SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES

ΠΟΣΟΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Γιώργος Λούντζης (PhD, MSc, MEng)

Εντεταλμένος Διδάσκων (ΕΣΠΑ)
2023-2024

ΕΝΟΤΗΤΑ 7

1. ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΥΠΟ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ

2. ΜΕΘΟΔΟΣ LAGRANGE

3. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ENOTHTA 7

Έστω η πολυμεταβλητή συνάρτηση $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$

υπό τον περιορισμό $g(x_1, x_2, \ldots x_n)=b$ ($M = P_1X_1 + P_2X_2$).

Στη μέθοδο Lagrange εισάγουμε μία νέα μεταβλητή τη λ (πολλαπλασιαστής Lagrange) και κατασκευάζουμε την Λαγκρατζιανή συνάρτηση:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1,x_2) + \lambda[b - g(x_1, x_2)]$$

Συνθήκες για τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο:

1. $\frac{\partial L}{\partial x1} = \frac{\partial f}{\partial x1} - \lambda\frac{\partial g}{\partial x1} = 0$
2. $\frac{\partial L}{\partial x2} = \frac{\partial f}{\partial x2} - \lambda\frac{\partial g}{\partial x2} = 0$
3. $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = b - g(x_1, x_2) = 0$ → εγγυάται αυτόματα ότι ο περιορισμός ικανοποιείται.

ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Διαιρούμε τις εξισώσεις (1) και (2) για τον περιορισμό του λ:

$$\frac{\partial f/\partial x1}{\partial f/\partial x2} = \frac{\partial g/\partial x1}{\partial g/\partial x2}$$

Από την (3): $b = g\,(x_1, x_2)$

Μπορώ να βρω τα x_1^*, x_2^*.

Για τον υπολογισμό του λ^* λύνω ως προς λ την (1): $\lambda = \dfrac{\partial f/\partial x1}{\partial g/\partial x2}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω, η συνάρτηση η $f = x^{1/2}y^{1/2}$ υπό τον περιορισμό $\alpha x + cy = b \rightarrow b - \alpha x - cy = 0$

Η λαγκρατζιανή συνάρτηση είναι $L = x^{1/2}y^{1/2} + \lambda[b - \alpha x - cy]$

Συνθήκες πρώτης τάξης:

i. $L_x = \frac{1}{2} x^{-1/2}y^{1/2} - \lambda\alpha = 0$

ii. $L_y = \frac{1}{2} y^{-1/2}x^{1/2} - \lambda c = 0$

iii. $L_\lambda = b - \alpha x - cy = 0$

$$(\div) \quad \frac{y}{x} = \frac{\alpha}{c} \rightarrow y = \frac{\alpha x}{c}$$

$$b - \alpha x - c\frac{\alpha x}{c} = 0 \rightarrow x^* = \frac{b}{2\alpha}$$

Μέσω της (iii) $\rightarrow b - \alpha\frac{b}{2\alpha} - cy = 0 \rightarrow y^* = \frac{b}{2c}$

Για να βρούμε το λ, μέσα από την (i) και αντικαθιστώ τις τιμές για τα x^* και y^*

$$\lambda^* = \frac{1}{2\alpha} x^{*-1/2}y^{*1/2} = \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{b}{2\alpha}\right)^{-1/2}\left(\frac{b}{2c}\right)^{1/2} = \frac{1}{2\alpha^{1/2}c^{1/2}}$$

Ερμηνεία πολλαπλασιαστή Lagrange

$$L^{*}= f(x^{*}_1,x^{*}_2)+ \lambda^{*}[b- g(x^{*}_1,x^{*}_2)]$$

Διαφορίζοντας ως προς b βρίσκουμε:

$$\frac{dL^{*}}{db} = fx_1\ dx^{*}_1/db + fx_2\ dx^{*}_2/db +[\ b- g(x^{*}_1,x^{*}_2)]d\ \lambda^{*}/db + \lambda^{*}(1-gx_1\ dx^{*}_1/db- gx_2\ dx^{*}_2/db)$$

ή

$$\frac{dL^{*}}{db} = (fx_1-\lambda^{*}gx_1)\ dx^{*}_1/db +(\ fx_2-\lambda^{*}gx_2)\ dx^{*}_2/db+[\ b- g(x^{*}_1,x^{*}_2)]d\ \lambda^{*}/db + \lambda^{*}$$

fx_1, fx_2, gx_1 και gx_2 είναι εκτιμένες στο βέλτιστο

Τώρα στο βέλτιστο έχουμε

$fx_1-\lambda^{*}gx_1=0$,

$fx_2-\lambda^{*}gx_2=0$, και

$b- g(x^{*}_1,x^{*}_2)=0$.

