη εκτοκισμού (N). Μελλοντική αξία (FV). Μελλοντική αξία στο έτος Ν (FVN). Παρούσα αξία ράντας (PVAN). Μελλοντική αξία ράντας (FVAN). Δόση ή Όρος ράντας (PMT). Ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο (INOM)
* Επιτόκιο κόστους ευκαιρίας (Opportunity cost rate)
* Ράντα (Annuity). Εφάπαξ ποσό (lump sum payment). Ταμειακή ροή (cash flow). Άνιση ταμειακή ροή (uneven cash flow stream)
* Τακτική (Αναβαλλόμενη) πρόσοδος [Ordinary (deferred) annuity]. Ετήσια πρόσοδος (annuity due)
* Διηνεκής (Perpetuity). Πεπερατή (Consol)
* Εκροή (Outflow). Εισροή (inflow). Χρονική κατανομή (time line). Τελική Αξία (terminal value)
* Ανατοκισμός (Compounding). Προεξόφληση (Discounting)
* Ετήσιος, εξαμηνιαίος, τριμηνιαίος, μηνιαίος, ημερήσιος ανατοκισμός (Annual, semiannual, quarterly, monthly, and daily compounding)
* Πραγματικό επιτόκιο [Effective annual rate (EFF)]. Ονομαστικό επιτόκιο ή επιτόκιο αναφοράς [nominal (quoted) interest rate (INOM)]. Ετήσιο περιοδικό επιτόκιο (annual periodic rate (APR))
* Χρονοδιάγραμμα απόσβεσης δανείου (Amortization schedule). Τμήμα Χρεολυσίου και τμήμα τόκων δόσης δανείου (principal versus interest component of a payment). Αποσβεσμένο δάνειο (amortized loan).
* Η ταμειοροή με άπειρο αριθμό πληρωμών καλείται διηνεκής (a *perpetuity*is an annuity with an infinite number of payments)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Υποθέστε ότι σε 1 χρόνο από σήμερα θα καταθέσετε €1,000 σε ένα λογαριασμό ταμιευτηρίου με απόδοση 8%.
	1. Εάν ο ανατοκισμός της Τράπεζας είναι ετήσιος, πόσα χρήματα θα υπάρχουν στο λογαριασμό σας σε 4 χρόνια από σήμερα;
	2. Εάν η Τράπεζα εφαρμόζει όχι ετήσιο αλλά 4μηνιαίο ανατοκισμό, πόσα χρήματα θα υπάρχουν στο λογαριασμό σας σε 4 χρόνια από σήμερα;
	3. Υποθέστε ότι αποταμιεύετε το ποσό των €1,000 σε 4 δόσεις των €250 στις χρονιές 1, 2, 3 και 4 αντίστοιχα. Εάν ο ετήσιος ανατοκισμός είναι 8%, πόσα χρήματα θα βρείτε στο λογαριασμό σας τη χρονιά 4;
	4. Υποθέστε ότι πραγματοποιείτε 4 ισόποσες καταθέσεις στο λογαριασμό σας τις χρονιές 1, 2, 3 και 4 αντίστοιχα. Εάν το επιτόκιο είναι 8%, πόση πρέπει να είναι κάθε μία από τις καταθέσεις που κάνατε έτσι ώστε να βρείτε το ίδιο υπόλοιπο στο λογαριασμό σας με αυτό που έχετε υπολογίσει στο παραπάνω ερώτημα a?

