

A. N. Καραγάνης

# **Το υπόδειγμα του απλού δείκτη**

*Σημειώσεις Κεφαλαιαγοράς - Χρηματαγοράς*

Αθήνα 2021



## *Κεφάλαιο 1*

# **Συντελεστής ΒΕΤΑ,**

# **ή το υπόδειγμα του απλού δείκτη**

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται καταρχήν οι βασικές έννοιες για τις επενδύσεις, τις αποδόσεις των επενδύσεων και τους κινδύνους για τους επενδυτές που συνεπάγεται η τοποθέτηση των κεφαλαίων τους. Ακολούθως παρατίθενται οι προϋποθέσεις που πρέπει να πληρούνται ώστε να είναι δυνατή η ανάλυση χαρτοφυλακίου, σύμφωνα με τις θεωρητικές παραδοχές. Τέλος στην τρίτη ενότητα του πρώτου κεφαλαίου παρουσιάζεται το μαθηματικό και στατιστικό υπόβαθρο του υποδείγματος του απλού δείκτη.

## **1. Βασικές έννοιες για τις επενδύσεις, τις αποδόσεις των επενδύσεων και τους κινδύνους που συνεπάγεται η τοποθέτηση κεφαλαίων**

Η επένδυση από τη σκοπιά της τοποθέτησης κεφαλαίων αποτελεί κατ'αρχήν αποχή από τη σημερινή κατανάλωση. Σκοπός αυτής της αποχής είναι η αύξηση του πλούτου, έτσι ώστε να γίνει δυνατή στο μέλλον μεγαλύτερη κατανάλωση. Κατά συνέπεια, επένδυση είναι η σημερινή δέσμευση κεφαλαίων για μιά χρονική περίοδο, προκειμένου να εξασφαλισθεί μιά μελλοντική ροή κεφαλαίων που θα αποζημιώσει τον επενδυτή, κατά επενδυμένη μονάδα κεφαλαίου, για το χρόνο δέσμευσης των κεφαλαίων, τον προσδοκώμενο πληθωρισμό και την αβεβαιότητα για την υλοποίηση τελικά της μελλοντικής ροής των κεφαλαίων<sup>1</sup>.

Το ίδιο γνώρισμα αυτού του ορισμού για την επένδυση αφορά στη συμπεριφορά του επενδυτή. Πιό συγκεκριμένα, ο επενδυτής διαπραγματεύεται τη σημερινή αξία του κεφαλαίου που διαθέτει με κάποια μελλοντική -προσδοκώμενη- αξία αυτού του κεφαλαίου που δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή. Επομένως, ο επενδυτής από τη σκοπιά της τοποθέτησης των κεφαλαίων που διαθέτει, ενδιαφέρεται ουσιαστικά για δύο χαρακτηριστικά των επενδύσεων που πραγματοποιεί. Ενδιαφέρεται, πρώτον για την απόδοση των επενδύσεων, δηλαδή την όσο το δυνατόν μεγαλύτερη μελλοντική αξία του αρχικά επενδεδυμένου κεφαλαίου και δεύτερον για τους κινδύνους που αναλαμβάνει ο ίδιος από την μη πραγματοποίηση αυτής της απόδοσης των επενδύσεων που προσδοκά.

Η έννοια της απόδοσης μιας επένδυσης μπορεί να θεωρηθεί σαν αύξηση του πλούτου από την επένδυση. Έτσι, απόδοση μια επένδυσης είναι η διαφορά ανάμεσα στα κεφάλαια που επενδύθηκαν αρχικά και στα κεφάλαια που αποδόθηκαν τελικά. Συνηθίζεται δε να λαμβάνεται ως μέτρο της απόδοσης η ποσοστιαία έκφραση αυτής της διαφοράς, δηλαδή ο λόγος της διαφοράς των κεφαλαίων που αποδόθηκαν τελικά μείον τα κεφάλαια που επενδύθηκαν αρχικά προς τα κεφάλαια που επενδύθηκαν αρχικά.

Η έννοια των κινδύνων που αντιμετωπίζει ο επενδυτής προσδιορίζονται πάντα σε σχέση με τις προσδοκώμενες αποδόσεις της επένδυσης. Η αβεβαιότητα που χαρακτηρίζει την απόδοση της επένδυσης και κατά συνέπεια ο κίνδυνος που

---

<sup>1</sup> Reilly, F., K., *Investment Analysis and Portfolio Management*, The Dryden Press, Chicago, 1989.

αναλαμβάνει ο επενδυτής μεγαλώνει όσο μεγαλώνει και το εύρος που μπορεί να κυμανθεί η απόδοση της επένδυσης. Με άλλα λόγια όσο μεγαλύτερο είναι το εύρος των πιθανών αποδόσεων τόσο πιο αβέβαιος είναι ο επενδυτής για το τι θα συμβεί στην πραγματικότητα και επομένως ο κίνδυνος, δηλαδή η μικρότερη από την αναμενόμενη απόδοση ή και η απώλεια του κεφαλαίου, που αναλαμβάνει ο επενδυτής είναι μεγαλύτερος.

Οι έννοιες που έχουν αναπτυχθεί μέχρι τώρα δεν αναφέρονται σε κάποια συγκεκριμένη μορφή τοποθέτησης κεφαλαίων. Το ενδιαφέρον όμως εδώ περιορίζεται στα χρηματοοικονομικά προϊόντα που διατίθενται στους επενδυτές μέσω της κεφαλαιαγοράς. Η τοποθέτηση των κεφαλαίων του επενδυτή έχει τη μορφή της αγοράς τίτλων, που συλλογικά αναφέρονται σαν κινητές αξίες.

Οι κινητές αξίες είναι τίτλοι που μεταβιβάζονται ελεύθερα και δημιουργούνται από τις επιχειρήσεις, ή από φορείς του δημοσίου, σε αναγνώριση μιας εισφοράς που αποτελείται από ρευστό χρήμα. Στις κινητές αξίες περιλαμβάνονται τρεις διακεκριμένες κατηγορίες τίτλων, οι ομολογίες δηλαδή αξίες σταθερού εισοδήματος, οι μετοχές δηλαδή αξίες μεταβλητού εισοδήματος και οι νέοι τύποι κινητών αξιών που ενώ από νομική άποψη χαρακτηρίζονται ομολογίες, από εισοδηματική άποψη πρόκειται ουσιαστικά για μεικτές αξίες.

Οι ομολογίες ή ομόλογα είναι πιστωτικοί τίτλοι που παραδίδονται από τους εκδότες, επιχειρήσεις ή δημόσιο, στους δανειστές - επενδυτές κεφαλαίων σε αναγνώριση του χρέους των. Ο κάτοχος μιας ομολογίας υπέχει θέση πιστωτή και η ίδια η ομολογία αποτελεί την έγγραφη απόδειξη του χρέους του εκδότη. Η έκδοση και πώληση ομολογιών γίνεται προκειμένου να καλυφθούν οι χρηματοδοτικές ανάγκες του φορέα - εκδότη μέσω δημόσιου δανεισμού. Τα δικαιώματα που απορρέουν από την κατοχή των ομολογιών προσδιορίζονται αυστηρά στο συμβόλαιο έκδοσης και στο σώμα του τίτλου. Τα στοιχεία που χαρακτηρίζουν τις αξίες σταθερού εισοδήματος είναι η τιμή έκδοσης, ο τόκος, η τιμή επιστροφής, η διάρκεια και ο τρόπος επιστροφής του κεφαλαίου. Επιπλέον στοιχείο μπορεί να αποτελεί και η παροχή εγγύησης. Αξίες σταθερού εισοδήματος είναι τα δάνεια του δημοσίου, τα δάνεια των δημόσιων επιχειρήσεων και οργανισμών και τέλος τα ομολογιακά δάνεια των ιδιωτικών επιχειρήσεων.

Οι μετοχές είναι τίτλοι που παραδίδονται στους εταίρους μίας επιχείρησης έναντι της εισφοράς που αυτοί καταβάλλουν. Ο εταίρος ή κομιστής αυτών των τίτλων

αποκτά δικαίωμα ιδιοκτησίας επί της επιχείρησης, γεγονός που συνεπάγεται την ανάληψη κινδύνου αναφορικά με τις δραστηριότητες και τα οικονομικά αποτελέσματα της επιχείρησης. Αν η εταιρία έχει αρνητική πορεία ο επενδυτής μπορεί να χάσει την εισφορά του. Το εισόδημα ή μέρισμα που προκύπτει από την κατοχή των μετοχών εξαρτάται από την πορεία αφενός της επιχείρησης και αφετέρου της οικονομίας και συνεπώς δεν μπορεί να προσδιορισθεί εκ των προτέρων. Τέλος, οι μετοχές που μπορούν να διαπραγματευτούν στο Χρηματιστήριο πρέπει να ανήκουν σε ανώνυμες εταιρίες και διακρίνονται σε κοινές, ονομαστικές και προνομιούχες.

Οι μικτές αξίες εκδίδονται προκειμένου να εξισορροπηθεί ο κίνδυνος που αναλαμβάνουν οι επενδυτές από την αναμενόμενη απόδοση με βάση τη γενικότερη οικονομική συγκυρία και τις ιδιαίτερες συνθήκες και στόχους της επιχείρησης που εκδίδει τους τίτλους. Οι μικτές αξίες διακρίνονται σε μετατρέψιμες προνομιούχες μετοχές, μετατρέψιμες ομολογίες σε μετοχές και ομολογίες με συμμετοχή στα κέρδη.

Ο παράγοντας που διαφοροποιεί τις ανωτέρω αξίες στη χρηματιστηριακή αγορά είναι η αναμενόμενη απόδοση σε σχέση με τον αναλαμβανόμενο κίνδυνο από την διατήρησή τους. Ο επενδυτής μπορεί να αποκομίσει πρόσθετα οφέλη ή να αποφύγει κινδύνους, τοποθετώντας τα κεφάλαια του σε διαφορετικές επενδύσεις, να διαφοροποιήσει δηλαδή τη σύνθεση του χαρτοφυλακίου του. Διαφοροποίηση είναι η τοποθέτηση από έναν επενδυτή κεφαλαίων σε διαφορετικά είδη επενδύσεων- τίτλων που αποφέρουν διαφορετικές αποδόσεις και έχουν διαφορετικούς κινδύνους, προκειμένου αυτός να μεγιστοποιήσει την απόδοση ή να ελαχιστοποιήσει τους κινδύνους. Οι τοποθετήσεις υψηλής απόδοσης συνοδεύονται από υψηλούς κινδύνους, ενώ οι τοποθετήσεις χαμηλής απόδοσης συνοδεύονται από χαμηλούς κινδύνους. Το σύνολο των τίτλων που έχει στην κατοχή του ο επενδυτής αποτελεί το χαρτοφυλάκιο του.