Γι’ αυτό παίρνουμε $\frac{dL^{*}}{db} = \lambda^{*}$

Δηλαδή, ο πολλαπλασιαστής Lagrange μας λέει την επίδραση μία αλλαγής στον περιορισμό μέσω της παραμέτρου b στη βέλτιστη τιμή της συνάρτησης στόχου f.

Συνθήκες δεύτερης τάξης για περιορισμένη βελτιστοποίηση

Υποθέτουμε ότι έχουμε μία συνάρτηση n μεταβλητών $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ και έναν περιορισμό $g(x_1, x_2, \ldots x_n)=b$. Κατασκευάζοντας έναν φραγμένο Εσσιανό πίνακα (Bordered Hessian) από τη συνάρτηση Lagrange όπου τα συνοριακά στοιχεία είναι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης του περιορισμού g και τα υπόλοιπα στοιχεία είναι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της Lagrangean συνάρτησης L.

$$|H^B| = \begin{matrix} 0 & g1 & gn \\ g1 & L11 & L1n \\ g2 & L21 & L2n \\ gn & Ln1 & Lnn \end{matrix}$$

Εκτιμημένες μερικές παράγωγοι στις κριτικές τιμές $(x_1^*, x_2^* \ldots x_n^*, \lambda^*)$

$$|H_1^B| = \begin{matrix} 0 & g1 \\ g1 & L11 \end{matrix}$$

$$|H_2^B| = \begin{matrix} 0 & g1 & g2 \\ g1 & L11 & L12 \\ g2 & L21 & L22 \end{matrix}$$

Επαρκείς συνθήκες για τοπικό μέγιστο

$|H_1^B|<0, \qquad |H_2^B|>0$

Επαρκείς συνθήκες για τοπικό ελάχιστο:

$|H_1^B|<0, \qquad |H_2^B|<0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$z=xy$ υπό τον περιορισμό $x+y=6$ $\Rightarrow$

$L = xy + \lambda(6-x-y)$

$L_x = y-\lambda=0,\ y=\lambda$

$L_y = x-\lambda=0,\ x=\lambda$

$L_\lambda = 6-x-y=0 \rightarrow \boxed{x^*=y^*=\lambda^*=3}$

$L_{xx}=L_{yy}=0$

$L_{xy}=L_{yx}=1$

$g_x=g_y=1$

Κατασκευάζουμε το συνοριακό (ή πλαισιωμένο) Εσσιανό Πίνακα της συνάρτησης Lagrange:

$$|H^B| = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & gx & gy \\ gx & Lxx & Lxy \\ gy & Lyx & Lyy \end{matrix}$$

Ελέγχουμε τα πρόσημα των ηγετικών κύριων ελασσόνων:

$$|H_1^B|=0-1<0$$

$$|H_2^B|=-1(0-1)+1(1-0)>0$$

Άρα, τοπικό μέγιστο στο $x^*=y^*=3$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Σχέση του μακροχρονίου συνολικού κόστους και της συνάρτησης παραγωγής

Έστω $Q = AL^aK^b$ με $A > 0$, $a > 0$ και $b<1$

Περιορισμός του συνολικού κόστους $C = WL + rK$

Σχηματίζω συνάρτηση Lagrange $LA = AL^aK^b + \lambda(C - WL - rK)$

όπου Q το παραγόμενο προϊόν,

L η εισροή εργασία,

K η εισροή κεφάλαιο και

A, a, b είναι σταθερές

W αμοιβές του κεφαλαίου

r αμοιβές της εργασίας

Για max οι συνθήκες πρώτης τάξης απαιτούν οι πρώτες μερικοί παράγωγοι σε σχέση με τα K, L και λ να είναι ίσες με το μηδέν:

$$\frac{\partial LA}{\partial L} = a*\frac{Q}{L} - \lambda w = 0 \rightarrow \quad a*\frac{Q}{L} = \lambda w$$

$$\frac{\partial LA}{\partial K} = b*\frac{Q}{K} - \lambda r = 0 \rightarrow \quad b*\frac{Q}{K} = \lambda r$$

$$(\div) \quad \frac{a*\frac{Q}{L}}{b*\frac{Q}{K}} = \frac{\lambda w}{\lambda r} \rightarrow \quad K = \frac{W}{r} * \frac{b}{a} * L$$

$$\frac{\partial LA}{\partial \lambda} = C - WL - rK = 0 \rightarrow \quad C = WL - rK$$

