ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

Ακαδημαϊκό έτος 2012-13

Α.Ν. Καραγάνης

Το γραμμικό υπόδειγμα

1. Εξειδίκευση και υποθέσεις και σχόλια

Γραμμικό υπόδειγμα είναι κάθε σχέση της μορφής:

$y = X\beta + \varepsilon$.

X , πεπερασμένη και μη στοχαστική μήτρα με *n* γραμμές, *k* στήλες και βαθμό *k*. Αν η μήτρα είναι στοχαστική τότε δεν εξασφαλίζεται η αμεροληψία του εκτιμητή.

$\left|(X'X)\right| \neq 0$. Αν η ορίζουσα είναι μηδέν, τότε η μήτρα δεν αντιστρέφεται και κατά συνέπεια δεν υπάρχει εκτιμητής.

$E(\varepsilon) = 0$. Αν τα κατάλοιπα δεν έχουν αναμενόμενη τιμή μηδέν, τότε υπάρχει λάθος στην εξειδίκευση, δηλαδή λάθος στη θεωρία. Αυτό σημαίνει πως τα αποτελέσματα της οικονομετρίας δεν έχουν νόημα. Με άλλα λόγια η οικονομετρία επειδή προϋποθέτει μηδενική αναμενόμενη τιμή των καταλοίπων, θεωρεί εξ ορισμού σωστή την οικονομική θεωρία και ενδιαφέρεται μόνο για τις αριθμητικές τιμές των παραμέτρων (το διάνυσμα β).

$V(\varepsilon_i) = E\left[\left(\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)\right)'\left(\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)\right)\right] = E(\varepsilon_i'\varepsilon_i) = \sigma_i^2$. Η διακύμανση των καταλοίπων οποιασδήποτε παρατήρησης του δείγματος.

$E(\varepsilon\varepsilon') = E\left[(\varepsilon - E(\varepsilon))(\varepsilon - E(\varepsilon))\right]' = \sigma^2 I$ Η διακύμανση είναι στην πραγματικότητα μήτρα διακυμάνσεων –στην κύρια διαγώνιο- και συνδιακυμάνσεων –εκτός κυρίας διαγωνίου- του διανύσματος των καταλοίπων ολόκληρου του δείγματος. Αυτή η υπόθεση σημαίνει πως οι διακυμάνσεις των καταλοίπων όλων των παρατηρήσεων είναι ίσες μεταξύ τους και οι συνδιακυμάνσεις είναι όλες μηδέν, δηλαδή το δείγμα είναι τυχαίο (μηδενική αυτοσυσχέτιση) και έχει ληφθεί σε σταθερές συνθήκες (ομοσκεδαστικό).

$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$. Αυτή η υπόθεση θα μας χρησιμεύσει για το στατιστικό έλεγχο των υποδειγμάτων.

2. Εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων

Λύνοντας τη σχέση $y = X\beta + \varepsilon$ ως προς τα κατάλοιπα (στον πληθυσμό) προκύπτει το διάνυσμα:

$$\varepsilon = y - X\beta$$

Στην πραγματικότητα όμως δεν έχουμε διαθέσιμο τον πληθυσμό. Αυτό που έχουμε στα χέρια μας είναι ένα συγκεκριμένο δείγμα, οπότε ισχύει:

$$e = y - Xb$$

Υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος e (δηλαδή το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων):

$$e'e = (y - Xb)'(y - Xb)$$

Εφαρμόζουμε την ιδιότητα του ανάστροφου του αθροίσματος μητρών $(A \pm B)' = A' \pm B'$, οπότε:

$$e'e = (y' - b'X')(y - Xb)$$

Εκτελούμε τις πράξεις:

$$e'e = y'y - y'Xb - b'X'y + b'X'Xb$$

Παραγωγίζουμε ως προς το διάνυσμα b

$$\frac{\vartheta}{\vartheta b}(e'e) = \frac{\vartheta}{\vartheta b}(y'y - y'Xb - b'X'y + b'X'Xb)$$

