**Οικονομικά μαθηματικά**

Περιεχόμενα

[**1.** **Βασικές Γνώσεις Μαθηματικών** 1](#_Toc35332691)

[**1.1.** **Δυνάμεις** 1](#_Toc35332692)

[**1.2.** **Όρια και Γεωμετρικές Πρόοδοι** 1](#_Toc35332693)

[**1.3.** **Λογάριθμοι** 2](#_Toc35332694)

[**2.** **Η διαχρονική Αξία του χρήματος και ο εκτοκισμός** 5](#_Toc35332695)

[**2.1.** **Απλός εκτοκισμός** 5](#_Toc35332696)

[*2.1.1.* *Ορισμοί* 5](#_Toc35332697)

[*2.1.2.* *Υπολογισμός τόκου* 5](#_Toc35332698)

[*2.1.3.* *Υπολογισμός Μελλοντικής Αξίας* 5](#_Toc35332699)

[*2.1.4.* *Υπολογισμός Παρούσας Αξίας* 6](#_Toc35332700)

[*2.1.5.* *Υπολογισμός Επιτοκίου και Χρόνου εκτοκισμού* 6](#_Toc35332701)

[**2.2.** **Ανατοκισμός** 6](#_Toc35332702)

[*2.2.1.* *Ορισμοί* 6](#_Toc35332703)

[*2.2.2.* *Υπολογισμός Μελλοντικής Αξίας με Ανατοκισμό* 6](#_Toc35332704)

[2.2.3. Υπολογισμός Παρούσας Αξίας με Ανατοκισμό 7](#_Toc35332705)

[*2.2.4.* *Υπολογισμός Επιτοκίου και Χρόνου εκτοκισμού* 7](#_Toc35332706)

[**2.3.** **Διαρκής ή Συνεχόμενος Ανατοκισμός** 8](#_Toc35332707)

[*2.3.1.* *Ορισμοί* 8](#_Toc35332708)

[*2.3.2.* *Υπολογισμός Μελλοντικής Αξίας με Διαρκή Ανατοκισμό* 8](#_Toc35332709)

[*2.3.3.* *Υπολογισμός Παρούσας Αξίας με Διαρκή Ανατοκισμό* 8](#_Toc35332710)

[*2.3.4.* *Υπολογισμός Επιτοκίου και Χρόνου εκτοκισμού* 8](#_Toc35332711)

[**2.4.** **Ετήσιο Πραγματικό Επιτόκιο ή Ετήσια Πραγματική Επιβάρυνση (ΕΠΕ)** 8](#_Toc35332712)

[**2.5.** **Ράντες (Annuities)** 9](#_Toc35332713)

[*2.5.1.* *Ορισμοί* 9](#_Toc35332714)

[*2.5.2.* *Μελλοντική αξία σταθερής ράντας* 9](#_Toc35332715)

[*2.5.3.* *Παρούσα αξία σταθερής ετήσιας ράντας* 10](#_Toc35332716)

[**Πίνακας Ανασκόπησης Τύπων** 11](#_Toc35332717)

1. **Βασικές Γνώσεις Μαθηματικών**
   1. **Δυνάμεις**
   2. *Πολλαπλασιασμός ν παραγόντων*
   3. *Πράξεις με δυνάμεις*
   4. **Όρια και Γεωμετρικές Πρόοδοι**
2. *Όρια*
3. *Γεωμετρική Πρόοδος*

Κάθε αριθμητική σειρά της μορφής :

Καλείται γεωμετρική πρόοδος και το άθροισμά της ισούται με :

* 1. **Λογάριθμοι**

1. *Εισαγωγικά στοιχεία*

Με τους λογαρίθμους η παρακάτω σχέση μπορεί να γραφεί και ως:

άρα γενικά, ισχύει:

Επίσης, ισχύει ότι:

1. *Σημαντικοί κανόνες που ισχύουν για τους λογαρίθμους :*
2. *Σχέσεις λογαρίθμων και δυνάμεων :*
3. *Ορισμοί για συμβολισμούς :*
4. *Χρήση των λογαρίθμων*
5. Με τους λογαρίθμους μπορούμε να λύνουμε εξισώσεις με τους αγνώστους να βρίσκονται στους εκθέτες π.χ :

ή

ή λύστε ως προς y την εξίσωση

1. Οι λογάριθμοι χρησιμοποιούνται και επί ανισοτήτων π.χ :

1. Οι λογάριθμοι χρησιμοποιούνται στους υπολογισμούς της διαχρονικής αξίας χρήματος

Από τον τύπο του ανατοκισμού μπορούμε να λύσουμε ως προς το χρόνο που βρίσκεται στη δύναμη π.χ :

Σε πόσο χρόνο με ετήσιο ανατοκισμό και επιτόκιο 10% αρχικό κεφάλαιο 10.000 ευρώ θα γίνει 20.000 αντικαθιστόντας στον παραπάνω τύπο :

Ο τύπος του πλήρους ανατοκισμού μπορεί να λυθεί και ως προς το επιτόκιο και ως προς το χρόνο

1. Άλλες περιπτώσεις χρήσης λογαρίθμων, ποιό το x όταν :

Γενικά

.

