# Ο Πίνακας Εισροών - Εκροών σε Αλγεβρικούς Όρους

Έστω ότι ο Πίνακας Εισροών - Εκροών έχει n γραμμές και n στήλες.

Άρα, ο Πίνακας Εισροών - Εκροών θα είναι της ακόλουθης μορφής:

| | Εκροές | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Εισροές | Κλάδος 1 | Κλάδος 2 | ..... | Κλάδος j | Τελικός Τομέας (στήλη n) |
| Αγαθό 1 | $P_1 X_{11}$ | $P_1 X_{12}$ | ..... | $P_1 X_{1j}$ | $P_1 X_{1n}$ |
| Αγαθό 2 | $P_2 X_{21}$ | $P_2 X_{22}$ | ..... | $P_2 X_{2j}$ | $P_2 X_{2n}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| Αγαθό i | $P_i X_{i1}$ | $P_i X_{i2}$ | ..... | $P_i X_{ij}$ | $P_i X_{in}$ |
| Τελικός Τομέας | $P_n X_{n1}$ | $P_n X_{n2}$ | ..... | $P_n X_{nj}$ | $P_n X_{nn}$ |

$X_{ij} \longrightarrow$ η φυσική ποσότητα του εμπορεύματος i που εισέρχεται στον κλάδο j.

$P_i \longrightarrow$ η τιμή του εμπορεύματος i.

---

Οι φυσικές ποσότητες κάθε γραμμής είναι ομοιογενείς και, άρα, μπορούν να αθροιστούν:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = X_i \,, \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$$

Λόγω της λογιστικής φύσης του Πίνακα Εισροών-Εκροών, το άθροισμα των γραμμών ισούται με το άθροισμα των στηλών.

Μπορούμε να γράψουμε τον Πίνακα Εισροών-Εκροών υπό τη μορφή δύο λογιστικών ταυτοτήτων:

$$
\left.
\begin{array}{l}
P_1 X_{11} + P_1 X_{12} + \dots + P_1 X_{1n} \equiv P_1 X_1 \\
P_2 X_{21} + P_2 X_{22} + \dots + P_2 X_{2n} \equiv P_2 X_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
P_n X_{n1} + P_n X_{n2} + \dots + P_n X_{nn} \equiv P_n X_n
\end{array}
\right] \quad (1)
$$

$$
\left.
\begin{array}{l}
P_1 X_{11} + P_2 X_{21} + \dots + P_n X_{n1} \equiv P_1 X_1 \\
P_1 X_{12} + P_2 X_{22} + \dots + P_n X_{n2} \equiv P_2 X_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
P_1 X_{1n} + P_2 X_{2n} + \dots + P_n X_{nn} \equiv P_n X_n
\end{array}
\right] \quad (2)
$$

Τα συστήματα (1) και (2) είναι δυσεπίλυτα από μαθηματική σκοπιά. Μπορούμε, όμως, να τα απλοποιήσουμε ως εξής:

Ορίζουμε $a_{ij} = \dfrac{X_{ij}}{X_j} \Rightarrow$

$$\boxed{X_{ij} = a_{ij} X_j}$$

Χρησιμοποιούμε τον παραπάνω ορισμό για να απαλείψουμε τα $X_{ij}$ από τα συστήματα (1) και (2):

$$\left.\begin{array}{l}
P_1 a_{11} X_1 + P_1 a_{12} X_2 + \ldots + P_1 a_{1n} X_n \equiv P_1 X_1 \\
P_2 a_{21} X_1 + P_2 a_{22} X_2 + \ldots + P_2 a_{2n} X_n \equiv P_2 X_2 \\
\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
P_n a_{n1} X_1 + P_n a_{n2} X_2 + \ldots + P_n a_{nn} X_n \equiv P_n X_n
\end{array}\right]$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη κάθε εξίσωσης με τις τιμές $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ παίρνουμε:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \equiv x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \equiv x_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \equiv x_n \end{array}\right] \quad (1)'$$