Παρατηρούμε ότι:

$$(y'Xb)' = b'X'y \text{ οπότε } -y'Xb - b'X'y = -2b'X'y$$

Αντικαθιστούμε,

$$\frac{\vartheta}{\vartheta b}(e'e) = \frac{\vartheta}{\vartheta b}(y'y - 2b'X'y + b'X'Xb)$$

Εφαρμόζουμε την ιδιότητα της παραγώγισης αθροίσματος συναρτήσεων:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta b}(e'e) = \frac{\vartheta}{\vartheta b}(y'y) - 2\frac{\vartheta}{\vartheta b}(b'X'y) + \frac{\vartheta}{\vartheta b}(b'X'Xb)$$

Κατά τα γνωστά η παράγωγος σταθεράς είναι μηδέν. (Το εσωτερικό γινόμενο $(y'y)$ δεν αλλάζει όταν μεταβάλλεται το διάνυσμα b).

$$\frac{\vartheta}{\vartheta b}(e'e) = 0 - 2b'X'y + 2X'Xb$$

Για την εύρεση του ακρότατου εξισώνουμε την πρώτη παράγωγο με το μηδέν

$$\frac{\vartheta}{\vartheta b}(e'e)=0$$

Αντικαθιστούμε:

$$-2X'y+2X'Xb=0$$

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους:

$$2X'Xb=2X'y$$

Απαλείφουμε το 2:

$$X'Xb=X'y$$

Για την επίλυση της εξίσωσης προπολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με $(X'X)^{-1}$:

$$(X'X)^{-1}X'Xb=(X'X)^{-1}X'y$$

Εκτελούμε τις πράξεις

$$Ib=(X'X)^{-1}X'y$$

Ο εκτιμητής των ελαχίστων τετραγώνων είναι:

$$b=(X'X)^{-1}X'y$$

Εδώ πρέπει να σημειωθεί πως ο εκτιμητής είναι ελάχιστο καθώς η δεύτερη παράγωγος είναι θετικά ορισμένη μήτρα και συγκεκριμένα

$$\frac{\vartheta}{\vartheta b'}(-2X'y+2X'Xb)=2X'X>0$$

3. Αμεροληψία του εκτιμητή

Η αμεροληψία είναι εκείνη η ιδιότητα που εξασφαλίζει ότι η διαδικασία που ακολουθούμε είναι σωστή. Το λάθος (δηλαδή η διαφορά ανάμεσα στην πραγματική τιμή της παραμέτρου β στο πληθυσμό και στην τιμή b που εκτιμάμε από το δείγμα) οφείλονται μόνο σε τυχαίους παράγοντες. Μαθηματικά η αμεροληψία είναι

$$E(b)=\beta.$$

Ο εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων είναι:

$$b=(X'X)^{-1}X'y$$

Αντικαθιστούμε το διάνυσμα y με το ίσο του από το γραμμικό υπόδειγμα:

$$b=(X'X)^{-1}X'(X\beta+\varepsilon)$$

Εκτελούμε τις πράξεις:

$$b=(X'X)^{-1}X'X\beta+(X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

Ο συντελεστής του β είναι η μοναδιαία μήτρα:

$$b = I\beta + \left(X'X\right)^{-1} X'\varepsilon$$

Οπότε:

$$b = \beta + \left(X'X\right)^{-1} X'\varepsilon$$

Μεταφέρουμε το β στο αριστερό μέλος της εξίσωσης:

$$b - \beta = \left(X'X\right)^{-1} X'\varepsilon$$

Υπολογίζουμε τις αναμενόμενες τιμές της προηγούμενης σχέσης:

$$E(b-\beta) = E\left[\left(X'X\right)^{-1} X'\varepsilon\right]$$

Εφαρμόζουμε ιδιότητες αναμενόμενων τιμών. Εξ υποθέσεως η μήτρα X δεν είναι στοχαστική, άρα συμπεριφέρεται ως σταθερή ποσότητα. Οπότε:

$$E(b) - E(\beta) = \left(X'X\right)^{-1} X'E(\varepsilon)$$

Εξ υποθέσεως επίσης η αναμενόμενη τιμή των καταλοίπων είναι μηδέν, οπότε:

$$E(b) - \beta = 0$$

Συνεπώς:

$$E(b) = \beta$$

Άρα ο εκτιμητής είναι αμερόληπτος.

