Το Ανοικτό Σύστημα Leontief

Στο Κλειστό Σύστημα Leontief, η μήτρα συντελεστών περιλαμβάνει δύο τμήματα:

⟶ ένα που αφορά την τεχνολογία

⟶ ένα που αφορά την τελική κατανάλωση

Το τμήμα που αφορά την τεχνολογία αποτελείται από τη μήτρα των τεχνικών συντελεστών της οικονομίας:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} \\ \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

<u>και</u> από το διάνυσμα των συντελεστών άμεσης εργασίας:

$$a^T = [a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{n,n-1}]$$

Το τμήμα που αφορά την τελική κατανάλωση αποτελείται από την τελευταία στήλη του Κλειστού Συστήματος και τη θεωρούμε ως εξωγενώς δεδομένη:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$$

Βάσει των παραπάνω, μπορούμε να ξαναγράψουμε το σύστημα φυσικών ποσοτήτων και το σύστημα τιμών της οικονομίας.

Θυμίζουμε ότι, στο Κλειστό Σύστημα, για το σύστημα φυσικών ποσοτήτων είχαμε:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= x_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= x_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad &\quad\ \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= x_n
\end{aligned}$$

Τώρα, εξωγενώς δεδομένα ($=y$)

Στο Ανοικτό Σύστημα, αυτό το στοιχείο απαλείφεται

Το σύστημα φυσικών ποσοτήτων στο Ανοικτό Σύστημα Leontief γράφεται ως εξής:

$$Ax + y = x \Rightarrow \boxed{[I-A]x = y}$$

$$a^T x = L$$

$L \longrightarrow$ η συνολική ποσότητα εργασίας στην οικονομία

Το y, τώρα, μπορεί να περιλαμβάνει

και εισενδύσεις. Δηλαδή, το σύστημα δεν είναι κατ' ανάγκην στάσιμο.

Αντιστοίχως, για το Σύστημα Τιμών, στο Κλειστό Σύστημα είχαμε:

$$
\begin{aligned}
P_1 a_{11} + P_2 a_{21} + \dots + P_n a_{n1} &= P_1 \\
P_1 a_{12} + P_2 a_{22} + \dots + P_n a_{n2} &= P_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\
P_1 a_{1n} + P_2 a_{2n} + \dots + P_n a_{nn} &= P_n
\end{aligned}
$$

Στοιχεία Προστιθέμενης Αξίας. Στο Ανοικτό

Στο Ανοικτό Σύστημα, αυτό το

Σύστημα θεωρούνται
εξωγενώς δεδομένα
(v)

στοιχείο αφαιρείται

Στο Ανοικτό Σύστημα, το σύστημα τιμών της οικονομίας γράφεται ως εξής:

$$p^T A + v^T = p^T \Rightarrow$$

$$\boxed{p^T[I-A] = v^T}$$

Λύση του Ανοικτού Συστήματος

Δεδομένου ότι η $[I-A]$ περιλαμβάνει ανεξάρτητα διανύσματα, έπεται ότι είναι μη ιδιάζουσα, δηλαδή:

$$|I-A| \neq 0$$

Συνεπώς, η $[I-A]$ έχει αντίστροφη και, άρα, οι λύσεις του Ανοικτού Συστήματος Leontief έχουν ως εξής:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= [I-A]^{-1} y \\ p^T &= v^T [I-A]^{-1} \end{aligned}}$$

Ωστόσο, δεν μας ενδιαφέρει μόνον η ύπαρξη λύσης, αλλά και αυτή η λύση να είναι οικονομικά σημαντική.

Εάν διασφαλιζόταν ότι:

$$[I-A]^{-1} \geq 0$$

τότε, δεδομένου ότι $v \geq 0$, $y \geq 0$, τότε η λύση για τα P, x θα ήταν σίγουρα οικονομικά σημαντική.

Δεδομένου ότι $A \geq 0$, από τα Perron-Frobenius θεωρήματα έπεται ότι αναγκαία και ικανή συνθήκη για να ισχύει $[I-A]^{-1} \geq 0$ είναι ότι θα πρέπει $\boxed{\lambda_{max} < 1}$.