1. **Η διαχρονική Αξία του χρήματος και ο εκτοκισμός**
   1. **Απλός εκτοκισμός** 
      1. *Ορισμοί*

* Ο *Τόκος* υπολογίζεται από τον πολλαπλασιασμό ενός χρηματικού κεφαλαίου με το επιτόκιο και με την χρονική περίοδο (έτη) στην οποία αντιστοιχούν οι τόκοι.
* *Επιτόκιο* είναι η απόδοση ενός χρηματικού κεφαλαίου 100 Ευρώ για διάστημα ενός έτους. Το επιτόκιο εκφράζεται ως ποσοστό επί τοις εκατό (%) π.χ. επιτόκιο 10 % σημαίνει ότι για 100 ευρώ η απόδοσή τους σε τόκο για ένα χρόνο ανέρχεται στα 10 ευρώ.
* Η *Μελλοντική Αξία Κεφαλαίου* είναι η αξία ενός χρηματικού κεφαλαίου σε μία μελλοντική χρονική στιγμή. Ορίζεται ως το Αρχικό Κεφάλαιο συν τους τόκους που θα προκύψουν για την περίοδο από την παρούσα χρονική στιγμή μέχρι την μελλοντική χρονική στιγμή.
* Η *Παρούσα Αξία Κεφαλαίου* ταυτίζεται με ένα Αρχικό χρηματικό κεφάλαιο, δηλαδή είναι η αξία ενός χρηματικού κεφαλαίου σήμερα.
* *Προεξόφληση*, είναι η διαδικασία εύρεσης της παρούσας αξίας ενός χρηματικού κεφαλαίου όταν είναι γνωστή η Μελλοντική του Αξία.
  + 1. *Υπολογισμός τόκου*
    2. *Υπολογισμός Μελλοντικής Αξίας*

Όπου: : Αρχικό κεφάλαιο

: Μελλοντικό κεφάλαιο

: Επιτόκιο

: Έτη Εκτοκισμού

Όταν η χρονική διάρκεια είναι μικρότερη του έτους π.χ. m < 1 έτος ή 2 εξάμηνα ή 3 τετράμηνα ή 4 τρίμηνα ή 12 μήνες ή 52 εβδομάδες ή 365 ημέρες, τότε το n αντικαθίσταται με το κλάσμα m (σε εξάμηνα ή τετράμηνα ή τρίμηνα ή μήνες ή εβδομάδες ή ημέρες) / (2 εξάμηνα ή 3 τετράμηνα ή 4 τρίμηνα ή 12 μήνες ή 52 εβδομάδες ή 365 ημέρες).

Έστω ότι θέλουμε να τοκίσουμε για 1 εξάμηνο τότε n=1 (εξάμηνο) / 2 (εξάμηνα που αποτελούν το έτος).

Έστω ότι θέλουμε να τοκίσουμε για 3 εξάμηνα τότε n=3 (εξάμηνα) / 2 (εξάμηνα που αποτελούν το έτος).

Έστω ότι θέλουμε να τοκίσουμε για 273 ημέρες τότε n= 273(ημέρες) / 365 (ημέρες που αποτελούν το έτος).

Έστω ότι θέλουμε να τοκίσουμε για 7 τετράμηνα τότε n=7 (τετράμηνα ) / 3 (τετράμηνα που αποτελούν το έτος) κ.ο.κ.

Ο Αριθμός που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του Αρχικού Κεφαλαίου με τον χρόνο όπως αναφέρθηκε παραπάνω, δηλαδή το ποσό που εάν πολλαπλασιαστεί με το επιτόκιο θα μας δώσει τους τόκους καλείται στην Τραπεζική Πρακτική, *Τοκάριθμος*.