4. Διακύμανση του εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων

Ο εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων b είναι τυχαία μεταβλητή. Αυτό συμβαίνει γιατί είναι συνάρτηση σταθερών ποσοτήτων και τυχαίων μεταβλητών όπως φαίνεται από τη σχέση $b = \beta + \left(X'X\right)^{-1} X'\varepsilon$. Συγκεκριμένα το διάνυσμα β των παραμέτρων στον πληθυσμό και η μήτρα X που ελέγχει ο ερευνητής δεν είναι τυχαίες μεταβλητές, ενώ το διάνυσμα των καταλοίπων ε είναι τυχαία μεταβλητή. Κατά συνέπεια η τυχαία φύση του εκτιμητή μας επιβάλλει να μελετήσουμε και τη διακύμανση του.

Παρατηρούμε ότι ο εκτιμητής είναι διάνυσμα. Αυτό σημαίνει πως στην πραγματικότητα έχουμε εκτιμήσει τόσες τυχαίες μεταβλητές, όσες είναι και οι γραμμές του διανύσματος β. Παραδείγματος χάριν στη συνάρτηση κατανάλωσης εκτιμούμε την αυτόνομη κατανάλωση (σταθερός όρος) και την οριακή ροπή για κατανάλωση (κλίση της ευθείας). Έτσι, ***η διακύμανση του εκτιμητή είναι στην πραγματικότητα μήτρα διακυμάνσεων (στην κύρια διαγώνιο) και συνδιακυμάνσεων (εκτός κυρίας διαγωνίου) των εκτιμήσεων***. Οι διακυμάνσεις μας δίνουν τη μεταβλητότητα (το αναμενόμενο σφάλμα ως προς την πραγματική τιμή του β) των εκτιμήσεων από δείγμα σε δείγμα, ενώ οι συνδιακυμάνσεις μας δείχνουν την επίδραση που έχει το λάθος της εκτίμησης μιας παραμέτρου (π.χ. της αυτόνομης κατανάλωσης) στην εκτίμηση άλλης παραμέτρου (π.χ. στην οριακή ροπή για κατανάλωση).

Κατά τα γνωστά η διακύμανση ορίζεται ως:

$$V(b) = E\left[(b-\beta)(b-\beta)'\right]$$

Αντικαθιστούμε την απόκλιση του εκτιμητής από την αληθή τιμή με το ίσο της

$$V(b) = E\left[\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon\right]\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon\right]'\right]$$

Εφαρμόζουμε την ιδιότητα του ανάστροφου του γινομένου μητρών $(AB)' = B'A'$:

$$V(b) = E\left[\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon\right]\left[\varepsilon'X(X'X)^{-1}\right]\right]$$

Εκτελούμε τις πράξεις:

$$V(b) = E\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1}\right]$$

Εξ υποθέσεως η μήτρα X δεν είναι στοχαστική, άρα συμπεριφέρεται ως σταθερή ποσότητα. Οπότε:

$$V(b) = (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon\varepsilon')X(X'X)^{-1}$$

Αντικαθιστούμε την παράσταση $E(\varepsilon\varepsilon')$ με το εξ υποθέσεως ίσο της $\sigma^2 I$:

$$V(b) = (X'X)^{-1}X'\sigma^2 IX(X'X)^{-1}$$

Η διακύμανση των καταλοίπων είναι βαθμωτό (αριθμός) σ^2 είναι βαθμωτό, οπότε

$$V(b) = \sigma^2(X'X)^{-1}X'IX(X'X)^{-1}$$

Εκτελούμε τις πράξεις με τη μοναδιαία μήτρα:

$$V(b) = \sigma^2(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}$$

Οπότε προκύπτει:

$$V(b) = \sigma^2(X'X)^{-1}I$$

Συνεπώς:

$$V(b) = \sigma^2(X'X)^{-1}$$

Η μήτρα διακυμάνσεων συνδιακυμάνσεων των καταλοίπων έχει διαστάσεις $k \times k$. Δεν πρέπει να συγχέεται με τη μήτρα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων των καταλοίπων, η οποία έχει διαστάσεις $n \times n$.