Η συμπεριφορά των επενδυτών χαρακτηρίζεται από την προσπάθεια μεγιστοποίησης της απόδοσης του χαρτοφυλακίου τους. Από την άλλη πλευρά όμως οι επενδυτές χαρακτηρίζονται από την τάση αποφυγής των κινδύνων που συνεπάγονται οι τοποθετήσεις κεφαλαίων. Αυτό σημαίνει ότι ένας ορθολογικός επενδυτής βασίζει τις αποφάσεις του στην αναμενόμενη απόδοση και στον αναλαμβανόμενο κίνδυνο από τις επιλογές του. Ο επενδυτής αυτός, για δεδομένο ύψος αναμενόμενης απόδοσης, προτιμά την επένδυση με τον μικρότερο κίνδυνο, ενώ για δεδομένο ύψος κινδύνου τοποθετεί τα κεφάλαια του στην επένδυση με τη μεγαλύτερη απόδοση. Το πρόβλημα που

αντιμετωπίζει επομένως ο επενδυτής είναι η κατάλληλη σύνθεση του χαρτοφυλακίου. Αυτό προϋποθέτει την ανάλυση της συμπεριφοράς κάθε τίτλου ξεχωριστά, αφού η συνολική απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι ο μέσος όρος των επιμέρους αποδόσεων, ενώ ο συνολικός κίνδυνος είναι συνάρτηση των επιμέρους κινδύνων από την κατοχή των διαφόρων τίτλων. Οι τίτλοι με το μεγαλύτερο εύρος αποδόσεων και κινδύνων που τίθενται σε διαπραγμάτευση στην κεφαλαιαγορά είναι οι μετοχές.

Η απόδοση μιας μετοχής διακρίνεται στη συστηματική απόδοση ή *μέρισμα* και την μη συστηματική απόδοση δηλαδή την *κεφαλαιακή απόδοση ή υπεραξία της μετοχής*. Τα τυχόν κέρδη ενός επενδυτή από δωρεάν μετοχές δεν μπορούν εννοιολογικά να θεωρηθούν ως τμήμα της απόδοσης μιας μετοχής αλλά οπωσδήποτε αποτελούν απόδοση για το ποσοστό της συμμετοχής ενός επενδυτή - μετόχου στο μετοχικό κεφάλαιο μιάς εταιρείας. *Μέρισμα* είναι η ετήσια απόδοση μιας μετοχής από την επιχειρηματική δράση της εταιρείας. Το μέρισμα προκύπτει από τα διανεμόμενα κέρδη, προτείνεται από το Δ.Σ. της εταιρείας και εγκρίνεται από την Γενική Συνέλευση των μετόχων. *Κεφαλαιακή απόδοση ή Υπεραξία μετοχής* είναι η διαφορά μεταξύ της τιμής που αγόρασε τη μετοχή ο επενδυτής και της τρέχουσας τιμής της μετοχής στο Χρηματιστήριο (οιωνεί τιμή πώλησης). Η απόδοση αυτή εξαρτάται από πολλούς παράγοντες που με τη σειρά τους διακρίνονται σε συστηματικούς και μη συστηματικούς. Στους συστηματικούς παράγοντες ανήκουν οι τυχόν αυξήσεις των υπόλοιπων κονδυλίων της καθαρής θέσης οι οποίες προσδιορίζουν συνολικά μεγαλύτερο ύψος αυτής, η οικονομική συγκυρία στον κλάδο που δραστηριοποιείται η επιχείρηση. Στους μη συστηματικούς παράγοντες ανήκουν οι προσδοκίες των επενδυτών. Ο σχηματισμός θετικών ή αρνητικών προσδοκιών εξαρτάται από το κλίμα και την ψυχολογία της αγοράς, τις συνθήκες που επικρατούν στην αγορά, το ύψος της μελλοντικής διαμόρφωσης της καθαρής θέσης της εταιρείας κ.λ.π.

## **2. Προϋποθέσεις για την ανάλυση χαρτοφυλακίου**

Στην κεφαλαιαγορά κάθε επενδυτής βρίσκεται αντιμέτωπος με ένα πολύ μεγάλο αριθμό τίτλων από τους οποίους πρέπει να διαλέξει εκείνους που θα τοποθετήσει τα κεφάλαια του. Επομένως ο επενδυτής αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα απόφασης προκειμένου να συνθέσει το χαρτοφυλάκιό του. Ο επενδυτής κατά τη διαδικασία λήψης απόφασης πρέπει να εξετάσει τις εναλλακτικές δυνατότητες που έχει στη διάθεση του,

τα κριτήρια και τις διαδικασίες που θα χρησιμεύσουν στην αξιολόγηση των εναλλακτικών δυνατοτήτων και τέλος να εφαρμόσει αυτά τα κριτήρια.

Κατ' αρχήν, ο επενδυτής πρέπει να γνωρίζει τις αποδόσεις των τίτλων στους οποίους πρόκειται να τοποθετήσει τα κεφάλαια του. Στο σημείο αυτό όμως πρέπει να σημειωθεί ότι θεωρητικά δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα διαθέσιμοι στην αγορά δύο τίτλοι που αποφέρουν διαφορετικές αποδόσεις. Τούτο διότι, κανένας επενδυτής δεν θα είναι διατεθειμένος να τοποθετήσει τα κεφάλαια του στον τίτλο με την μικρότερη απόδοση. Επομένως, είτε υπάρχει μόνο ένα ποσοστό απόδοσης για όλους τους τίτλους στην αγορά, πράγμα που δεν ισχύει, είτε οι αποδόσεις των τίτλων δεν είναι βέβαιες. Η αβεβαιότητα για τα οικονομικά αποτελέσματα που συνοδεύει τις επιλογές των επενδυτών έχει σαν συνέπεια την ανάληψη κινδύνων από τους επενδυτές.

Η ύπαρξη κινδύνου σημαίνει ότι ο επενδυτής δεν γνωρίζει με βεβαιότητα την ακριβή απόδοση του κάθε τίτλου στον οποίο επενδύει τα κεφάλαιά του. Αντίθετα, η απόδοση των τίτλων περιγράφεται από ολόκληρη σειρά, πιθανών πια, τιμών. Δηλαδή, κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας - κινδύνου η απόδοση ενός τίτλου είναι άγνωστη και περιγράφεται από τη συνάρτηση κατανομής της, δηλαδή από ένα κατάλογο στον οποίο έχουν αντιστοιχισθεί όλες οι πιθανές αποδόσεις του συγκεκριμένου τίτλου με την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί η συγκεκριμένη κάθε φορά απόδοση στην κεφαλαιαγορά. Η συνάρτηση αυτή αποτελεί για τους επενδυτές το όργανο με το οποίο εκτιμούν την απόδοση και τον συνεπαγόμενο κίνδυνο από την κατοχή τίτλων και επιλύουν τελικά το πρόβλημα απόφασης για τη σύνθεση του χαρτοφυλακίου.

Η μελέτη των αποδόσεων των τίτλων για τη σύνθεση του χαρτοφυλακίου με αυτό το τρόπο, γίνεται πλέον πρόβλημα στατιστικής εκτίμησης. Στο πλαίσιο αυτό, ως απόδοση του τίτλου ορίζεται η αναμενόμενη τιμή της συνάρτησης κατανομής, δηλαδή ο μέσος όρος των αποδόσεων, αφού κατά τα γνωστά, τιμές της συνάρτησης κατανομής, είναι οι αποδόσεις του τίτλου. Η απόδοση εκτιμάται από την ακόλουθη έκφραση

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^N P_i R_i$$

όπου:  $P_i$  η πιθανότητα να εμφανισθεί η  $i$ -οστή απόδοση  
 $R_i$  η  $i$ -οστή απόδοση

Συνήθως όμως οι αποδόσεις των τίτλων έχουν την ίδια πιθανότητα εμφάνισης. Δηλαδή η πιθανότητα να πωληθεί μία μετοχή σε μία τιμή και να σημειώσει έτσι μία συγκεκριμένη απόδοση, είναι η ίδια με την πιθανότητα να πωληθεί σε μία οποιαδήποτε άλλη τιμή και να σημειώσει μια οποιαδήποτε άλλη απόδοση. Κατά συνέπεια η



αναμενόμενη απόδοση υπολογίζεται από τον αστάθμητο αριθμητικό μέσο όρο. Τέτοιο παράδειγμα, που είναι και ο κανόνας, είναι η εκτίμηση των αποδόσεων των μετοχών από τις καθημερινές τιμές κλεισίματος των τίτλων στο Χρηματιστήριο. Η προηγούμενη έκφραση απλοποιείται ως ακολούθως

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^N \frac{R_i}{N} \quad \text{όπου:} \quad R_i \quad \text{η } i\text{-οστή απόδοση}$$

$N$  ο αριθμός των διαθέσιμων παρατηρήσεων

Η εκτίμηση του κινδύνου για κάθε τίτλο που αναλαμβάνει ο επενδυτής, γίνεται σε συνάρτηση με την αναμενόμενη απόδοση του τίτλου αυτού. Ο κίνδυνος από την κατοχή του τίτλου αυξάνει όσο μεγαλύτερο είναι το εύρος που κυμαίνεται η απόδοση του γύρω από την αναμενόμενη τιμή της απόδοσης. Στατιστικά, το εύρος της κύμανσης γύρω από το μέσο της κατανομής, μετράται με την διακύμανση και επομένως έτσι αποτιμάται ο κίνδυνος που αναλαμβάνει ο επενδυτής. Στη συνήθη περίπτωση, όπου όλες οι αποδόσεις έχουν την ίδια πιθανότητα εμφάνισης, η διακύμανση δίνεται από την έκφραση

$$\sigma_e^2 = \sum_{j=1}^N \frac{(R_j - \bar{R})^2}{N} \quad \text{όπου:} \quad R_i \quad \text{η } i\text{-οστή απόδοση}$$

$N$  ο αριθμός των διαθέσιμων παρατηρήσεων

Όταν οι πιθανότητες εμφάνισης των αποδόσεων ποικίλουν, η έκφραση για τη διακύμανση τροποποιείται κατά αναλογία με την σταθμισμένη εκτίμηση της αναμενόμενης απόδοσης. Δηλαδή

$$\sigma_e^2 = \sum_{j=1}^N P_i (R_i - \bar{R})^2 \quad \text{όπου:} \quad R_i \quad \text{η } i\text{-οστή απόδοση}$$

$P_i$  η πιθανότητα να εμφανισθεί η  $i$ -οστή απόδοση

$N$  ο αριθμός των διαθέσιμων παρατηρήσεων

Η απόδοση του χαρτοφυλακίου του επενδυτή είναι η σταθμισμένη απόδοση όλων των επιμέρους τίτλων που το απαρτίζουν. Ως στάθμιση χρησιμοποιείται η ποσοστιαία σύνθεση κατά τίτλο του χαρτοφυλακίου. Από την άλλη πλευρά ο κίνδυνος ενός χαρτοφυλακίου, δηλαδή η διακύμανση του, είναι συνάρτηση των κινδύνων που έχουν οι τίτλοι που το συνθέτουν. Η συμβολή στη διακύμανση του χαρτοφυλακίου, κάθε τίτλου ξεχωριστά, γίνεται όλο και μικρότερη, καθώς αυξάνεται ο αριθμός των τίτλων που συμπεριλαμβάνονται στο χαρτοφυλάκιο. Δηλαδή, η εισαγωγή όλο και περισσότερων τίτλων στο χαρτοφυλάκιο εξαλείφει την επίδραση από τον κίνδυνο που επιφέρει κάθε τίτλος ξεχωριστά. Ταυτόχρονα ο κίνδυνος από την κατοχή του

χαρτοφυλακίου επηρεάζεται όλο και περισσότερο από τη σχέση της κύμανσης της απόδοσης ενός τίτλου με την απόδοση των υπόλοιπων τίτλων του χαρτοφυλακίου. Η ελάχιστη διακύμανση του χαρτοφυλακίου, θεωρητικά επιτυγχάνεται αν συμπεριληφθούν όλοι οι διαθέσιμοι τίτλοι στη σύνθεση του. Τότε η διακύμανση εξαρτάται μόνο από τη σχέση της κύμανσης της απόδοσης ενός τίτλου με την απόδοση των υπόλοιπων τίτλων του χαρτοφυλακίου.