Σχέση του μακροχρονίου συνολικού κόστους και της συνάρτησης παραγωγής

Αντικαθιστώντας το $K=\frac{W}{r}*\frac{b}{a}*L$ στη συνάρτηση παραγωγής, έχω:

$Q=L^a(\frac{W}{r}*\frac{b}{a}*L)^b \rightarrow Q=L^a L^b(\frac{W}{r}*\frac{b}{a})^b \rightarrow Q=L^{a+b}(\frac{W}{r}*\frac{b}{a})^b$

$\rightarrow L^{a+b}=\frac{Q}{(\frac{W}{r}*\frac{b}{a})^b} \rightarrow L^{a+b}=Q*(\frac{W}{r}*\frac{b}{a})^{-b} \rightarrow \mathbf{L=Q^{1/a+b}(\frac{r}{w}*\frac{a}{b})^{b/a+b}}$

Συνεπώς, η $K=\frac{W}{r}*\frac{b}{a}*L \rightarrow K=\frac{W}{r}*\frac{b}{a}[Q^{1/a+b}(\frac{r}{w}*\frac{a}{b})^{b/a+b}]$

$\rightarrow K=Q^{1/a+b}(\frac{r}{w}*\frac{a}{b})^{b/a+b-1} \rightarrow \mathbf{K=Q^{1/a+b}(\frac{r}{w}*\frac{a}{b})^{a/a+b}}$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Σχέση του μακροχρονίου συνολικού κόστους και της συνάρτησης παραγωγής

→ $\mathbf{L= Q^{1/a+b}(\frac{r}{w} * \frac{a}{b})^{b/a+b}}$

→ $\mathbf{K= Q^{1/a+b}(\frac{r}{w} * \frac{a}{b})^{a/a+b}}$

Οπότε, από την $C = WL + rK$, έχω

→ $C=W\,Q^{1/a+b}(\frac{r}{w} * \frac{a}{b})^{b/a+b}+r\,Q^{1/a+b}(\frac{w}{r} * \frac{b}{a})^{b/a+b}$ → $C= Q^{1/a+b}[W(\frac{r}{w} * \frac{a}{b})^{b/a+b}+r(\frac{w}{r} * \frac{b}{a})^{b/a+b}]$

→ $C= Q^{1/a+b}[W(\frac{r}{w} * \frac{a}{b})^{b/a+b}+ \frac{r}{(\frac{r}{w} * \frac{a}{b})^{a/a+b}}]$ → $C = Q^{1/a+b}[\frac{ra}{b} + \frac{r}{(\frac{r}{w} * \frac{a}{b})^{a/a+b}}]$

→ $C = Q^{1/a+b}r[(\frac{a}{b}+1)(\frac{w}{r} * \frac{a}{b})^{a/a+b}]$

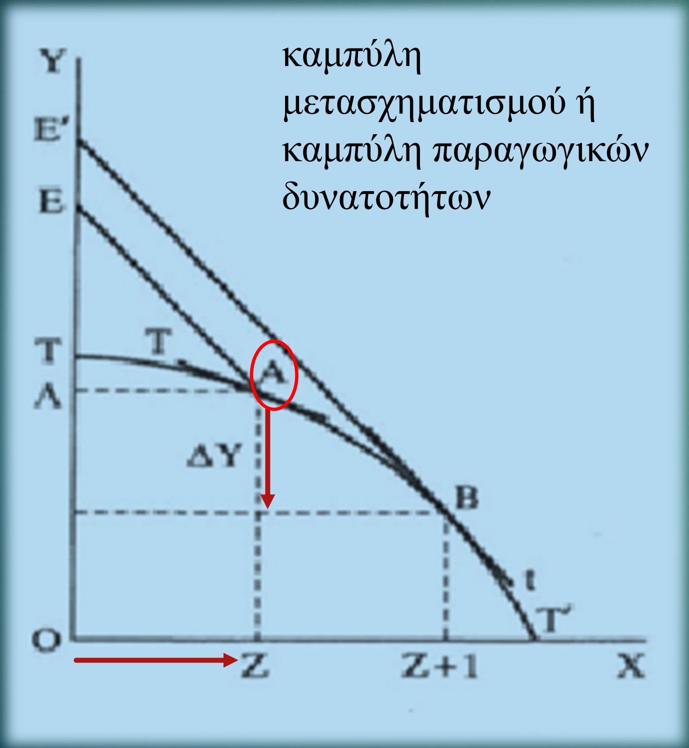
→ $\boxed{\boldsymbol{C = r(\frac{a}{b} +b)[\frac{w}{r} * \frac{a}{b})^{a}Q]^{1/a+b}}}$