5. Εκτιμητής της διακύμανσης των καταλοίπων

Η διακύμανση των καταλοίπων εξ ορισμού είναι:

$$V(\varepsilon_i) = E\left[\left(\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)\right)'\left(\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)\right)\right] = E(\varepsilon_i'\varepsilon_i) = \sigma_i^2$$

Από την υπόθεση περί ισότητας των διακυμάνσεων όλων των παρατηρήσεων προκύπτει ότι η διακύμανση των καταλοίπων είναι:

$$E(\varepsilon'\varepsilon) = \sigma^2$$

Στην πραγματικότητα όμως δεν έχουμε διαθέσιμο τον πληθυσμό. Αυτό που έχουμε στα χέρια μας είναι ένα συγκεκριμένο δείγμα, οπότε ισχύει:

$$E(e'e)$$

Το διάνυσμα των καταλοίπων που εκτιμάμε στο δείγμα είναι:

$$e = y - Xb$$

Αντικαθιστούμε το y με το ίσο του:

$$e = y - X(X'X)^{-1}X'y$$

Εκτελούμε τις πράξεις:

$$e = X\beta + \varepsilon - X(X'X)^{-1}X'(X\beta + \varepsilon)$$

Αντικαθιστούμε το b με το ίσο του:

$$e = X\beta + \varepsilon - X(X'X)^{-1}X'X\beta - X(X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

Εκτελούμε τις πράξεις:

$$e = X\beta + \varepsilon - XI\beta - X(X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

Απαλείφουμε τους όρους με αντίθετο πρόσημο:

$$e = X\beta + \varepsilon - X\beta - X(X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

Οπότε προκύπτει:

$$e = \varepsilon - X(X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

Παρατηρούμε ότι $\varepsilon = I\varepsilon$, οπότε:

$$e = I\,\varepsilon - X(X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

Βγάζουμε κοινό παράγοντα το ε. Ο κοινός παράγοντας μεταπολλαπλασιάζεται με τη μήτρα, γιατί βρίσκεται στο δεξί πλευρό των όρων στους οποίους είναι κοινός παράγων :

$$e = \left(I - X(X'X)^{-1}X'\right)\varepsilon$$

Οι διαστάσεις της μήτρας $\left(I - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right)$ είναι $n \times n$, καθώς το διάνυσμα έχει διαστάσεις $n \times 1$, οπότε η μοναδιαία μήτρα για να μπορεί να εκτελεστεί ο πολλαπλασιασμός πρέπει να είναι διαστάσεων $n \times n$. Το γινόμενο $\left(X\left(X'X\right)^{-1}X'\right)$έχει διαστάσεις $n \times n$, καθώς οι διαστάσεις των παραγόντων του είναι $(n \times k)(k \times k)(k \times n)$. Παρατηρούμε επίσης ότι:

$$e' = \varepsilon'\left(I - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right)' = \varepsilon'\left(I - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right)$$

Επιπλέον η μήτρα $\left(I - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right)$ είναι συμμετρική γιατί -με βάση τις ιδιότητες των ανάστροφων μητρών- ισχύει $\left(I - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right)' = \left(I - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right)$, συνεπώς:

$$E(e'e) = E\left[\varepsilon'\left(I - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right)\left(I - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right)\varepsilon\right].$$

Παρατηρούμε επίσης ότι η ίδια μήτρα $\left(I - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right)$ είναι ταυτοδύναμη γιατί ισχύει$\left(I - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right)\left(I - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right) = \left(I - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right)$ με βάση τις ιδιότητες των μητρών, οπότε:

$$E(e'e) = E\left[\varepsilon'\left(I - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right)\varepsilon\right]$$