Ο καθορισμός ενός χαρτοφυλακίου ελάχιστης διακύμανσης πραγματοποιείται αφού καθορισθούν πρώτα η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου και η τυπική απόκλιση της αναμενόμενης απόδοσης. Το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διακύμανσης είναι εκείνο το χαρτοφυλάκιο που έχει το μικρότερο κίνδυνο από οποιοδήποτε άλλο χαρτοφυλάκιο. Η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι

$$\bar{R}_p = \sum_{i=1}^N X_i \bar{R}_i$$

όπου  $X_i$  η ποσοστιαία σύνθεση  
κατά τίτλο του  
χαρτοφυλακίου  
 $\bar{R}_i$  η αναμενόμενη απόδοση  
του τίτλου  $i$

ενώ ο κίνδυνος από την διατήρηση αυτού του χαρτοφυλακίου, δηλαδή η τυπική απόκλιση υπολογίζεται από την έκφραση

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^N X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N X_i X_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}$$

όπου  $X_i$  η ποσοστιαία σύνθεση  
κατά τίτλο του  
χαρτοφυλακίου  
 $\sigma_i$  η τυπική απόκλιση του  
τίτλου  $i$   
 $\rho_{ij}$  ο συντελεστής  
συσχέτισης των τίτλων  $i$   
και  $j$

Οι εκφράσεις αυτές καθορίζουν τα απαραίτητα στοιχεία για την ανάλυση χαρτοφυλακίου. Από την πρώτη εξίσωση φαίνεται ότι πρέπει να γίνουν εκτιμήσεις της απόδοσης για κάθε ένα τίτλο που είναι υποψήφιος να συμπεριληφθεί στη σύνθεση του χαρτοφυλακίου. Από την δεύτερη εξίσωση φαίνεται ότι πρέπει να γίνουν εκτιμήσεις της διακύμανσης κάθε τίτλου και επιπλέον να υπολογισθούν οι συντελεστές συσχέτισης για κάθε δυνατό ζεύγος τίτλων.

Η σύνθεση του χαρτοφυλακίου επιβάλλει την εκτίμηση όλων των δυνατών συσχετίσεων των τίτλων που είναι υποψήφιοι να συμπεριληφθούν στο χαρτοφυλάκιο. Το αποτέλεσμα είναι ότι το πρόβλημα της σύνθεσης του χαρτοφυλακίου γίνεται ιδιαίτερα απαιτητικό σε υπολογισμούς. Αν υποθεθεί ότι ένας επενδυτής ενδιαφέρεται για  $N$  τίτλους, τότε πρέπει να εκτιμηθούν όλοι οι συντελεστές συσχέτισης  $\rho_{ij}$ , ένας για κάθε ζεύγος τίτλων  $i$  και  $j$ , εκτός από τις  $N$  εκτιμήσεις για τον κίνδυνο από την κατοχή ενός μεμονωμένου τίτλου που εκτιμώνται αρχικά. Ο αριθμός των εκτιμήσεων που πρέπει να γίνουν είναι πολύ μεγάλος. Πιο συγκεκριμένα για να βρεθεί ο αριθμός των αναγκαίων υπολογισμών ισχύουν τα ακόλουθα. Ο πρώτος δείκτης  $i$  του συντελεστή συσχέτισης μπορεί να πάρει  $N$  τιμές, μία για κάθε τίτλο, ενώ ο δεύτερος δείκτης παίρνει  $(N-1)$  τιμές, αφού ισχύει  $i \neq j$ . Αυτό αν εφαρμοσθεί για όλους τους τίτλους, σημαίνει ότι πρέπει να εκτιμηθούν συνολικά  $N(N-1)$  συντελεστές συσχέτισης. Ωστόσο, επειδή ο συντελεστής συσχέτισης ανάμεσα στο  $i$  και  $j$  είναι ο ίδιος με το συντελεστή συσχέτισης ανάμεσα στο  $j$  και  $i$ , αρκεί να εκτιμηθούν μόνο  $N(N-1)/2$  συντελεστές συσχέτισης. Ακόμα και έτσι όμως ο όγκος των υπολογισμών είναι τεράστιος. Παραδείγματος χάριν, αν υποθεθεί ότι παρακολουθούνται 100 τίτλοι τότε οι απαιτούμενες συσχετίσεις φθάνουν τις 4950 συν τις 100 εκτιμήσεις για τον κίνδυνο από την κατοχή κάθε μεμονωμένου τίτλου. Αν υποθεθεί ότι παρακολουθούνται 200 τίτλοι, τότε οι απαιτούμενες συσχετίσεις φθάνουν τις 19900, πράγμα που κάνει πρακτικά αδύνατη την παρακολούθηση του χαρτοφυλακίου.

Το υπόδειγμα απλού δείκτη αναπτύχθηκε για να αντιμετωπίσει και να απλοποιήσει αυτό το πρόβλημα και βασίζεται κυρίως στην υπόθεση ότι η μεταβολή στην αξία όλων των τίτλων οφείλεται στην επίδραση ενός μοναδικού παράγοντα. Παρατηρείται, ότι οι τιμές των περισσότερων τίτλων συνήθως εμφανίζουν ανοδικές τάσεις όταν ολόκληρη η αγορά ανεβαίνει, ενώ οι πτωτικές τάσεις στους περισσότερους τίτλους εμφανίζονται συνήθως όταν και η αγορά παρουσιάζει πτωτικές τάσεις. Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι η απόδοση της αγοράς συνήθως μετράται με κάποιον από τους υπάρχοντες γενικούς δείκτες του Χρηματιστηρίου.

Αυτή η παρατήρηση, που επαληθεύεται και εμπειρικά, αποτελεί τον πυρήνα της θεωρητικής θεμελίωσης του υποδείγματος του απλού δείκτη. Έτσι, η μεταβολή στην αξία κάθε τίτλου οφείλεται στην ανταπόκριση που δείχνει αυτός στις κινήσεις της αγοράς. Συνεπώς αυτό που απομένει είναι η εκτίμηση της σχέσης που συνδέει την απόδοση αυτού του τίτλου με την απόδοση της αγοράς. Οι παράμετροι που απαιτούνται

γιά το υπόδειγμα, δηλαδή για την εκτίμηση της σχέσης που συνδέει τον κάθε τίτλο με την αγορά είναι το ALPHA, το BETA και η διακύμανση των καταλοίπων της εξίσωσης -ο κίνδυνος από την κατοχή του τίτλου, ανεξάρτητα από την κίνηση της αγοράς. Δηλαδή για κάθε τίτλο απαιτούνται τρεις εκτιμήσεις. Επιπλέον απαιτείται η εκτίμηση της μέσης απόδοσης της αγοράς και η διακύμανση της αγοράς που αντιπροσωπεύει τον κίνδυνο-αβεβαιότητα για τις κινήσεις της αγοράς. Συνεπώς, το σύνολο των εκτιμήσεων που απαιτούνται για το υπόδειγμα, αν υποθεθεί ότι παρακολουθούνται  $N$  τίτλοι, είναι  $3N+2$ . Ετσι αν το  $N$  είναι 100 τότε οι απαιτούμενες εκτιμήσεις είναι 302, ενώ αν το  $N$  διπλασιασθεί τότε οι εκτιμήσεις απλά διπλασιάζονται, δηλαδή 602. Είναι προφανές ότι το πρόβλημα έχει απλοποιηθεί σημαντικά.

Η αξία της εκτίμησης του BETA δεν περιορίζεται μόνο στο σχεδιασμό του χαρτοφυλακίου, αλλά είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην ανάλυση των κινήσεων κάθε ενός τίτλου ξεχωριστά. Η τιμή του συντελεστή BETA είναι μέτρο της ευαισθησίας των κινήσεων της αξίας του τίτλου που οφείλονται στις συνθήκες που διαχρονικά επικρατούν στην αγορά. Ως εκ τούτου οι εκτιμήσεις των τιμών του BETA διαφοροποιούνται από περίοδο σε περίοδο ανατακλώντας τις απόψεις του επενδυτικού κοινού για το συγκεκριμένο τίτλο.

### 3. Ο συντελεστής BETA ενός τίτλου

Το υπόδειγμα του απλού δείκτη βασίζεται στην παρατήρηση ότι οι τιμές των τίτλων σε γενικές γραμμές ανεβαίνουν, όταν η αγορά ανεβαίνει και πέφτουν όταν και η αγορά είναι πεσμένη και στην παραδοχή ότι η κίνηση της αγοράς αποτιμάται από το δείκτη τιμών του Χρηματιστηρίου. Στο υπόδειγμα οι μεταβολές των τιμών της μετοχής δηλαδή η μεταβολή της υπεραξίας της συσχετίζεται με τη μεταβολή του δείκτη τιμών του Χρηματιστηρίου. Αυτό σημαίνει ότι ένα τμήμα της μεταβολής της τιμής των μετοχών και επομένως της απόδοσης που αποφέρουν οφείλεται στην κίνηση της αγοράς ενώ το υπόλοιπο τμήμα οφείλεται σε παράγοντες που δεν σχετίζονται με τις συνθήκες που επικρατούν στην αγορά. Η μαθηματική διατύπωση επομένως της σχέσης που συνδέει την απόδοση ενός τίτλου και την απόδοση της αγοράς είναι

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m$$

όπου:  $R_i$  απόδοση μιάς μετοχής  $i$   
 $R_m$  απόδοση της αγοράς δηλαδή του δείκτη χρηματιστηρίου

- $\alpha_i$  είναι το τμήμα της μεταβολής της απόδοσης του τίτλου που δεν σχετίζεται με τις κινήσεις στην αγορά και είναι μία τυχαία μεταβλητή
- $\beta_i$  είναι μία σταθερά που αποτιμά την επίδραση στην απόδοση ενός τίτλου που οφείλεται στις μεταβολές της απόδοσης της αγοράς

Με την ανωτέρω μαθηματική διατύπωση επετεύχθη η ανάλυση της απόδοσης ενός τίτλου σε δύο συνιστώσες, σε εκείνη που επηρεάζεται από παράγοντες της αγοράς και σε εκείνη που δεν επηρεάζεται. Το  $\beta_i$  είναι ένα μέτρο της ευαισθησίας μίας μετοχής στις μεταβολές της αγοράς. Μία τιμή του  $\beta_i = 2$  σημαίνει ότι η απόδοση της εν λόγω μετοχής θα αυξηθεί κατά 2%, αν η απόδοση της αγοράς αυξηθεί κατά 1%. Ο συντελεστής BETA που εκτιμάται από το υπόδειγμα δείχνει την επίδραση των συνθηκών που επικρατούν στην αγορά πάνω στη μεταβολή της υπεραξίας της μετοχής. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι η απόδοση της αγοράς μετριέται συνήθως με το δείκτη τιμών του Χρηματιστηρίου, αν και αυτό δεν είναι απαραίτητο. Η επιλογή του κατάλληλου δείκτη για να αντιπροσωπεύσει την απόδοση της αγοράς δεν υποκειται σε θεωρητικούς περιορισμούς, αλλά είναι αποτέλεσμα εμπειρικής έρευνας.