Αυτή η συνθήκη συνεπάγεται ότι οι τεχνικές ιδιότητες του οικονομικού συστήματος πρέπει να είναι τέτοιες ώστε να επιτρέπεται η παραγωγή ενός τουλάχιστον εμπορεύματος πέραν των όσων απαιτούνται για την αντικατάσταση των μέσων παραγωγής τα οποία αναλώνονται κατά την παραγωγική διαδικασία.

Η Οικονομική Ερμηνεία της Αντίστροφης Μήτρας Leontief

Συμβολίζουμε τα στοιχεία της αντί-στροφης του Leontief ως h_{ij}:

$$[I-A]^{-1} \equiv [h_{ij}]$$

Έτσι, η λύση του συστήματος φυσικών ποσοτήτων μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1,n-1} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n-1,1} & h_{n-1,2} & \cdots & h_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$$

$n-1$ $\quad n_{n-1,1} \quad n_{n-1,2}$

Οι φυσικές ποσότητες των εμπορευμάτων οι οποίες πρέπει να παραχθούν συνολικά ώστε τα εμπορεύματα αυτά να είναι διαθέσιμα στην τελική ζήτηση σε ποσότητες $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$

Προφανώς, η ποσότητα των $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ που θα παραχθούν θα πρέπει να είναι ίση ή μεγαλύτερη από την ποσότητα των $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, δεδομένου ότι τα x_i πρέπει να καλύψουν τα y_i καθώς και την αντίστοιχη ποσότητα $x_1-y_1, x_2-y_2, \dots,$ $x_{n-1}-y_{n-1}$, η οποία αντιστοιχεί στην αντικατάσταση των μέσων παραγωγής που αναλώνονται κατά την παραγωγική διαδικασία (ενδιάμεσες χρήσεις)

Τα στοιχεία της μήτρας των τεχνικών συντελεστών $A \equiv [a_{ij}]$ δίνουν την <u>άμεση</u> ποσότητα σε εμπόρευμα i που απαιτείται για να παραχθεί 1 μονάδα του εμπορεύματος j ως <u>ακαθάριστο</u> προϊόν.

Τα στοιχεία της $[I-A]^{-1} \equiv [h_{ij}]$

δίνουν τη συνολική (άμεση και έμμεση) ποσότητα του εμπορεύματος i που απαιτείται για να προσφερθεί 1 μονάδα του εμπορεύματος j στην τελική ζήτηση.

Κάθε στήλη της $[I-A]^{-1}$ δίνει το ετερογενές σύνολο των εμπορευμάτων $1, 2, \ldots, n-1$ που πρέπει να παραχθούν συνολικά έτσι ώστε να προσφερθεί στην τελική ζήτηση 1 μονάδα του εμπορεύματος j.

Κάθε γραμμή της $[I-A]^{-1}$ δίνει τις

ποσότητες του εμπορεύματος i που πρέπει να παραχθούν έτσι ώστε να προσφερθεί 1 μονάδα κάθε εμπορεύματος στην τελική ζήτηση.

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{bmatrix} 0 & 0,6 \\ 0,3 & 0 \end{bmatrix}$

Άρα, θα έχουμε:

$$[I-A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0,6 \\ 0,3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[I-A] = \begin{bmatrix} 1 & -0,6 \\ -0,3 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα, $[I-A]x = y$ ή

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,6 \\ -0,3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Η λύση του συστήματος είναι:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,2195 & 0,7317 \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0{,}3658 & 1{,}2195 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \end{bmatrix}$$

$[I-A]^{-1}$

Δεδομένου ότι $\lambda_A^{PF} < 1$, έπεται ότι η αντίστροφη μήτρα Leontief μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$[I-A]^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \dots$$

Εννοιολογικά, μπορεί να ερμηνεύσει κανείς τους όρους της δυναμοσειράς ως διαδοχικούς (λογικούς) κύκλους παραγωγής, οι οποίοι απαιτούνται για την [illegible] του τελικού καθαρού προϊόντος.

αποδυτηση ...

Στο αριθμητικό μας παράδειγμα, όπου είχαμε:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0 \end{bmatrix}$$

Έστω ότι θέτουμε $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Συνεπώς,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 \\ 0+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0+0{,}6 \\ 0{,}3+0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}18+0 \\ 0+0{,}18 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0+0{,}108 \\ 0{,}054+0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}0324+0 \\ 0+0{,}0324 \end{bmatrix} + \dots$$