Η αναμενόμενη τιμή που προκύπτει είναι βαθμωτό. Έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ίχνος μητρών και τις ιδιότητες του. Συγκεκριμένα το ίχνος ενός βαθμωτού είναι το ίδιο το βαθμωτό, οπότε:

$$E(e'e) = tr\left\{E\left[\varepsilon'\left(I - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right)\varepsilon\right]\right\}$$

Ακολούθως καθώς ισχύει πως το ίχνος της αναμενόμενης τιμής ενός βαθμωτού είναι ίσο με την αναμενόμενη τιμή του ίχνους του βαθμωτού, οπότε:

$$E(e'e) = E\left\{tr\left[\varepsilon'\left(I - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right)\varepsilon\right]\right\}$$

Εφαρμόζουμε την ιδιότητα του ίχνους $tr(AB) = tr(BA)$, οπότε αν θεωρήσουμε ως $A = \varepsilon'\left(I - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right)$ και ως $B = \varepsilon$, προκύπτει:

$$E(e'e) = E\left\{tr\left[\varepsilon\varepsilon'\left(I - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right)\right]\right\}$$

Αντιστρέφουμε τώρα τη σειρά υπολογισμού της αναμενόμενης τιμής και του ίχνους:

$$E(e'e) = tr\left\{E\left[\varepsilon\varepsilon'\left(I - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right)\right]\right\}$$

Υπολογίζουμε την αναμενόμενη τιμή της παράστασης, λαμβάνοντας υπόψιν τη μη στοχαστική φύση της μήτρας *X*:

$$E(e'e) = tr\left\{E(\varepsilon\varepsilon')\left(I - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right)\right\}$$

Οπότε προκύπτει:

$$E(e'e) = tr\left\{\sigma^2 I\left(I - X(X'X)^{-1}X'\right)\right\}$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα του ίχνους $tr(c \cdot A) = c \cdot tr(A)$ προκύπτει:

$$E(e'e) = \sigma^2 tr\left\{\left(I - X(X'X)^{-1}X'\right)\right\}$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα του ίχνους $tr(A \pm B) = tr(A) \pm tr(B)$ προκύπτει:

$$E(e'e) = \sigma^2 \left\{tr(I) - tr\left(X(X'X)^{-1}X'\right)\right\}$$

Εφαρμόζουμε την ιδιότητα του ίχνους $tr(AB) = tr(BA)$ στο δεύτερο αθροιστέο, οπότε αν θεωρήσουμε ως $A = X(X'X)^{-1}$ και ως $B = X'$ προκύπτει:

$$E(e'e) = \sigma^2 \left\{tr(I) - tr\left(X'X(X'X)^{-1}\right)\right\}$$

Εκτελώντας τις πράξεις προκύπτει:

$$E(e'e) = \sigma^2 \{tr(I) - tr(I)\}$$

Το ίχνος εξ ορισμού είναι ίσο με το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου. Στις μοναδιαίες μήτρες το ίχνος δίνει το πλήθος των στηλών ή γραμμών αυτών. Κατά συνέπεια το πρώτο ίχνος είναι ίσο με n, ενώ το δεύτερο με k καθώς η δεύτερη μοναδιαία μήτρα έχει προκύψει από το γινόμενο $X'X(X'X)^{-1}$ που σε όρους διαστάσεων είναι $(k \times k)(k \times k)$, οπότε:

$$E(e'e) = \sigma^2 \{n - k\}$$

Το αποτέλεσμα που προέκυψε δεν είναι ακριβώς το επιθυμητό, δηλαδή $E(e'e) = \sigma^2 = E(\varepsilon'\varepsilon)$. Μπορούμε όμως να έχουμε αμερόληπτη εκτίμηση της διακύμανσης των καταλοίπων, αν διαιρέσουμε ότι βρήκαμε με $(n-k)$, οπότε

$$\frac{E(e'e)}{n-k} = \frac{\sigma^2(n-k)}{n-k} = \sigma^2 = E(\varepsilon'\varepsilon).$$