Η άλλη συνιστώσα που είναι ανεξάρτητη από τις κινήσεις της αγοράς μπορεί να αναλυθεί ακόμα περισσότερο. Είναι χρήσιμο να αναλυθεί στο άθροισμα

$$a_i = \alpha_i + e_i$$

όπου το  $\alpha_i$  είναι η αναμενόμενη τιμή του  $a_i$  και το  $e_i$  είναι το τυχαίο στοιχείο του  $a_i$ . που είναι τυχαία μεταβλητή με αναμενόμενη τιμή μηδεν. Ο συντελεστής ALPHA δείχνει την απόδοση του τίτλου σε σχέση με ένα χρεώγραφο που η κατοχή του δεν εμπεριέχει κίνδυνο, όπως ένα κρατικό ομόλογο ή με άλλα λόγια με την απόδοση που θα είχε ο τίτλος αν δεν μεταβαλλόταν η απόδοση της αγοράς.

Το υπόδειγμα για την εκτίμηση του απλού δείκτη σύμφωνα με τα ανωτέρω μίας μετοχής έχει τη μορφή

$$R_t = \alpha_i + \beta_i Rm_t + e_t$$

όπου:  $R_t$  απόδοση μετοχής

$Rm_t$  απόδοση αγοράς δηλαδή του δείκτη τιμών του χρηματιστηρίου

$e_t$  τυχαίο στοιχείο του  $a_i$ . (κατάλοιπα)

$a_i$  σταθερός όρος (ALPHA)

$\beta_i$  κλίση ευθείας παλινδρόμησης (BETA)

η οποία μπορεί να εκτιμηθεί εμπειρικά με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Οι αποδόσεις των μετοχών συνήθως προκύπτουν ως δεικτοποιημένες πρώτες διαφορές των διαδοχικών τιμών κλεισίματος. Ο τύπος μετασχηματισμού των τιμών είναι

$$\frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} \times 100$$

όπου:  $X_t$  οι τιμές κλεισίματος R και Rm τη χρονική στιγμή t

$X_{t-1}$  οι τιμές κλεισίματος R και Rm τη χρονική στιγμή t-1

Η εκτίμηση των παραμέτρων ALPHA και BETA του υποδείγματος, προκύπτει επομένως από την εφαρμογή των ελαχίστων τετραγώνων και την επίλυση του συστήματος των κανονικών εξισώσεων που προκύπτει. Συγκεκριμένα οι εκφράσεις για τον υπολογισμό τους είναι οι ακόλουθες:

$$BETA = \frac{\sum_{t=1}^N [(R_t - \bar{R})(Rm_t - \bar{Rm})]}{\sum_{t=1}^N (Rm_t - \bar{Rm})^2}$$

όπου:  $\bar{R}$  μέσος όρος του R  
 $\bar{Rm}$  μέσος όρος του Rm

$$ALPHA = \bar{R} - BETA \times \bar{Rm}$$

Πέρα από την εκτίμηση των συντελεστών του υποδείγματος, για την αξιολόγηση των εκτιμήσεων αυτών είναι απαραίτητος ο στατιστικός έλεγχος με τη χρησιμοποίηση στατιστικών κριτηρίων. Τα κυριότερα και πλέον χρησιμοποιούμενα κριτήρια είναι αυτά του συντελεστή προσδιορισμού (R- τετράγωνο) για αξιολόγηση της ερμηνευτικότητας του υποδείγματος και οι τιμές του Student-t για την αξιολόγηση της ερμηνευτικότητας ξεχωριστά του κάθε συντελεστή που εκτιμήθηκε.

Ο συντελεστής προσδιορισμού είναι το ποσοστό της μεταβολής της απόδοσης του τίτλου που οφείλεται στις μεταβολές της αγοράς. Σε στατιστικούς όρους είναι το μέρος της διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής -απόδοση τίτλου- το οποίο ερμηνεύεται από την ανεξάρτητη μεταβλητή -απόδοση αγοράς- του απλού υποδείγματος δεικτών για κάθε τίτλο. Τιμές του δείκτη κοντά στο όρια του, τη μονάδα ή το 100%, θεωρούνται ικανοποιητικές και δείχνουν ότι η ερμηνευτική ικανότητα του υποδείγματος είναι μεγάλη. Ο συντελεστής προσδιορισμού υπολογίζεται σύμφωνα με την ακόλουθη έκφραση:

$$R\text{-square} = \frac{\sum_t (R_t - \bar{R})^2 - \sum_t e_t^2}{\sum_t (R_t - \bar{R})^2} \quad \text{όπου: } \bar{R} \quad \text{μέσος όρος του } R$$

$$\bar{Rm} \quad \text{μέσος όρος του } Rm$$

$$\sum_t e_t^2 = \sum_t R^2 - \text{ALPHA} \times \sum_t R - \text{BETA} \times \sum_t R \times Rm$$

Οι τιμές του Student-t για τις παραμέτρους του υποδείγματος, δηλαδή τους συντελεστές ALPHA και BETA αξιολογούν στατιστικά αν οι εκτιμήσεις των παραμέτρων αυτών διαφέρουν από το μηδέν. Σε στατιστικούς όρους είναι ο λόγος της τιμής της παραμέτρου προς το τυπικό της σφάλμα. Πρακτικά, τιμές του Student-t μεγαλύτερες από 2 είναι ενδεικτικές της στατιστικά σημαντικής διαφοράς της παραμέτρου από το μηδέν. Οι εκφράσεις για τον υπολογισμό τους είναι οι ακόλουθες:

$$t_{ALPHA} = \frac{ALPHA}{\sigma_{ALPHA}} \quad \text{όπου: } \sigma_{ALPHA} = \sqrt{\frac{\sum Rm^2 - \sum e^2}{N \sum (Rm - \bar{Rm})^2}}$$

$$t_{BETA} = \frac{BETA}{\sigma_{BETA}} \quad \sigma_{BETA} = \sqrt{\frac{\sum \mu^2}{N \sum (Rm - \bar{Rm})^2}}$$

Με το υπόδειγμα του απλού δείκτη η ανάλυση χαρτοφυλακίου από πλευράς υπολογισμών έχει απλοποιηθεί σημαντικά. Παρόλα αυτά η εμπειρική εκτίμηση των τιμών όλων των παραμέτρων του υποδείγματος για ικανό αριθμό τίτλων σε πραγματικές εφαρμογές γίνεται με τη βοήθεια κατάλληλων στατιστικών προγραμμάτων εξ αιτίας του μεγάλου όγκου υπολογισμών.

## *Κεφάλαιο 2*

# **Προβλέψεις για το ΒΕΤΑ μελλοντικών περιόδων**

Στο δεύτερο κεφάλαιο εξετάζεται πρώτα η ακρίβεια των συντελεστών ΒΕΤΑ που εκτιμήθηκαν από ιστορικά στοιχεία - χρονολογικές σειρές. Στη συνέχεια αναλύονται τα αίτια για τις τυχόν αναξιόπιστες προβλέψεις και προτείνονται δύο διαδικασίες για τη διόρθωση των εκτιμήσεων. Πρώτα παρουσιάζεται η διόρθωση που πρότεινε ο Blume για την αποτίμηση της τάσης των συντελεστών ΒΕΤΑ να κυμαίνονται γύρω από τη μονάδα και κατόπιν η διόρθωση που πρότεινε ο Vasicek για να αποτιμήσει την ίδια τάση. Τέλος παρουσιάζονται και τα κριτήρια για αξιολόγηση των διαδικασιών που εφαρμόζονται κατά περίπτωση για τη διόρθωση των συντελεστών ΒΕΤΑ



## **1. Η ακρίβεια των ΒΕΤΑ που εκτιμήθηκαν από ιστορικά στοιχεία - χρονολογικές σειρές**

Ο συντελεστής ΒΕΤΑ του υποδείγματος του απλού δείκτη είναι ένα μέτρο για την αποτίμηση του κινδύνου που αναλαμβάνει ο επενδυτής όταν αποφασίσει να διατηρήσει τίτλους τόσο στην τρέχουσα όσο και σε μελλοντικές περιόδους. Βέβαια, όταν πρόκειται να χρησιμοποιηθεί ο συντελεστής ΒΕΤΑ προκειμένου να εκτιμηθεί ο κίνδυνος και η απόδοση ενός χαρτοφυλακίου στο μέλλον, αναγκαία προϋπόθεση είναι να έχει η τιμή του συντελεστή ΒΕΤΑ του αντίστοιχου τίτλου ή χαρτοφυλακίου που εκτιμάται έναν ικανοποιητικό βαθμό ακρίβειας για τις μελλοντικές περιόδους που εξετάζονται.

Το ζήτημα της ακρίβειας των προβλέψεων είναι βασικό στην αξιολόγηση των συντελεστών ΒΕΤΑ, όσον αφορά στη χρησιμοποίησή τους ως εκτιμητών των τιμών που θα διαμορφωθούν μελλοντικά. Έτσι, η ακρίβεια των προβλέψεων είναι η κατεξοχήν απαίτηση του επενδυτή από τις εκτιμήσεις που κάνει προκειμένου να σχεδιάσει το χαρτοφυλάκιο του. Όπως συμβαίνει και στις περισσότερες περιπτώσεις αξιολόγησης προγνώσεων έτσι και εδώ η έννοια της ακρίβειας ταυτίζεται με την έννοια της καλής προσαρμογής των δεδομένων. Δηλαδή στην περίπτωση του υποδείγματος του απλού δείκτη η πρόβλεψη της τιμής του συντελεστή ΒΕΤΑ είναι τόσο πιο ακριβής όσο πλησιέστερα βρεθεί στην πραγματική τιμή που θα διαμορφωθεί στο μέλλον. Αυτό τεχνικά σημαίνει ότι το υποδείγμα που χρησιμοποιεί ο επενδυτής είναι ακριβές, αν μπορεί να αναπαράγει τα στοιχεία στα οποία βασίστηκαν οι εκτιμήσεις των συντελεστών και που είναι γνωστά εκ των προτέρων ή πρόκειται να γίνουν γνωστά στο μέλλον.

Με άλλα λόγια επιδίωξη της ανάλυσης είναι η πρόβλεψη της τιμής του συντελεστή ΒΕΤΑ της επόμενης ή γενικότερα μιάς μελλοντικής περιόδου. Αν η τιμή του ΒΕΤΑ για την επόμενη περίοδο δεν μπορεί να εκτιμηθεί, ή η εκτίμησή της δεν είναι ακριβής, τότε η εφαρμογή του υποδείγματος του απλού δείκτη, δηλαδή η εκτίμηση του κινδύνου με το ΒΕΤΑ είναι περιορισμένη. Έτσι, στην ανάλυση χαρτοφυλακίου, μετά την εκτίμηση των συντελεστών ΒΕΤΑ ακολουθεί ο έλεγχος της σχέσης που υπάρχει ανάμεσα στα ΒΕΤΑ μιάς περιόδου και στα ΒΕΤΑ της αμέσως επόμενης περιόδου.