**Αποτελέσματα:**

1. FV = €1,259.71
2. FV = €1,268.24
3. FV = €1,126.53
4. PMT = €279.56.
5. Υποθέστε ότι σε 4 χρόνια από σήμερα θα χρειαστείτε το ποσό των €1,000. Η Τράπεζά σας ανατοκίζει ετησίως με ποσοστό 8%.
	1. Πόσα χρήματα πρέπει να καταθέσετε σε 1 χρόνο από σήμερα έτσι ώστε να έχετε στο λογαριασμό σας το ποσό των €1,000 σε 4 χρόνια από σήμερα;
	2. Εάν θέλετε να πραγματοποιήσετε ισόποσες καταθέσεις από τη χρονιά 1 έως και τη χρονιά 4 για να συσσωρεύσετε το ποσό των €1,000, πόση πρέπει να είναι κάθε μία από τις ανωτέρω 4 καταθέσεις;
	3. Εάν ο πατέρας σας προσφερόταν, είτε να πραγματοποιήσει για λογαριασμό σας τις καταθέσεις που υπολογίσατε στο ως άνω ερώτημα b (€221.92), είτε να σας δώσει στο χέρι το εφάπαξ ποσό των €750 σε 1 χρόνο από σήμερα, τι θα διαλέγατε;
	4. Εάν διαθέτετε μόνο €750 σε 1 χρόνο από σήμερα, με ποιο ετήσια ανατοκιζόμενο επιτόκιο θα έχετε τα απαιτούμενα €1,000 σε 4 χρόνια από σήμερα;
	5. Υποθέστε ότι δύνασθε να καταθέσετε μόνο €186.29 σε κάθε μια από τις χρονιές 1 έως και 4, αλλά εξακολουθείτε να χρειάζεστε €1,000 τη χρονιά 4. Με ποιο ετήσια ανατοκιζόμενο επιτόκιο θα πετύχετε το στόχο σας;
	6. Ο πατέρας σας, για να σας βοηθήσει να αποκτήσετε τα €1,000, σας προσφέρει €400 σε 1 χρόνο από σήμερα. Θα βρείτε μια περιστασιακή εργασία και θα μπορέσετε να κάνετε 6 πρόσθετες ισόποσες καταθέσεις, μία κάθε 6 μήνες μετά. Εάν όλα αυτά τα χρήματα είναι κατατεθειμένα στην Τράπεζα με ετήσια ανατοκιζόμενο επιτόκιο 8%, πόση πρέπει να είναι κάθε μία από τις ανωτέρω 6 πληρωμές;
	7. Ποιο είναι το πραγματικό ετήσιο επιτόκιο της Τράπεζας στο ερώτημα f?

**Αποτελέσματα:**

1. PV = €793.83.
2. PMT = €221.92.
3. Το πρόβλημα μπορεί να προσεγγισθεί με διάφορους τρόπους. Μπορείτε επίσης να συγκρίνετε τα €750 με την Παρούσα Αξία (PV) των πληρωμών FV = €944.78, PV = €735.03. Το ποσό είναι μικρότερο από την εφάπαξ προσφορά των €750, οπότε η αρχική σας αντίδραση μπορεί να είναι η αποδοχή του εφάπαξ ποσού των €750. Παρά ταύτα, αυτό θα ήταν λάθος, επειδή ο υπολογισμός των €735.02 ως PV της προσόδου, σας δίνει την αξία της προσόδου *σήμερα.* Επομένως, θα συγκρίνατε τα €735.02 σήμερα με το εφάπαξ ποσό των €750 σε 1 χρόνο από σήμερα, κάτι που δεν είναι σωστό. Εκείνο που θα έπρεπε να είχατε κάνει θα ήταν να δεχθείτε τα €735.02, αναγνωρίζοντας ότι αυτή είναι η PV της προσόδου σήμερα, πολλαπλασιάζοντας €735.02 επί 1.08 για να υπολογίσετε €793.83 και, εν συνεχεία, να συγκρίνετε το ποσό των €793.83 με το αντίστοιχο εφάπαξ των €750. Θα έπρεπε λοιπόν να προτιμήσετε την προσφορά του πατέρα σας να κάνει για λογαριασμό σας τις καταθέσεις κι όχι να πάρετε το εφάπαξ ποσό σε 1 χρόνο από σήμερα.
4. I/YR = 10.0642%.
5. I/YR = 19.9997%. Θα μπορούσατε να βρείτε έναν δανειοδότη που θα σας προσέφερε ένα επιτόκιο 20%, αλλά στην περίπτωση αυτή θα υπήρχε και κάποιο ρίσκο αφού ο δανειοδότης μπορεί να μην σας πλήρωνε τα €1,000!
6. PMT = €74.46
7. EFF% = 8.16%.
8. Ποια η παρούσα αξία ενός χρεογράφου το οποίο πληρώνει €5,000 σε 20 χρόνια εάν τα επιτόκια του είδους του χρεογράφου αυτού είναι 7% ετήσια?