---

Αντιστοίχως, και για το δεύτερο σύστημα εξισώσεων:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 a_{11}x_1 + p_2 a_{21}x_1 + \dots + p_n a_{n1}x_1 \equiv p_1 x_1 \\ p_1 a_{12}x_2 + p_2 a_{22}x_2 + \dots + p_n a_{n2}x_2 \equiv p_2 x_2 \\ \quad\vdots \\ p_1 a_{1n}x_n + p_2 a_{2n}x_n + \dots + p_n a_{nn}x_n \equiv p_n x_n \end{array}\right]$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη κάθε εξίσωσης με το παραγόμενο προϊόν $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ παίρνουμε:

$$\left.\begin{aligned}
p_1 a_{11} + p_2 a_{21} + \dots + p_n a_{n1} &\equiv P_1 \\
p_1 a_{12} + p_2 a_{22} + \dots + p_n a_{n2} &\equiv P_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad & \quad \vdots \qquad \vdots \\
p_1 a_{1n} + p_2 a_{2n} + \dots + p_n a_{nn} &\equiv P_n
\end{aligned}\right] \quad (2)'$$

Σύστημα (1)' $\longrightarrow$ σχέσεις φυσικών ποσοτήτων

Σύστημα (2)' $\longrightarrow$ σχέσεις τιμών

Και οι δύο σχέσεις συνδέονται μέσω των $a_{ij}$.

Τα συστήματα (1)' και (2)' εξακο-λουθούν να είναι λογιστικού τύπου ταυ-τότητες οι οποίες ικανοποιούν αλγεβρικά [illegible],

έναν Πίνακα Εισροών-Εκροών. Για παράδειγμα, εάν θυμηθούμε το αριθμητικό παράδειγμα που χρησιμοποιήσαμε στα προηγούμενα:

| | Εκροές | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Εισροές | Σιτάρι | Σίδηρος | Γαλοπούλες | Τελικός Τομέας | Σύνολο |
| Σιτάρι | 186 | 54 | 30 | 180 | 450 |
| Σίδηρος | 12 | 6 | 3 | 0 | 21 |
| Γαλοπούλες | 9 | 6 | 15 | 30 | 60 |
| Τελικός Τομέας | 18 | 12 | 30 | | 60 |
| Συνολική Εκροή | 450 | 21 | 60 | | |

Το σύστημα (1)' που αντιστοιχεί στον παραπάνω Πίνακα Εισροών-Εκροών είναι:

$$\frac{186}{450}450 + \frac{54}{21}21 + \frac{30}{60}60 + \frac{180}{60}60$$

$$\equiv 450$$

$$\frac{12}{450}450 + \frac{6}{21}21 + \frac{3}{60}60 \equiv 21$$

$$\frac{9}{450}450 + \frac{6}{21}21 + \frac{15}{60}60 + \frac{30}{60}60$$

$$\equiv 60$$

$$\frac{18}{450}450 + \frac{12}{21}21 + \frac{30}{60}60 \equiv 60$$

---

Η σπουδαιότητα των συστημάτων (1)' και (2)' έγκειται στο ότι εμπεριέχουν τα μεγέθη $a_{ij}$, τα οποία έχουν ιδιαίτερη οικονομική σημασία.

Για παράδειγμα, ας εξετάσουμε τα $a_{ij}$ που εμφανίζονται στην πρώτη στήλη του αριθμητικού μας παραδείγματος:

$$\frac{186}{450}, \frac{12}{450}, \frac{9}{450}, \frac{18}{450}$$

ή, γενικότερα,

$$a_{11}, a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}$$

Αυτά τα μεγέθη μας δίνουν τις φυσικές ποσότητες σίτου, σιδήρου, γαλοπούλας, εργασίας, που απαιτούνται, κατά μέσο όρο, για την παραγωγή 1 μονάδας σίτου.

Αποτελούν, δηλαδή, τους τεχνικούς συντελεστές του κλάδου του σίτου. Τα $a_{ij}$ των υπολοίπων κλάδων έχουν ανάλογη ερμηνεία.