Συνήθως όμως στις εμπειρικές εφαρμογές, οι προβλέψεις για τις μελλοντικές τιμές του συντελεστή ΒΕΤΑ ενός τίτλου ή ενός χαρτοφυλακίου, σε γενικές γραμμές, δεν είναι ιδιαίτερα επιτυχείς. Η πρόβλεψη της τιμής του ΒΕΤΑ μάλιστα είναι λιγότερο ακριβής, όταν η ανάλυση αφορά στους συντελεστές των μεμονωμένων τίτλων, ή

χαρτοφυλακίων που απαρτίζονται από λίγους τίτλους. Στους ελέγχους για την κύμανση της τιμής του BETA ενός τίτλου ή χαρτοφυλακίου στην πάροδο του χρόνου έχουν συμβάλλει σημαντικά ο Blume και ο Levy. Με τις μελέτες τους απέδειξαν ότι τα BETA των μεμονωμένων τίτλων μιάς περιόδου δεν είναι καλοί εκτιμητές των αντίστοιχων BETA της επόμενης περιόδου. Ωστόσο, καθώς το μέγεθος του χαρτοφυλακίου μεγαλώνει, η σταθερότητα των συντελεστών BETA που εκτιμήθηκαν βελτιώνεται σημαντικά, δηλαδή οι τιμές των συντελεστών BETA για χαρτοφυλάκια που περιλαμβάνουν πολλούς τίτλους παραμένουν από περίοδο σε περίοδο σχετικά σταθερές. Ένα άλλο σημαντικό πρόβλημα τόσο για τα BETA των μεμονωμένων τίτλων, όσο και για τα BETA των χαρτοφυλακίων είναι η τάση των σχετικά υψηλών και χαμηλών BETA να υπερεκτιμούν και υποεκτιμούν αντίστοιχα, τα BETA των ίδιων χαρτοφυλακίων, της επόμενης χρονικής περιόδου. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρείται μία σταθερή τάση στους τίτλους ή στα χαρτοφυλάκια που παρουσιάζουν ένα ιδιαίτερα υψηλό ή χαμηλό BETA τη μία περίοδο να έχουν ένα λιγότερο υψηλό ή χαμηλό συντελεστή BETA την επόμενη περίοδο. Με άλλα λόγια οι εκτιμήσεις των συντελεστών BETA παρουσιάζουν την τάση να παλινδρομούν διαχρονικά και μάλιστα γύρω από το συνολικό μέσο όρο όλων των συντελεστών BETA. Επομένως, η ακρίβεια των BETA μειώνεται όσο περισσότερο οι τιμές τους διαφέρουν από τον μέσο όρο όλων των BETA, δηλαδή το BETA της αγοράς που είναι η μονάδα.

Οι διαφορές στις εκτιμήσεις των συντελεστών BETA για τη μία περίοδο από τις εκτιμήσεις των συντελεστών BETA για την αμέσως επόμενη περίοδο οφείλονται σε δύο λόγους. Ο πρώτος λόγος είναι το γεγονός ότι ο κίνδυνος για τον επενδυτή από την κατοχή του τίτλου ή του χαρτοφυλακίου, δηλαδή ο συντελεστής BETA, μπορεί πραγματικά να μεταβάλλεται. Αυτή η περίπτωση δεν είναι κάτι σπάνιο στην πραγματική οικονομική ζωή και η πιο συνηθισμένη αιτία για την εμφάνισή της είναι διάφορες αλλαγές που συμβαίνουν στο εσωτερικό των εταιρειών. Οι αλλαγές αυτές συνήθως οφείλονται σε οικονομικούς λόγους που γενικά δεν είναι εκ των προτέρων γνωστοί, ή σε αλλαγές στην διοίκηση ή στα σχέδια των εταιρειών.

Ο δεύτερος λόγος είναι ότι ο συντελεστής BETA κάθε περιόδου εκτιμάται με ένα τυχαίο σφάλμα και όσο μεγαλύτερο είναι το τυχαίο σφάλμα τόσο μικρότερη είναι η ακρίβεια των BETA που εκτιμώνται την μία περίοδο ως προβλέψεις για τα BETA της αμέσως επόμενης περιόδου. Ακόμα όμως και αν οι συντελεστές BETA που εκτιμούνται την περίοδο σύνθεσης του χαρτοφυλακίου είναι οι πραγματικοί

συντελεστές και μάλιστα παραμένουν σταθεροί διαχρονικά, οι εκτιμήσεις των συντελεστών BETA για την επόμενη περίοδο ως αποτέλεσμα στατιστικής επεξεργασίας που είναι, θα τείνουν να έχουν διαφορετικές τιμές την επόμενη περίοδο, με αποτέλεσμα την εμφάνιση αυτής της παλινδρομικής τάσης.

Αντίθετα από τις εκτιμήσεις των συντελεστών BETA των μεμονωμένων τίτλων, στην εκτίμηση του συντελεστή BETA ενός διαφοροποιημένου χαρτοφυλακίου, αυτές οι μεταβολές τείνουν να αντισταθμίζονται και έτσι παρατηρούνται μικρότερες μεταβολές στις πραγματικές τιμές των συντελεστών BETA των χαρτοφυλακίων από τις μεταβολές που παρατηρούνται στις τιμές των μεμονωμένων τίτλων, ανάμεσα σε δύο διαδοχικές χρονικές περιόδους. Αυτό συμβαίνει γιατί οι μεταβολές στις τιμές των συντελεστών BETA των τίτλων είναι διαφορετικές από τίτλο σε τίτλο και έτσι οι συντελεστές BETA ορισμένων τίτλων θα αυξηθούν, ενώ κάποιων άλλων θα μειωθούν. Αναμένεται δηλαδή, ότι τα σφάλματα στην εκτίμηση του BETA για τον κάθε τίτλο ξεχωριστά θα τείνουν να αντισταθμίζονται όταν συνδυάζονται οι τίτλοι μεταξύ τους και κατά συνέπεια θα παρατηρείται μικρότερο σφάλμα στην εκτίμηση των BETA των χαρτοφυλακίων. Επομένως εφόσον οι συντελεστές BETA των χαρτοφυλακίων εκτιμώνται με μικρότερο σφάλμα και εφόσον οι συντελεστές BETA των χαρτοφυλακίων μεταβάλλονται λιγότερο από ότι οι συντελεστές BETA των ξεχωριστών τίτλων, οι συντελεστές BETA των χαρτοφυλακίων που εκτιμήθηκαν από χρονολικές σειρές - ιστορικά στοιχεία είναι καλύτερες προβλέψεις για τις μελλοντικές τιμές των συντελεστών BETA αυτών των ίδιων χαρτοφυλακίων από τις αντίστοιχες τιμές των συντελεστών BETA για τον κάθε τίτλο ξεχωριστά.

Αξιοποιώντας λοιπόν την τάση των συντελεστών BETA να παλινδρομούν γύρω από το διαχρονικό μέσο όρο, οι προβλέψεις για τις μελλοντικές τιμές του συντελεστή BETA μπορούν να βελτιωθούν ακόμα περισσότερο. Κατά τα γνωστά, η αληθινή τιμή του συντελεστή BETA όλων των τίτλων, δηλαδή του συντελεστή BETA της αγοράς είναι ένα. Αν εκτιμηθούν οι συντελεστές BETA όλων των τίτλων, κάποιες από τις εκτιμήσεις θα δώσουν συντελεστές BETA ίσους με τη μονάδα, αλλά κάποιες άλλες θα δώσουν τιμές είτε μεγαλύτερες, είτε μικρότερες από τη μονάδα για τους λόγους που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Οι συντελεστές BETA που εκτιμήθηκαν με τιμές μεγαλύτερες από τη μονάδα πήραν τις τιμές αυτές εξ αιτίας κάποιων θετικών σφαλμάτων. Οι συντελεστές BETA που εκτιμήθηκαν με τιμές μικρότερες από τη μονάδα πήραν τις τιμές αυτές εξ αιτίας κάποιων αρνητικών σφαλμάτων. Επιπλέον

επειδή δεν υπάρχει κάποιος συγκεκριμένος λόγος ότι ένα θετικό σφάλμα ενός τίτλου θα ακολουθηθεί από ένα άλλο επίσης θετικό σφάλμα του ίδιου τίτλου, συνάγεται ότι οι συντελεστές BETA που εκτιμούνται από χρονολογικές σειρές - ιστορικά στοιχεία δίνουν χειρότερες εκτιμήσεις για τη μελλοντική τιμή του συντελεστή BETA από ότι θα έδινε μία τιμή του συντελεστή BETA ίση με τη μονάδα για όλους τους τίτλους που έχουν εισαχθεί στο Χρηματιστήριο. Εστω λοιπόν, ότι έχουν εκτιμηθεί οι συντελεστές BETA για όλους τους τίτλους. Η τιμή του συντελεστή BETA κάθε τίτλου που υπολογίστηκε είναι κατά ένα μέρος συνάρτηση της αληθινής αλλά λανθάνουσας τιμής του συντελεστή BETA και κατά ένα άλλο μέρος συνάρτηση του σφάλματος. Αν υπολογισθεί μία πολύ μεγάλη τιμή του BETA για κάποιο τίτλο, τότε υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να έχει διαπραχθεί ένα θετικό σφάλμα, ενώ αν τυχόν υπολογισθεί μία πολύ μικρή τιμή του συντελεστή BETA, τότε υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να έχει διαπραχθεί αρνητικό σφάλμα. Αν ισχύουν αυτά, τότε θα υπολογίζονται BETA, που κατά μέσο όρο, θα συγκλίνουν προς τη μονάδα σε διαδοχικές χρονικές περιόδους. Τα εκτιμηθέντα BETA που είναι πολύ μεγαλύτερα από τη μονάδα, θα τείνουν στην επόμενη περίοδο να είναι πλησιέστερα στη μονάδα δηλαδή μικρότερα, και τα εκτιμηθέντα BETA που είναι πολύ μικρότερα από τη μονάδα θα τείνουν στην επόμενη περίοδο να είναι μεγαλύτερα. Εμπειρικά, αυτή η τάση που αποδείχτηκε από τις εργασίες των Blume και Levy, οδήγησε σε δύο μεθόδους διόρθωσης των συντελεστών BETA, στη διόρθωση κατά Blume και στη διόρθωση κατά Vasicek..

## **2. Η διόρθωση του Blume για την αποτίμηση της τάσης των συντελεστών BETA να κυμαίνονται γύρω από τη μονάδα.**

Σύμφωνα με τη διόρθωση κατά Blume, διαιρείται η περίοδος που υπάρχουν διαθέσιμα ιστορικά στατιστικά στοιχεία - χρονολογικές σειρές με τις αποδόσεις των τίτλων ή των χαρτοφυλακίων σε υποπεριόδους. Συμβατικά, η πιο πρόσφατη υποπερίοδος καλείται τρέχουσα περίοδος, η αμέσως προηγούμενη καλείται αρχική περίοδος και η αμέσως επόμενη περίοδος πρόγνωσης.