**Αποτελέσματα:**

PV=€1,292.10.

1. Ποια η μελλοντική αξία ποσού ετήσιας ράντας με 7%, 5ετούς διάρκειας με πληρωμή €300 κάθε χρόνο? Εάν ήταν μια προκαταβλητέα ράντα ποια θα ήταν η μελλοντική της αξία?

**Αποτελέσματα:**

FVA5 = €1,725.22.

FVA5 Due = €1,845.99.

1. Μια επένδυση σας δίνει €100 στο τέλος κάθε χρόνου και για τα επόμενα 3 χρόνια, €200 στο τέλος του 4, €300 στο τέλος του 5, και €500 στο τέλος τον 6ο χρόνο. Εάν άλλες επενδύσεις ίσου κινδύνου αποδίδουν 8% ετήσια, ποια η παρούσα και η μελλοντική αξία της επένδυσης?

**Αποτελέσματα:**

PV = €923.98.

FV =€1,466.24.

1. Εάν θέλετε να λάβετε ένα δάνειο €20,000 και πρέπει να το αποπληρώσετε σε 5 χρόνια (60 μήνες), και το ονομαστικό επιτόκιο της χρηματοδότησης είναι 12%, με μηνιαία καταβολή δόσεων. Ποια θα είναι η μηνιαία του δόση και ποιο θα είναι το πραγματικό του επιτόκιο?

**Αποτελέσματα:**

PMT = €444.89. EAR =12.6825%.

1. Ποια η μελλοντική και η παρούσα αξία των ποιο κάτω ληξιπρόθεσμων ραντών

a. €400 ανά έτος, 10 χρόνια με 10%.

b. €200 ανά έτος, 5 χρόνια με 5%.

c. €400 ανά έτος, 5 χρόνια με 0%.

d. Ξανακάνετε τους υπολογισμού για την περίπτωση που οι ράντες είναι προκαταβλητέες.

**Αποτελέσματα:**

FV

a. €6,374.97.

b. €1,105.13.

c. €2,000.00.

d.(1) €7,012.46

(2) €1,160.38

(3) €2,000.00

PV

a. €2,457.83.

b. €865.90.

c. €2,000.00.

d. (1) €2,703.61.

(2) €909.19.

(3) €2,000.00

1. Α. Βρείτε τις παρούσες αξίες των πιο κάτω ταμειοροών με επιτόκιο 8%.

Έτος A B

1 €100 €300

2 400 400

3 400 400

4 400 400

5 300 100

Β. Ποια η αξία τους με επιτόκιο 0% ?

**Αποτελέσματα:**

a. PVA = €1,251.25.

PVB = €1,300.32.

b. PVA = €1,600.

PVB = €1,600

1. Υπολογίστε τα επιτόκια:

a. Δανείζεστε €700 και επιστρέφετε €749 μετά από ένα έτος.

b. Δανείζετε €700 και εισπράττετε 749 μετά από ένα έτος.

c. Δανείζεστε €85,000 και επιστρέφετε €201,229 μετά από 10χρόνια.

d. Δανείζεστε €9,000 και πληρώνετε €2,684.80 κάθε χρόνο για 5 χρόνια.

**Αποτελέσματα:**

a. 7%.

b. 7%.

c. 9%.

d. 15%.

1. Βρείτε το ποσό στο οποίο θα φθάσει €500 κάτω από τις παρακάτω συνθήκες:

a. 12% ανατοκιζόμενο ετήσια για 5 χρόνια.

b. 12% ανατοκιζόμενο εξαμηνιαία για 5 χρόνια.

c. 12% ανατοκιζόμενο τριμηνιαία για 5 χρόνια.

d. 12% ανατοκιζόμενο μηνιαία για for 5 χρόνια.

**Αποτελέσματα:**

a. €881.17.

b. €895.42.

c. €903.06.

d. €908.35

1. Βρείτε την παρούσα αξία ποσού €500 κάτω από τις ποιο κάτω συνθήκες:

a. 12%, εξαμηνιαία, 5 έτη.

b. 12%, τριμηνιαία για 5 έτη.

c. 12% , μηνιαία για 1 έτος.