* + 1. *Υπολογισμός Παρούσας Αξίας*
    2. *Υπολογισμός Επιτοκίου και Χρόνου εκτοκισμού*
  1. **Ανατοκισμός**
     1. *Ορισμοί*
* Ο *Ανατοκισμός* είναι η διαδικασία κατά την οποία οι τόκοι μιας περιόδου προστίθενται στο κεφάλαιο για να υπολογισθούν οι τόκοι της επόμενης περιόδου.
* *Περίοδοι Ανατοκισμού* μπορεί να είναι οι οποιεσδήποτε χρονικές περίοδοι κατά τις οποίες οι τόκοι γίνονται κεφάλαιο. Οι περίοδοι ανατοκισμού διακρίνονται σε:
* *Ετήσιος Ανατοκισμός*, οι τόκοι κάθε έτους προστίθενται στο κεφάλαιο και υπολογίζονται οι τόκοι του επομένου έτους επί του νέου κεφαλαίου και όχι επί του αρχικού.
* *Ανατοκισμός εντός του έτους, εξαμηνιαίος, τετραμηνιαίος, τριμηνιαίος, μηνιαίος εβδομαδιαίος ημερήσιος ανατοκισμός.* Οι περίοδοι ανατοκισμού, εντός του έτους, είναι αντίστοιχα 2,3,4,12,52,365.
* *Ανατοκισμός μεγαλύτερος του έτους, διετής τριετής τετραετής κ.*ο.κ.
* *Προεξόφληση με ανατοκισμό*, είναι η διαδικασία εύρεσης της παρούσας αξίας ενός χρηματικού κεφαλαίου όταν είναι γνωστή η Μελλοντική του Αξία και ισχύει η διαδικασία του ανατοκισμού..
  + 1. *Υπολογισμός Μελλοντικής Αξίας με Ανατοκισμό*

*Με ετήσιο Ανατοκισμό* πχ για 4 έτη τότε:

Αντικαθιστώντας την (9) στην (8) και μετά στην (7) και μετά στην (6) έχουμε:

Γενικεύοντας την (10) για n έτη έχουμε:

*Με μικρότερο του έτους Ανατοκισμό* πχ για m=(2 ή 3 ή 4 ή 12 ή 52 ή 365) περιόδους εντός του έτους και για n έτη τότε διαιρούμε το επιτόκιο με τις περιόδους ανά έτος για να βρούμε το επιτόκιο που ισχύει για τη περίοδο και πολλαπλασιάζουμε τα έτη με τις περιόδους ανά έτος για να βρούμε τις συνολικές περιόδους που θα εκτοκισθεί το αρχικό κεφάλαιο και έτσι:

*Με μεγαλύτερο του Ανατοκισμό* πχ ανά m=(2 έτη ή 3 έτη ή 4 έτη) έτη και για n συνολικά έτη τότε πολλαπλασιάζουμε το επιτόκιο με τα έτη ανατοκισμού για να βρούμε το επιτόκιο που ισχύει για τα έτη ανατοκισμού και διαιρούμε τα έτη με τα έτη ανατοκισμού για να βρούμε τις συνολικές περιόδους που θα εκτοκισθεί ανατοκιζόμενο το αρχικό κεφάλαιο και έτσι:

* + 1. Υπολογισμός Παρούσας Αξίας με Ανατοκισμό

*Με ετήσιο Ανατοκισμό* τότε:

*Με μικρότερο του έτους Ανατοκισμό:*

*Με μεγαλύτερο του Ανατοκισμό:*

* + 1. *Υπολογισμός Επιτοκίου και Χρόνου εκτοκισμού*

Λύνοντας τον τύπο (11) ως προς το επιτόκιο

Λύνοντας τον τύπο (11) ως προς το χρόνο και κάνοντας χρήση των λογαρίθμων.

Προσεγγιστικά ισχύει και ο τύπος του Pressler

* 1. **Διαρκής ή Συνεχόμενος Ανατοκισμός**
     1. *Ορισμοί*

*Διαρκής ή Συνεχόμενος Ανατοκισμός,* είναι ηδιαδικασία όπου για απειροελάχιστα μικρή περίοδο χρόνου πραγματοποιείται ο ανατοκισμός. Δηλαδή όπως ήδη έχουμε αναφέρει στα όρια ισχύει ότι:

Η χρήση των Νεμπερίων λογαρίθμων είναι μεγάλης σημασίας εκεί στηρίζεται ο κλάδος του Financial Engineering.

* + 1. *Υπολογισμός Μελλοντικής Αξίας με Διαρκή Ανατοκισμό*

*Υπολογισμός Μελλοντικής Αξίας για συνεχή χρονικό διάστημα ()*

* + 1. *Υπολογισμός Παρούσας Αξίας με Διαρκή Ανατοκισμό*
    2. *Υπολογισμός Επιτοκίου και Χρόνου εκτοκισμού*

Λύνοντας τον τύπο (21) ως προς το επιτόκιο με την χρήση των Νεμπερίων λογαρίθμων έχουμε:

Λύνοντας τον τύπο (21) ως προς το χρόνο με την χρήση των Νεμπερίων λογαρίθμων έχουμε:

* 1. **Ετήσιο Πραγματικό Επιτόκιο ή Ετήσια Πραγματική Επιβάρυνση (ΕΠΕ)**
     1. *Ορισμοί*