Η διόρθωση κατά Blume βασίζεται στην υπόθεση πως στην περίοδο πρόγνωσης, οι προβλέψεις για τις τιμές των BETA των τίτλων ή των χαρτοφυλακίων που εκτιμήθηκαν την προηγούμενη περίοδο, τείνουν να διαφέρουν περισσότερο από τη μονάδα -τιμή του συντελεστή BETA της αγοράς, από ότι οι αντίστοιχες τιμές των

αληθινών συντελεστών BETA που υπολογίζονται από τις πραγματοποιηθείσες αποδόσεις των τίτλων ή των χαρτοφυλακίων. Για αυτό το λόγο οι συντελεστές BETA που εκτιμώνται ως προβλέψεις πρέπει να τροποποιούνται κατάλληλα ώστε να προσαρμόζονται σε αυτήν τη τάση. Ο Blume διόρθωσε τους συντελεστές BETA που εκτιμήθηκαν προσαρμόζοντας κατάλληλα το μέγεθος τους προς τη μονάδα και θεώρησε πως αυτή η προσαρμογή στην αρχική τιμή είναι καλή εκτίμηση για την τιμή του συντελεστή BETA την επόμενη περίοδο.

Στη διαδικασία της διόρθωσης κατά Blume υπολογίζονται πρώτα οι συντελεστές BETA για όλους τους τίτλους ή τα χαρτοφυλάκια την αρχική περίοδο και μετά υπολογίζονται οι αντίστοιχοι συντελεστές BETA για όλους τους τίτλους ή τα χαρτοφυλάκια την τρέχουσα περίοδο. Στη συνέχεια παλινδρομούνται οι συντελεστές BETA της τρέχουσας περιόδου πάνω στους συντελεστές BETA της αρχικής περιόδου. Η κάθε παρατήρηση είναι ένα ζεύγος τιμών με μέλη τους συντελεστές BETA του ίδιου τίτλου ή χαρτοφυλακίου για την αρχική και τη τρέχουσα περίοδο αντίστοιχα. Έτσι, με αυτή τη μέθοδο εκτιμάται μία ευθεία, η ευθεία της παλινδρόμησης, που αποτιμά τη τάση των BETA της περιόδου πρόγνωσης να είναι πλησιέστερα στη μονάδα από τις εκτιμήσεις που υπολογίζονται την τρέχουσα περίοδο και βασίζονται στις χρονολογικές σειρές - ιστορικά στοιχεία. Η εξίσωση της παλινδρόμησης αυτής έχει τη μορφή:

$$\beta_{i2} = c_0 + c_1 \beta_{i1}$$

όπου το  $\beta_{i2}$  συμβολίζει το BETA του τίτλου ή του χαρτοφυλακίου  $i$  την τρέχουσα περίοδο και το  $\beta_{i1}$  συμβολίζει το  $\beta$  του ίδιου τίτλου ή του ίδιου χαρτοφυλακίου  $i$  την αρχική περίοδο. Η σχέση αυτή σημαίνει ότι το BETA της τρέχουσας περιόδου τείνει να είναι  $c_0 + c_1$  επί το BETA της αρχικής περιόδου\* .

---

\* Όταν εφάρμοσε ο Blume την τεχνική του βρήκε

$$\beta_{i2} = 0.343 + 0.677 \beta_{i1}$$

όπου το  $\beta_{i2}$  συμβολίζει το συντελεστή BETA του τίτλου  $i$  την περίοδο 1955-61 και το  $\beta_{i1}$  συμβολίζει το  $\beta$  του τίτλου  $i$  την περίοδο (1948-54). Η σχέση αυτή σημαίνει ότι ο συντελεστής BETA της τελευταίας περιόδου είναι  $0.343 + 0.677$  επί το συντελεστή BETA της πρώτης περιόδου. Ο Blume πρόβλεψε τις τιμές των συντελεστών BETA όλων των τίτλων για την περίοδο 1962-68 ως εξής. Υπολόγισε πρώτα (με τη βοήθεια της παλινδρόμησης) τους συντελεστές BETA για τα χρόνια 1955-61. Στη συνέχεια για να καθορίσει το πως θα διορθωθούν, αντικατέστησε τα  $\beta_{i1}$  στην εξίσωση με τις τιμές τους. Τέλος υπολόγισε από την εξίσωση τα  $\beta_{i2}$  και τα χρησιμοποίησε ως προγνώσεις. Έτσι, αν το  $\beta_{i1}$  ήταν 2.0 τότε η πρόβλεψη

Η διόρθωση κατά Blume χαμηλώνει τις ψηλές τιμές των συντελεστών BETA και υψώνει τις χαμηλές. Ένα επιπλέον χαρακτηριστικό της προσέγγισης αυτής που πρέπει να τονισθεί είναι ότι με την διόρθωση μεταβάλλεται κατά την ίδια ποσότητα η τιμή των συντελεστών BETA για το σύνολο των τίτλων. Εφόσον η προσέγγιση του Blume μετρά τη σχέση ανάμεσα στους συντελεστές BETA δύο περιόδων, αν ο μέσος συντελεστής BETA αυξήθηκε από τη μία περίοδο στην άλλη, τότε υποθέτει ότι ο συντελεστής BETA θα αυξηθεί και στην επόμενη περίοδο. Αν δεν υπάρχει κάποιος ιδιαίτερος λόγος που να προκαλεί τέτοιες συνεχείς μεταβολές στις τιμές των συντελεστών BETA, τότε αυτή είναι μία ανεπιθύμητη ιδιότητα. Αν δεν υπάρχει επομένως λόγος να αναμένεται ότι αυτή η τάση του μέσου συντελεστή BETA θα συνεχισθεί, τότε οι εκτιμήσεις μπορούν να βελτιωθούν, διορθώνοντας τις εκτιμήσεις των συντελεστών BETA των τίτλων ή των χαρτοφυλακίων για την περίοδο πρόγνωσης με τέτοιο τρόπο ώστε ο μέσος τους να είναι ο ίδιος με το μέσο BETA που εκτιμήθηκε την τρέχουσα περίοδο από χρονολογικές σειρές - ιστορικά στοιχεία\*\*.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως η τεχνική Blume οδηγεί στη συνεχιζόμενη προβολή της ανοδικής τάσης των συντελεστών BETA που παρατηρήθηκε σε προηγούμενες περιόδους. Αν δεν υπάρχει λόγος ο μέσος συντελεστής BETA της επόμενης περιόδου θα είναι μεγαλύτερο από το συντελεστή BETA αυτής της περιόδου, τότε οι προβλέψεις βελτιώνονται, διορθώνοντας το προβλεπόμενο BETA έτσι ώστε να έχει τον ίδιο μέσο με αυτόν της ιστορικής περιόδου. Αυτό σημαίνει την αφαίρεση μιάς σταθεράς από όλους τους συντελεστές BETA αμέσως μετά τη διόρθωση τους προς το μέσο\*\*\*.

---

θα ήταν  $0.343+0.677 \times 2.0=1.697$  αντί για 2.0, ενώ αν το  $\beta_{it}$  ήταν 0.5 τότε η πρόβλεψη θα ήταν  $0.343+0.677 \times 0.5=0.682$  αντί για 0.5.

\*\* Στο προηγούμενο παράδειγμα του Blume έστω ότι ο μέσος συντελεστής BETA του 1948-54 ήταν ένα και ο μέσος συντελεστής BETA της περιόδου 1955-61 ήταν 1.02. Τώρα για να καθορισθεί ποιά θα είναι η πρόβλεψη του μέσου συντελεστή BETA για την περίοδο 1962-68 αντικαθίσταται το 1.02 στο δεξί μέρος της εξίσωσης που συνδέει τις εκτιμήσεις των συντελεστών BETA των δύο περιόδων. Δηλαδή  $0.343+0.677 \times 1.02$ . Το αποτέλεσμα είναι 1.033.

\*\*\* Στο παράδειγμα του Blume αυτό επιτυγχάνεται αφαιρώντας 1.033 από κάθε πρόβλεψη του συντελεστή BETA και προσθέτοντας 1.02.

### 3. Η διόρθωση του Vasicek για την αποτίμηση της τάσης των BETA να κυμαίνονται γύρω από τη μονάδα.

Η διόρθωση του Vasicek για την αποτίμηση της τάσης των συντελεστών BETA να κυμαίνονται γύρω από τη μονάδα βασίζεται στο ότι η πραγματική τιμή του BETA στην περίοδο πρόγνωσης τείνει να προσεγγίζει το μέσο συντελεστή BETA περισσότερο από την εκτίμηση που προκύπτει από τις χρονολογικές σειρές - ιστορικά στοιχεία. Ένας απλός τρόπος να διορθωθεί αυτή η τάση είναι να διορθωθεί η τιμή του κάθε συντελεστή BETA προς την τιμή του μέσου συντελεστή BETA. Παραδείγματος χάριν, παίρνοντας το εν δεύτερο των συντελεστών BETA που εκτιμήθηκαν από χρονολογικές σειρές - ιστορικά στοιχεία και προσθέτοντας το στο εν δεύτερο του μέσου συντελεστή BETA, τον κάθε ένα από τους “ιστορικούς” συντελεστές BETA καλύπτεται η μισή απόσταση που τον χωρίζει από το μέσο συντελεστή BETA. Αυτή η τεχνική χρησιμοποιείται ευρύτατα<sup>2</sup>.

Ωστόσο, δεν είναι επιθυμητό να διορθωθούν οι συντελεστές όλων των μετοχών με το ίδιο ποσό προς το μέσο, αλλά να εξαρτηθεί η διόρθωση από το μέγεθος της αβεβαιότητας γύρω από το συντελεστή BETA. Όσο μεγαλύτερο είναι το δειγματοληπτικό σφάλμα, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα να σημειωθούν μεγάλες διαφοροποιήσεις από τον μέσο, εξ αιτίας του δειγματοληπτικού σφάλματος και τόσο μεγαλύτερη θα είναι η διόρθωση. Ο Vasicek πρότεινε την ακόλουθη μέθοδο που ενσωματώνει τις ακόλουθες ιδιότητες: Αν συμβολιστεί με  $\bar{\beta}_1$  το μέσο συντελεστή BETA, ολόκληρου του δείγματος των τίτλων της ιστορικής περιόδου, η μέθοδος Vasicek είναι ο υπολογισμός ενός σταθμισμένου μέσου του  $\bar{\beta}_1$  και του ιστορικού συντελεστή BETA του τίτλου  $i$ . Η διακύμανση τη κατανομής των ιστορικών συντελεστών BETA για ολόκληρο το δείγμα των τίτλων της ιστορικής περιόδου συμβολίζεται με  $\sigma_{\bar{\beta}_1}^2$  και αποτελεί ένα μέτρο της κύμανσης της τιμής των συντελεστών BETA των τίτλων που εξετάζονται. Το τετράγωνο τώρα του τυπικού σφάλματος της εκτίμησης του συντελεστή BETA του τίτλου  $i$  που μετρήθηκε την ίδια περίοδο συμβολίζεται με  $\sigma_{\beta_{i1}}^2$  και είναι ένα μέτρο για την αβεβαιότητα που υπάρχει για την τιμή του συντελεστή BETA του κάθε τίτλου. Ο Vasicek πρότεινε τις ακόλουθες σταθμίσεις:

---

<sup>2</sup> Μιά τέτοια τεχνική για τη διόρθωση των BETA χρησιμοποιεί και η Merryll Lynch.

$$\frac{\sigma_{\beta_1}^2}{\sigma_{\beta_1}^2 + \sigma_{\beta_{i1}}^2} \quad \text{γιά το } \beta_{i1} \quad \text{και} \quad \frac{\sigma_{\beta_{i1}}^2}{\sigma_{\beta_1}^2 + \sigma_{\beta_{i1}}^2} \quad \text{γιά το } \bar{\beta}_1$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι αυτοί οι συντελεστές στάθμισης αθροίζουν στη μονάδα. Ετσι, όσο μεγαλύτερη είναι η αβεβαιότητα για την τιμή ενός από τους δύο συντελεστές BETA, τόσο μικρότερη βαρύτητα δίνεται σε αυτόν. Η πρόβλεψη για το συντελεστή BETA του τίτλου  $i$  είναι:

$$\beta_{i2} = \frac{\sigma_{\beta_{i1}}^2}{\sigma_{\beta_1}^2 + \sigma_{\beta_{i1}}^2} \bar{\beta}_1 + \frac{\sigma_{\beta_1}^2}{\sigma_{\beta_1}^2 + \sigma_{\beta_{i1}}^2} \beta_{i1}$$

Με αυτή τη διαδικασία οι παρατηρήσεις με τα μεγαλύτερα τυπικά σφάλματα διορθώνονται σε μεγαλύτερο βαθμό προς την κατεύθυνση του μέσου από ότι οι παρατηρήσεις με μικρά τυπικά σφάλματα. Όπως απέδειξε ο ίδιος ο Vasicek αυτή η τεχνική είναι μία Bayesianή προσέγγιση.