Η φύση των $a_{ij}$ είναι σε αντίθεση με τη φύση των $P_i$, $X_i$. Τα πρώτα αφορούν τις τεχνικές συνθήκες παραγωγής, ... βρίσκονται στο χώρο των

Ενώ τα δεύτερα [illegible]

οικονομικών αποφάσεων.

εάν θεωρήσουμε τα $a_{ij}$ σταθερά, τότε τα (1)' και (2)' αποτελούν συστήματα γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους τα $p_i$, $x_i$.

# Το Κλειστό Σύστημα Leontief

Έστω τώρα τα δύο συστήματα εξισώσεων:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \equiv x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \equiv x_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \equiv x_n \end{array}\right] \quad (1)'$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{x} - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \equiv \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{0}$$

$$Ax - x = 0 \Rightarrow$$

$$[A - I]x = 0 \qquad (1)''$$

όπου $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

---

$$\left.\begin{array}{l} P_1 a_{11} + P_2 a_{21} + \ldots + P_n a_{n1} \equiv P_1 \\ P_1 a_{12} + P_2 a_{22} + \ldots + P_n a_{n2} \equiv P_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ P_1 a_{1n} + P_2 a_{2n} + \ldots + P_n a_{nn} \equiv P_n \end{array}\right] (2)'$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} P_1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A^T} \begin{bmatrix} p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}}_{p}$$

$$A^T p = p \Rightarrow$$

$$A^T p - p = 0 \Rightarrow$$

$$[A^T - I]\, p = 0 \qquad (2)''$$

Οι $(1)''$ και $(2)''$ αποτελούν το Κλειστό Σύστημα Leontief.

"Κλειστό" $\longrightarrow$ ως προς την τελική ζήτηση.

Δηλαδή, η τελική ζήτηση συλλαμβάνεται ως ένας αυτόνομος κλάδος του οικονομικού συστήματος. Αντιστοίχως και για τις προστιθέμενες αξίες.

---

Τα συστήματα (1)'' και (2)'' είναι γραμμικά και ομογενή. Αυτά τα συστήματα έχουν πάντα μία τουλάχιστον λύση, δηλαδή την $x=0$ και $p=0$, αντιστοίχως (τετριμμένες λύσεις). Αυτές οι λύσεις, ωστόσο, είναι χωρίς οικονομικό νόημα.

Για να έχει ένα γραμμικό και

ομογενές σύστημα λύσεις άλλες από τη μηδενική, θα πρέπει η ορίζουσα της μήτρας συντελεστών του συστήματος να είναι ίση με το μηδέν. Δηλαδή, στην περίπτωσή μας θα πρέπει:

$$\left| A - I \right| = 0$$

Δηλαδή, θα πρέπει μια στήλη της μήτρας συντελεστών να είναι γραμμικώς εξαρτημένη από τις άλλες

Στην περίπτωσή μας, υπάρχει μια στήλη της μήτρας συντελεστών, η οποία είναι γραμμικώς εξαρτημένη από τις άλλες, και αυτή είναι η στήλη της τελικής ζήτησης.

Περεταίρω, επειδή για την τάξη της μήτρας συντελεστών ισχύει:

$$r(A-I) = n-1$$

ενώ οι άγνωστοι του συστήματος είναι $n$ στο πλήθος, έπεται ότι ένας από τους αγνώστους προσδιορίζεται αυθαίρετα, παίζοντας το ρόλο του μέτρου της αξίας (numeraire). Δηλαδή, η λύση του συστήματος μας δίνει τις σχετικές τιμές.

Δεν αρκεί όμως η ύπαρξη μη μηδενικών λύσεων. Θα πρέπει να διασφαλίζεται και η ύπαρξη λύσης με οικονομικό νόημα (μη αρνητικής):

Δεδομένου ότι $A \geq 0$, από τα Perron - Frobenius (P-F) θεωρήματα έπεται ότι η $\lambda = 1$ αποτελεί ιδιοτιμή της $A$ και ότι αυτή αποτελεί την ιδιοτιμή μεγίστου μέτρου και, άρα, συνδέεται με μοναδικό δεξιό ιδιοδιάνυσμα.

---