Όταν ασκείται η διαδικασία του ανατοκισμού σε περιόδους μικρότερες του έτους ή όταν ασκείται ο διαρκής εκτοκισμός το επιτόκιο που χρησιμοποιείται διαφέρει από το επιτόκιο που ισχύει στον ετήσιο ανατοκισμό διότι η απόδοση εντός του έτους αυξάνεται με τους τόκους που υπολογίζονται επί των τόκων βάση της διαδικασίας του ανατοκισμού. *Ετήσιο Πραγματικό Επιτόκιο ή Ετήσια Πραγματική Επιβάρυνση* είναι το ετήσιο επιτόκιο που εξισώνει την απόδοση του ανατοκισμού έτσι για ανατοκισμό για περιόδους μικρότερες του έτους ισχύει:

Ενώ για το διαρκή ανατοκισμό:

Ένα επιτόκιο 9 τοις εκατό που ισχύει για ετήσιο ανατοκισμό και ταυτίζεται με το πραγματικό εάν χρησιμοποιηθεί σε ανατοκισμό σε περιόδους μικρότερε του έτους ή στον διαρκή το πραγματικό επιτόκιο θα είναι για, έτος 9,00%, εξάμηνο 9,20%, τετράμηνο 9,27%, τρίμηνο 9,31%, μήνα 9,38%, ενώ με το διαρκή 9,42%.

* 1. **Ράντες (Annuities)**
     1. *Ορισμοί*
* *Ράντες (Annuities)* είναι ίσες ή άνισες ταμειακές ροές σε διαφορετικές, ίσες ή άνισες περιόδους του χρόνου.
* *Δόση ή Όρος της Ράντας (Α)* είναι το διαθέσιμο χρηματικό κεφάλαιο ανά χρονική περίοδο. Εάν οι δόσεις είναι σταθερές ίδιες τότε η ράντα λέγεται σταθερή αν όχι καλείται μεταβλητή.
* *Λήξη είναι η χρονική στιγμή* που καθίσταται διαθέσιμη η δόση της ράντας. Όταν η δόση καταβάλλεται στη αρχή μιας περιόδου καλείται προκαταβλητέα ράντα, ενώ εάν καταβάλλεται στο τέλος λέγεται ληξιπρόθεσμη.
* *Περίοδος* το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο λήψεων. Δηλαδή έχουμε ετήσιες εξαμηνιαίες, τριμηνιαίες μηνιαίες εβδομαδιαίες ράντες.
* *Αρχή – τέλος ράντας*. Ταυτίζεται με την έναρξη και την λήξη των ταμιακών ροών των δόσεων. Η ράντα χωρίς τέλος καλείται Διηνεκής ράντα (Perpetual)
  + 1. *Μελλοντική αξία σταθερής ράντας*

Ληξιπρόθεσμη ετήσια

Η παράσταση εντός της παρενθέσεως είναι γεωμετρική πρόοδο με άθροισμα:

Προκαταβλητέα

Μελλοντική αξία σταθερής περιοδικής ράντας m περιόδων εντός του έτους όπως και στην περίπτωση του ανατοκισμού διαιρούμε το επιτόκιο και πολλαπλασιάζουμε τα έτη με τον αριθμό των περιόδων εντός του έτους:

* + 1. *Παρούσα αξία σταθερής ετήσιας ράντας*

Ληξιπρόθεσμη ετήσια

Η παράσταση εντός της παρενθέσεως είναι γεωμετρική πρόοδο με άθροισμα:

Παρούσα αξία Διηνεκούς Ράντας

Λαμβανομένου υπόψη ότι:

Παρούσα αξία σταθερής περιοδικής ράντας m περιόδων εντός του έτους όπως και στην περίπτωση του ανατοκισμού διαιρούμε το επιτόκιο και πολλαπλασιάζουμε τα έτη με τον αριθμό των περιόδων εντός του έτους:

# **Πίνακας Ανασκόπησης Τύπων**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Μελλοντική Αξία | Παρούσα αξία | Υπολογισμός επιτοκίου | Υπολογισμός Χρόνου |
| Απλός εκτοκισμός |  |  |  |  |
| Ανατοκισμός  Ετήσιος  Και για m περιόδους εντός έτους |  |  |  |  |
| Διαρκής Εκτοκισμός |  |  |  |  |
|  | Ετήσιο Πραγματικό Επιτόκιο |
| Ανατοκισμός  Ετήσιος  Και για m περιόδους εντός έτους |  |
| Διαρκής Εκτοκισμός |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ΡΑΝΤΕΣ | Μελλοντική Αξία | Παρούσα αξία |
| Ετήσιες Ράντες  Ληξιπρόθεσμη  Προκαταβλητέα |  |  |
| Περιοδική Ράντα  ‘m’ περιόδων ανά έτος π.χ εξαμηνιαία, τριμηνιαία, μηνιαία… |  |  |
|  | Ετήσια | Περιοδική |
| Διηνεκής (perpetual )  Ληξιπρόθεσμη  Προκαταβλητέα |  |  |