

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΙΙ**

Φεβρουάριος 2024
Γρηγόρης Κόρδας

1. Για την αθροιστική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (cdf)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{για } x < -1, \\ \frac{x+2}{4} & \text{για } -1 \leq x < 1, \\ 1 & \text{για } x \geq 1. \end{cases}$$

Κάντε την γραφική της παράσταση και βρείτε (a) $\Pr(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2})$; (b) $\Pr(X = 0)$; (c) $\Pr(X = 1)$; (d) $\Pr(2 < X \leq 3)$.

2. Έστω X με pdf $f(x) = 4x^3$, για $0 < x < 1$, και μηδέν αλλού. Βρείτε την cdf και την pdf της $Y = -8 \ln X$.

3. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) μιας θετικής τυχαίας μεταβλητής X που ακολουθεί την Εκθετική κατανομή (Exponential distribution) είναι

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0,$$

όπου $\lambda > 0$ είναι η παράμετρος της κατανομής.

- (a) Δώστε παραδείγματα τυχαίων μεταβλητών που παρατηρούμε στον πραγματικό κόσμο και οι οποίες θα μπορούσαν να ακολουθούν την εκθετική κατανομή.
- (b) Κάντε την γραφική παράσταση της f για $\lambda = 1/2, 1, 2$, και 4 .
- (c) Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (cdf) F της X .
- (d) Βρείτε τον μέσο και την διακύμανση της X .
- (e) Βρείτε την ροπογεννήτρια συνάρτηση (mgf) της X .

Έστω ένα τυχαίο δείγμα X_1, X_2, \dots, X_n από την Εκθετική κατανομή.

- (f) Βρείτε την εκτιμήτρια της Μεθόδου των Ροπών (Method of Moments Estimator) για την παράμετρο λ .
- (g) Βρείτε την εκτιμήτρια της Μέγιστης Πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood Estimator) για την παράμετρο λ .
- (h) Για το παρακάτω τυχαίο δείγμα, δώστε την γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανοφάνειας, βρείτε την τιμή του εκτιμητή του λ που μεγιστοποιεί την συνάρτηση, και εκτιμήστε την διακύμανσή του.

[1] 0.160021465 0.383017151 3.029690489 0.295363020 1.226371339 6.131337508
 [7] 0.485471141 2.316933810 0.125681936 0.749602616 1.004457839 0.096972627
 [13] 0.850523008 0.253371944 0.001502604 1.844612349 2.553813087 1.144006684
 [19] 1.425057590 1.255048647 0.745929708 2.483155390 0.883557124 1.398841325
 [25] 0.700026321 0.114850903 0.201933527 0.063479488 0.572179391 0.124318243
 [31] 0.594915963 0.757798227 0.754518831 0.550285684 3.197685264 1.364723058
 [37] 0.422842591 1.077204095 2.853979170 3.639057582

4. Στο αρχείο **blooming.zip** υπάρχουν ΣΚΟΡ από το το παιχνίδι **Blooming Gardens**, όπως είδαμε στην τάξη.

(a) Εξηγήστε γιατί η κατανομή Gumbel είναι καλό υπόδειγμα για αυτά τα στοιχεία, και τρέξτε το πρόγραμμα στη **R** που υπάρχει στο zip αρχείο για να βρείτε τις εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας (mle) για τα στοιχεία αυτά.

(b) Βρείτε στο διαδίκτυο πληροφορίες για το λεγόμενο **Elo Rating System** που χρησιμοποιείτε στο σκάκι για να αξιολογούνται οι παίκτες, και εξηγήστε πως θα μπορούσαμε να συγκρίνουμε δύο παίκτες του παιχνιδιού Blooming Gardens με αυτό τον τρόπο.