6. **Ο συντελεστής προσδιορισμού**

Κατά τα γνωστά ισχύει:

$$e'e = y'y - 2b'X'y + b'X'Xb$$

Για τον όρο $b'X'Xb$, παρατηρούμε πως αν στην ποσότητα Xb αντικαταστήσουμε το b με το ίσο του $(X'X)^{-1}X'y$ προκύπτει πως $b'X'Xb = b'X'X(X'X)^{-1}X'y$. Εκτελούμε τις πράξεις και καταλήγουμε πως $b'X'Xb = b'X'y$. Αντικαθιστούμε στην προηγούμενη σχέση, οπότε:

$$e'e = y'y - 2b'X'Xb + b'X'Xb$$

Εκτελούμε τις πράξεις:

$$e'e = y'y - b'X'Xb$$

Γνωρίζουμε όμως πως $\hat{y} = Xb$. Αντικαθιστούμε στην προηγούμενη σχέση και προκύπτει:

$$e'e = y'y - \hat{y}'\hat{y}$$

Αναδιατάσσουμε τους όρους της εξίσωσης:

$$y'y = \hat{y}'\hat{y} + e'e$$

Η ανωτέρω παράσταση σημαίνει πως η συνολική μεταβλητότητα της εξαρτημένης μεταβλητής, η οποία είναι βαθμωτό, οφείλεται στο υπόδειγμα κατά την ποσότητα $\hat{y}'\hat{y}$ και στον τυχαίο όρο κατά την ποσότητα $e'e$.

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με την ποσότητα $y'y$, προκύπτει:

$$1 = \frac{\hat{y}'\hat{y}}{y'y} + \frac{e'e}{y'y}$$

Ως συντελεστής προσδιορισμού ορίζεται η ποσότητα $\frac{\hat{y}'\hat{y}}{y'y}$ και συμβολίζεται με R^2.

Αν χρησιμοποιηθούν οι αρχικές τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής (τιμές παρατήρησης και θεωρητικές τιμές) τότε ο συντελεστής προσδιορισμού καλείται **μη κεντρικός συντελεστής προσδιορισμού** (μετράει τη μεταβλητότητα ως προς το μηδέν). Αν χρησιμοποιηθούν οι αποκλίσεις από το μέσο όρο (οι τιμές από παρατήρηση και οι θεωρητικές τιμές ως γνωστόν έχουν τον ίδιο μέσο όρο) τότε καλείται απλώς **συντελεστής προσδιορισμού** (μετράει τη μεταβλητότητα από το μέσο όρο του δείγματος). Συνήθως χρησιμοποιείται ο **συντελεστής προσδιορισμού**.

7. Για το συντελεστή προσδιορισμού χωρίς αποδείξεις

- Ο συντελεστής προσδιορισμού παίρνει τιμές στο κλειστό διάστημα [0,1].
- Ο συντελεστής προσδιορισμού περιγράφει πόσο καλά ταιριάζουν τα δεδομένα στο υπόδειγμα. Τιμές κοντά στο 1 δείχνουν καλή προσαρμογή, τιμές κοντά στο 0 δείχνουν κακή προσαρμογή.
- Ο συντελεστής προσδιορισμού μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη σύγκριση υποδειγμάτων ως προς το πόσο καλά περιγράφουν (τα υποδείγματα τα δεδομένα) με τρεις προϋποθέσεις:

1. τα υποδείγματα πρέπει να έχουν τον ίδιο αριθμό ερμηνευτικών μεταβλητών,
2. τα υποδείγματα πρέπει να έχουν σταθερό όρο και
3. οι μονάδες μέτρησης της εξαρτημένης μεταβλητής πρέπει να είναι οι ίδιες.

- Όταν διαφέρει το πλήθος των ερμηνευτικών μεταβλητών τότε χρησιμοποιείται ο προσηρμοσμένος συντελεστής προσδιορισμού, που συμβολίζεται με $\overline{R}^2$ και δίνεται από τη σχέση:

$$\overline{R}^2 = 1 - \left(1 - R^2\right)\frac{n-1}{n-k}$$