Η Bayesianή προσέγγιση ενώ δεν προβλέπει την τάση στα BETA όπως κάνει η τεχνική Blume, υποφέρει από τη δική της “δυνητική” πηγή σφάλματος. Στη Bayesianή προσέγγιση, η στάθμιση που δίνεται στο συντελεστή BETA ενός τίτλου σε σχέση με τη στάθμιση του μέσου συντελεστή BETA του δείγματος, είναι αντιστρόφως ανάλογη με το τυπικό σφάλμα του συντελεστή BETA του τίτλου. Τίτλοι με υψηλό συντελεστή BETA έχουν μεγαλύτερα τυπικά σφάλματα για το συντελεστή τους από ότι έχουν οι τίτλοι με χαμηλότερο συντελεστή BETA. Αυτό έχει σαν συνέπεια ότι οι συντελεστές BETA των τίτλων με υψηλό συντελεστή BETA θα μικραίνουν αναλογικά περισσότερο προς την κατεύθυνση του μέσου συντελεστή BETA του δείγματος από ότι θα μεγαλώνουν οι συντελεστές BETA των τίτλων με χαμηλό συντελεστή BETA. Ετσι, η εκτίμηση του μέσου συντελεστή BETA της επόμενης περιόδου θα τείνει να είναι χαμηλότερη από το μέσο συντελεστή BETA της τρέχουσας περιόδου για ολόκληρο το δείγμα των τίτλων από το οποίο υπολογίστηκαν όλες οι εκτιμήσεις των συντελεστών BETA.

Αν δεν υπάρχει κάποιος λόγος που να τεκμηριώνει την πτωτική τάση των BETA, η εκτίμηση των BETA μπορεί να βελτιωθεί ακόμα περισσότερο, διορθώνοντας τις τιμές των BETA της επόμενης περιόδου προς τα πάνω, έτσι ώστε να έχουν τον ίδιο μέσο με το μέσο της ιστορικής -τρέχουσας- περιόδου, κατά αναλογία με την αντίστοιχη διόρθωση της προσέγγισης Blume.



#### 4. Κριτήρια αξιολόγησης των προσεγγίσεων για τη διόρθωση των BETA

Αντικειμενικός σκοπός της αξιολόγησης των προσεγγίσεων για την πρόβλεψη των τιμών των συντελεστών BETA που προβάλλονται στο μέλλον, είναι ο προσδιορισμός των πηγών των σφαλμάτων πρόβλεψης που επηρεάζουν την ακρίβεια αυτών ακριβώς των προβλέψεων. Ο έλεγχος για την ακρίβεια των προβλέψεων των συντελεστών BETA στηρίζεται στην έννοια του μέσου τετραγωνικού σφάλματος, ως μέτρου του σφάλματος πρόβλεψης. Η έκφραση για τον υπολογισμό του μέσου τετραγωνικού σφάλματος, MSE από τώρα και στο εξής, παρουσιάζεται ακολούθως:

$$MSE = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (A_j - P_j)^2$$

όπου  $m$  είναι ο αριθμός των προβλέψεων που περιλαμβάνονται στην πρόγνωση,  $P_j$  είναι η πρόβλεψη του συντελεστή BETA του τίτλου  $j$  και  $A_j$  είναι η εκτιμηθείσα τιμή του τίτλου  $j$ . Σε όρους της πρόγνωσης του συντελεστή BETA, το  $P_j$  συμβολίζει το συντελεστή BETA που υπολογίστηκε την τρέχουσα περίοδο και χρησιμεύει ως εκτιμητής του συντελεστή BETA της επόμενης περιόδου και το  $A_j$  είναι η αντίστοιχη τιμή του συντελεστή BETA που υπολογίστηκε την επόμενη περίοδο.

Το MSE είναι κατάλληλο για την εκτίμηση του σφάλματος πρόγνωσης, εξ αιτίας αφενός της εύκολης στατιστικής ανάλυσης και αφετέρου επειδή μπορεί εύκολα να αναλυθεί σε τρεις συνιστώσες ως εξής:

$$MSE = (\bar{A} - \bar{P})^2 + (1 - \beta_1)^2 s_P^2 + (1 - r_{AP}^2) s_A^2$$

όπου  $\bar{A}$  και  $\bar{P}$  είναι οι μέσοι των τιμών της παρατήρησης και των προβλέψεων αντίστοιχα, το  $\beta_1$  είναι η κλίση της παλινδρόμησης του  $A$  πάνω στο  $P$ , το  $s_P^2$  και το  $s_A^2$  είναι οι διακυμάνσεις των  $P$  και  $A$  αντίστοιχα και  $r_{AP}^2$  είναι ο συντελεστής προσδιορισμού του  $P$  και  $A$ .<sup>3</sup> Ο πρώτος όρος στην δεύτερη έκφραση συμβολίζει τη μεροληψία, ο δεύτερος όρος την ανεπάρκεια {inefficiency} και ο τελευταίος όρος είναι η συνιστώσα της τυχαίας κύμανσης του MSE.

Η μεροληψία συνεπάγεται ότι ο μέσος όρος είναι είτε μεγαλύτερος είτε μικρότερος από το μέσο όρο των τιμών της παρατήρησης. Η ανεπάρκεια της πρόγνωσης αναπαριστά τη τάση των σφαλμάτων των προβλέψεων να είναι θετικά στις χαμηλές τιμές του  $P_j$  και αρνητικά στις ψηλές, όπως μετριούνται από την πρώτη έκφραση του MSE.. Πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι και η παρατήρηση των Blume και

<sup>3</sup> Βλέπε Mincer και Zarnowitz για λεπτομερή ερμηνεία της εξίσωσης (2) .

Levy πως οι προβολές των BETA έχουν μία τάση να παλινδρομούν γύρω από τη μονάδα είναι ένδειξη της ανεπάρκειας των προγνώσεων. Τέλος, η εναπομείνασα συνιστώσα του MSE που αντιπροσωπεύει εκείνα τα λάθη της πρόγνωσης που δεν οφείλονται ούτε στο  $P_j$  ούτε στο  $A_j$ .

Οι έλεγχοι για την ακρίβεια των προγνώσεων του συντελεστή BETA γίνονται στους συντελεστές BETA που υπολογίζονται από το γνωστό υπόδειγμα της αγοράς - υπόδειγμα του απλού δείκτη καθώς και στις προγνώσεις των συντελεστών BETA που προκύπτουν από τις τεχνικές διόρθωσης των αρχικών συντελεστών BETA κατά τον Blume και τον Vasicek. Το MSE βασίζεται στην ύπαρξη της ασυνέπειας στις προγνώσεις και έτσι με τη χρησιμοποίηση του επιλέγονται εκείνες οι προγνώσεις που βελτιώνουν περισσότερο αυτή του τη συνιστώσα. Από την άλλη πλευρά όσοι περισσότεροι τίτλοι εισάγονται στο χαρτοφυλάκιο τόσο περισσότερο θα μειώνεται το συνολικό MSE, κυρίως από τη μείωση της συνιστώσας της τυχαίας κύμανσης.

### *Κεφάλαιο 3*

# **Σχηματισμός άριστων χαρτοφυλακίων με το υπόδειγμα του απλού δείκτη**

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται η διαδικασία για τη σύνθεση του άριστου χαρτοφυλακίου όταν υιοθετηθεί το υπόδειγμα του απλού δείκτη ως ο καλύτερος τρόπος για την πρόβλεψη του κινδύνου και της απόδοσης από την διατήρηση ενός χαρτοφυλακίου. Πρώτα παρουσιάζονται τα κριτήρια ταξινόμησης που χρησιμοποιούνται για την διάταξη των τίτλων που θα επιλεγούν για να ενταχθούν στο άριστο χαρτοφυλάκιο. Κατόπιν παρουσιάζεται η τεχνική που χρησιμοποιείται με αυτά τα κριτήρια ταξινόμησης για το σχηματισμό του άριστου χαρτοφυλακίου. Τέλος δίνεται η ερμηνεία της λειτουργίας ολόκληρου του υποδείγματος για την κατάστροση του άριστου χαρτοφυλακίου.

## 1. Ο σχηματισμός άριστων χαρτοφυλακίων

Η σύνθεση ενός άριστου χαρτοφυλακίου ξεκινάει από την υπόθεση ότι όλες οι μετοχές που τίθενται προς διαπραγμάτευση στο Χρηματιστήριο είναι πιθανό να συμπεριληφθούν σε αυτό. Έτσι, σύμφωνα με τις θεωρητικές παραδοχές της ανάλυσης χαρτοφυλακίου υπολογίζονται πρώτα οι αναμενόμενες αποδόσεις των τίτλων, ο πιθανός κίνδυνος, δηλαδή η διακύμανση των αποδόσεων καθώς και οι συνδιακυμάνσεις των αποδόσεων όλων των υπό εξέταση τίτλων. Με τα δεδομένα αυτά η σύνθεση του άριστου χαρτοφυλακίου είναι η επιλογή εκείνων των τίτλων που ελαχιστοποιούν τον κίνδυνο που αναλαμβάνει ο επενδυτής για δεδομένο επίπεδο απόδοσης.