**Αποτελέσματα:**

a. €279.20.

b. €276.84.

c. €443.72

1. Βρείτε τις μελλοντικές αξίες από τις ποιο κάτω ράντες:

a. FV ποσού €400 κάθε 6 μήνες για 5 χρόνια με επιτόκιο 12%, με εξαμηνιαίο ανατοκισμό.

b. FV ποσού €200 κάθε 3 μήνες για 5 χρόνια με επιτόκιο 12%, με τριμηνιαίο ανατοκισμό.

c. Έστω ότι οι ράντες που περιγράφονται παραπάνω είναι για το ίδιο ποσό και επιτόκιο η b κερδίζει περισσότερα €101.75 γιατί συμβαίνει αυτό?

**Αποτελέσματα:**

a. €5,272.32.

b. €5,374.07

1. Η Επιχειρηματική επιχείρηση Α είχε τζίρο €12 εκατομμύρια όταν πριν από 5 χρόνια οι πωλήσεις της από παροχή υπηρεσιών ήταν 6 εκατομμύρια.

a. Ποια η ετήσια αύξηση του τζίρου της?

b. Υποθέστε ότι κάποιος κάνει τον υπολογισμό « Η Α είχε διπλασιασμό του τζίρου της σε 5 χρόνια άρα 100%/5 = 20% ανά χρόνο» , εξηγείστε γιατί ο υπολογισμός που κάνει είναι λανθασμένος.

**Αποτελέσματα:**

a. I =14.87% = 15%.

1. Μια τράπεζα σας δίνει δάνειο €85,000 το δάνειο έχει ετήσια δόση €8,273.59 για 30. Τι επιτόκιο σας έχει βάλει?

**Αποτελέσματα:**

I = 9%.

1. Μια Επιχειρηματική επιχείρηση για να τελειώσει τις επενδύσεις της θέλει €10,000 κάθε χρόνο και για 4 χρόνια, από την επόμενη χρονιά. Τι ποσό πρέπει να έχετε διαθέσιμο σήμερα σε τραπεζικό λογαριασμό με επιτόκιο 7% για να μπορείτε να κάνετε τις αναλήψεις κάθε χρόνο ?

b. Πόσο θα είναι το διαθέσιμό ποσό σας όταν θα κάνετε την πρώτη ανάληψη και πόσο στο τέλος των αναλήψεων ?

**Αποτελέσματα:**

a. €33,872.11.

b. (1) €26,243.16.

(2) €0.

1. Εάν πάρετε ένα δάνειο 120,000 και θέλετε να πληρώνετε €15,000 κάθε έτος, μετά από πόσα χρόνια θα έχετε αποπληρώσει το δάνειο?

**Αποτελέσματα:**

N = 14.77 = 15 years

1. Η επιχείρησή σας συμφωνεί να πάρει δάνειο για να καλύψει τις επενδύσεις της δάνειο ύψους 10,000,000 για 20 έτη. Η αποπληρωμή του δανείου θα γίνει τοκοχρεολυτικά ανά τρίμηνο αλλά το μισό του δανείου θα πληρωθεί – αποσβεστεί με μία δόση ισόποση στο τέλος της περιόδου δανεισμού μαζί με την τελευταία δόση (balloon). Ποια η τριμηνιαία τοκοχρεωλυτική δόση που θα πρέπει να πληρώνει η επιχείρησή σας.
2. Η επιχείρησή σας θέλει να δώσει πίστωση στους πελάτες της τρίμηνης διάρκειας, αλλά για να καλύψει τις υποχρεώσεις της πρέπει να δανειστεί από την τράπεζά της, η οποία χρεώνει 15%, αλλά με μηναίο ανατοκισμό. Ποιο είναι το επιτόκιο που θα πρέπει να χρεώσει τους πελάτες της για να καλυφθεί πλήρως έναντι της πίστωσης που θέλει να παράσχει.

**Αποτελέσματα:**

INOM = 15.19%.