Η διαδικασία για τον υπολογισμό άριστων χαρτοφυλακίων απλοποιείται σημαντικά αν γίνει δεκτή η υπόθεση ότι το υπόδειγμα απλού δείκτη περιγράφει ικανοποιητικά τη συμμεταβολή των τίτλων. Σε αυτήν την περίπτωση η επιθυμία για την συμμετοχή ενός τίτλου στο χαρτοφυλάκιο συσχετίζεται αναλογικά με την υπερβάλλουσα απόδοση προς το λόγο του συντελεστή BETA. Η υπερβάλλουσα απόδοση είναι η διαφορά ανάμεσα στην αναμενόμενη απόδοση του τίτλου και στην απόδοση ενός τίτλου χωρίς κίνδυνο, όπως είναι τα κρατικά ομόλογα. Η υπερβάλλουσα απόδοση ενός τίτλου ως προς το λόγο του συντελεστή BETA μετρά την επιπρόσθετη απόδοση ενός τίτλου (πέρα από εκείνη που αποδίδει ο τίτλος χωρίς κίνδυνο) κατά μονάδα του κινδύνου από τη μη διαφοροποίηση (nondiversifiable risk). Η μορφή αυτού του λόγου ερμηνεύεται εύκολα και είναι και ευρύτατα αποδεκτή από τους αναλυτές και τους διαχειριστές χαρτοφυλακίων, επειδή είναι συνηθισμένοι να σκέφτονται σε όρους της σχέσης ανάμεσα στην δυνητική απόδοση και στον κίνδυνο. Ο αριθμητής αυτού του κριτηρίου ταξινόμησης φανερώνει την παραπάνω απόδοση από την απόδοση του τίτλου χωρίς κίνδυνο, όταν προτιμηθεί η κατοχή του τίτλου με κίνδυνο από την κατοχή του τίτλου χωρίς κίνδυνο. Ο παρονομαστής είναι ο κίνδυνος από τη μη διαφοροποίηση (ο κίνδυνος ο οποίος δεν εξαλείφεται με τη διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου) στον οποίο υπόκειται το χαρτοφυλάκιο από τη διατήρηση σε αυτό τίτλων με κίνδυνο αντί για τίτλους χωρίς κίνδυνο.

Η τυπική μορφή του κριτηρίου για την ταξινόμηση των τίτλων ως προς την υπερβάλλουσα απόδοση προς το συντελεστή BETA είναι:

$$\frac{\bar{R}_i - R_F}{\beta_i} \quad \text{όπου} \quad \begin{array}{l} \bar{R}_i \quad \text{η αναμενόμενη απόδοση του τίτλου } i \\ R_F \quad \text{η απόδοση του τίτλου χωρίς κίνδυνο} \end{array}$$

$\beta_i$  η αναμενόμενη μεταβολή στην απόδοση του τίτλου  $i$  που σχετίζεται με μία αλλαγή 1% στην απόδοση της αγοράς

Αν οι τίτλοι ταξινομηθούν ως προς την υπερβάλλουσα απόδοση προς το συντελεστή BETA (από τη μεγαλύτερη προς τη μικρότερη), η ταξινόμηση αντιπροσωπεύει την επιθυμία για την συμμετοχή ενός τίτλου στο χαρτοφυλάκιο. Με άλλα λόγια, αν ένας τίτλος με έναν συγκεκριμένο λόγο  $(\bar{R}_i - R_F)/\hat{a}_i$  συμπεριληφθεί στο άριστο χαρτοφυλάκιο, τότε όλοι οι τίτλοι με μεγαλύτερο λόγο θα συμπεριληφθούν επίσης. Από την άλλη πλευρά, αν ένας τίτλος με ένα συγκεκριμένο  $(\bar{R}_i - R_F)/\hat{a}_i$  εξαιρεθεί από το χαρτοφυλάκιο, τότε όλοι οι τίτλοι με χαμηλότερο λόγο θα εξαιρεθούν επίσης (ή αν επιτρέπονται οι πωλήσεις short, θα πωληθούν short). Όταν υιοθετηθεί η υπόθεση ότι το υπόδειγμα του απλού δείκτη αναπαριστά τη συνδιακύμανση των αποδόσεων των τίτλων, τότε η συμμετοχή ή η μη συμμετοχή ενός τίτλου στο χαρτοφυλάκιο εξαρτάται από το μέγεθος της υπερβάλλουσας απόδοσης ως προς το BETA. Το πόσοι τίτλοι θα συμπεριληφθούν στο άριστο χαρτοφυλάκιο εξαρτάται από μία μοναδική τιμή κατώφλι, τέτοια ώστε όλοι οι τίτλοι με μεγαλύτερη αναλογία  $(\bar{R}_i - R_F)/\hat{a}_i$  θα συμπεριληφθούν, ενώ όλοι οι τίτλοι με μικρότερη αναλογία θα απορριφθούν. αυτή η τιμή κατώφλι συμβολίζεται με  $C^*$ .

Οι κανόνες για τον καθορισμό των τίτλων που θα συμπεριληφθούν στο άριστο χαρτοφυλάκιο είναι οι ακόλουθοι:

1. Υπολογίζεται ο λόγος της υπερβάλλουσας απόδοσης ως προς το BETA για κάθε τίτλο που διαπραγματεύεται στο Χρηματιστήριο και οι τίτλοι ταξινομούνται από αυτόν με το μεγαλύτερο λόγο προς αυτόν με το μικρότερο τίτλο.
2. Το άριστο χαρτοφυλάκιο απαρτίζεται από όλους εκείνους τους τίτλους για τους οποίους ο λόγος  $(\bar{R}_i - R_F)/\hat{a}_i$  είναι μεγαλύτερος από μία συγκεκριμένη τιμή κατώφλι  $C^*$ . Στη συνέχεια θα ορισθεί το  $C^*$  και θα ερμηνευθεί η οικονομική του σημασία.

Η διαδικασία που περιγράφηκε είναι πάρα πολύ απλή. Αφότου καθορισθεί το  $C^*$  οι τίτλοι που θα συμπεριληφθούν στο χαρτοφυλάκιο εντοπίζονται με απλή επισκόπηση. Επιπλέον το ποσό που θα επενδυθεί σε κάθε τίτλο καθορίζεται εξίσου εύκολα, όπως θα φανεί στη συνέχεια.

## 2. Η ταξινόμηση των τίτλων

Οι τίτλοι ταξινομούνται κατά φθίνουσα τάξη της υπερβάλλουσας απόδοσης ως προς το *BETA*.

## 3. Ο καθορισμός της τιμής κατώφλιού ( $C^*$ )

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, το  $C^*$  είναι η τιμή κατώφλι. Επιλέγονται όλοι οι τίτλοι των οποίων ο λόγος της υπερβάλλουσας απόδοσης ως προς το συντελεστή *BETA* είναι μεγαλύτερος από την τιμή κατώφλι και απορρίπτονται όλοι οι τίτλοι ο λόγος των οποίων είναι μικρότερος από την τιμή κατώφλι. Η τιμή του  $C^*$  υπολογίζεται από τα χαρακτηριστικά όλων των τίτλων που συμμετέχουν στο άριστο χαρτοφυλάκιο. Ο καθορισμός του  $C^*$  γίνεται με μία επαναληπτική διαδικασία που υποθέτει κάθε φορά ότι στο χαρτοφυλάκιο συμπεριλαμβάνεται διαφορετικός κάθε φορά αριθμός τίτλων. Εστω λοιπόν ότι η τιμή  $C_i$  είναι υποψήφια για την τιμή  $C^*$ . Η τιμή της  $C_i$  υπολογίζεται με την υπόθεση ότι στο άριστο χαρτοφυλάκιο συμπεριλαμβάνονται  $i$  τίτλοι.

Επειδή όμως οι τίτλοι έχουν ταξινομηθεί από τη μεγαλύτερη υπερβάλλουσα απόδοση ως προς το συντελεστή *BETA* προς τη μικρότερη, όλοι οι τίτλοι που έχουν ταξινομηθεί σε υψηλότερη θέση θα συμπεριληφθούν στο άριστο χαρτοφυλάκιο επίσης. Η διαδικασία για τον υπολογισμό του  $C_i$  περιγράφεται με λεπτομέρεια στη συνέχεια- ξεκινάει υποθέτοντας αρχικά ότι στο άριστο χαρτοφυλάκιο συμπεριλαμβάνεται μόνο ο πρώτος τίτλος, δηλαδή ο τίτλος με τη μεγαλύτερη υπερβάλλουσα απόδοση ( $i=1$ ), κατόπιν ότι συμπεριλαμβάνονται στο χαρτοφυλάκιο ο πρώτος και ο δεύτερος ( $i=2$ ), κατόπιν ο πρώτος, ο δεύτερος και ο τρίτος ( $i=3$ ) και ούτω καθεξής. Όλες αυτές οι τιμές των  $C_i$  είναι υποψήφιας για τη τιμή  $C^*$ . Θα ξέρουμε ότι βρήκαμε την άριστη τιμή  $C_i$  που είναι η  $C^*$ , όταν όλοι οι τίτλοι που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό του  $C_i$  έχουν μεγαλύτερη υπερβάλλουσα απόδοση από το  $C_i$  και όλοι οι τίτλοι που δεν χρησιμοποιήθηκαν στον υπολογισμό του  $C_i$  έχουν μικρότερη υπερβάλλουσα απόδοση από το  $C_i$ . Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι υπάρχει πάντα μόνο ένα  $C_i$  και αυτό είναι το  $C^*$ .

#### 4. Ο υπολογισμός της τιμής-κατωφλιού $C^*$

Η επαναληπτική διαδικασία που περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα για τον υπολογισμό της τιμής-κατωφλιού  $C^*$ , μπορεί να πάρει και αλγεβρική μορφή. Έτσι, για ένα χαρτοφυλάκιο με  $i$  τίτλους το  $C_i$  δίνεται από τη σχέση:

$$C_i = \frac{\sigma_m^2 \sum_{j=1}^i \frac{(\bar{R}_j - R_F) \beta_j}{\sigma_{ej}^2}}{1 + \sigma_m^2 \sum_{j=1}^i \left( \frac{\beta_j^2}{\sigma_{ej}^2} \right)}$$

όπου:  $\sigma_m^2$  είναι η διακύμανση του γενικού δείκτη  
 $\sigma_{ej}^2$  είναι η διακύμανση της απόδοσης του τίτλου που δεν οφείλεται στην κύμανση του γενικού δείκτη. Αυτή συνήθως αναφέρεται ως μη συστηματικός κίνδυνος του τίτλου

Αποδεικνύεται, ότι η σχέση που ακολουθεί είναι ισοδύναμη με την προηγούμενη. Η μαθηματικά ισοδύναμη σχέση για τον υπολογισμό του  $C_i$  χρησιμεύει στο ερμηνευθεί η οικονομική σημασία της διαδικασίας που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα και είναι η ακόλουθη:

$$C_i = \frac{\beta_{ip} (\bar{R}_p - R_F)}{\beta_i}$$

όπου:  $\beta_{ip}$  είναι η αναμενόμενη μεταβολή στην απόδοση του τίτλου  $i$  που προκαλείται από μία μεταβολή κατά 1% στην απόδοση του άριστου χαρτοφυλακίου  
 $\bar{R}_p$  είναι η αναμενόμενη απόδοση του άριστου χαρτοφυλακίου

Φυσικά τα  $\beta_{ip}$  και  $\bar{R}_p$  δεν είναι γνωστά εκ των προτέρων. Θα υπολογισθούν όταν κατασκευασθεί το άριστο χαρτοφυλάκιο.

#### 5. Το μερίδιο του κάθε τίτλου στο άριστο χαρτοφυλάκιο

Σύμφωνα με του Elton, Gruber, το μερίδιο του κάθε τίτλου στο άριστο χαρτοφυλάκιο δίνεται από το λόγο

$$X_i = \frac{Z_i}{\sum_{i=1}^N Z_i}$$

όπου:  $Z_i = \frac{\beta_i}{\sigma_{ei}^2} \left( \frac{\bar{R}_i - R_F}{\beta_i} - C^* \right)$