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES
SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ 7

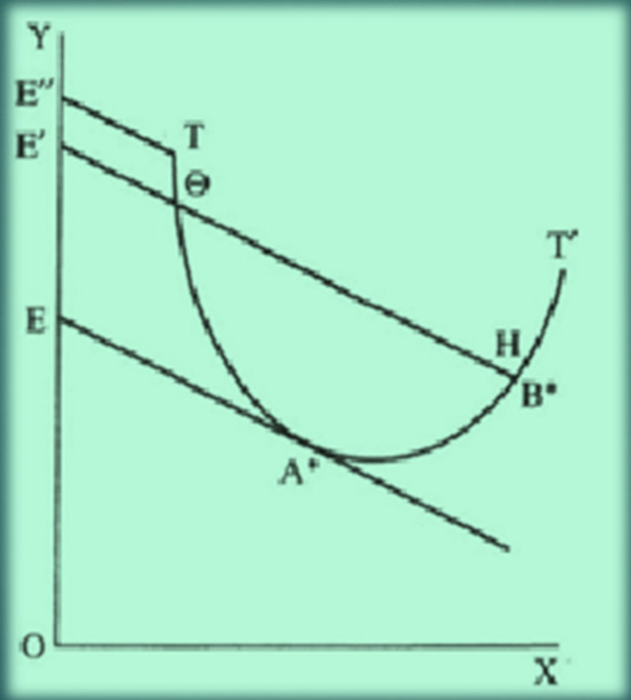
Διαγραμματική αποτύπωση ισορροπίας της επιχείρησης



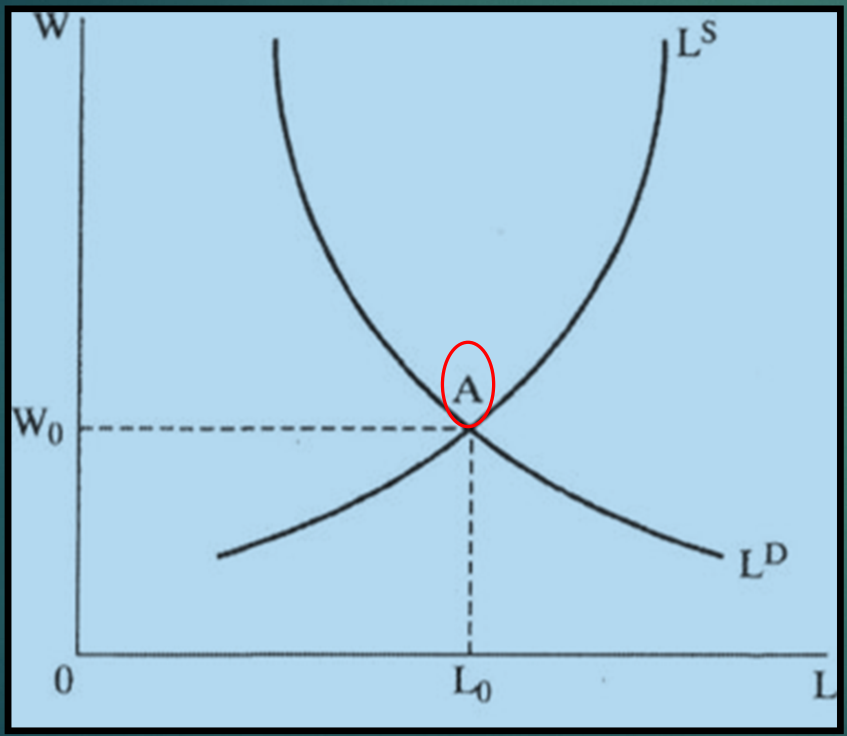
P_χ είναι η τιμή του προϊόντος X
Py είναι η τιμή του προϊόντος Y

$$\left.\begin{aligned} EA &= -\frac{P\chi}{Py} \\ EA &= -\frac{\Lambda E}{\Lambda A} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\Lambda E}{\Lambda A} = \frac{P\chi}{Py} \qquad \text{ή} \qquad Py\Lambda E = P\chi\Lambda A$$

Διαγραμματική αποτύπωση ισορροπίας της επιχείρησης



Ισορροπία στην αγορά εργασίας και συνδικάτα



όπου

L ο εργατικός πληθυσμός,

W ο μισθός,

L^D η ζήτηση εργασίας,

L^s η προσφορά εργασίας.

Ισορροπία στην αγορά εργασίας και συνδικάτα

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση χρησιμότητας του εργατικού συνδικάτου δίνεται από

$$U=U(w,L), \qquad \frac{\partial U}{\partial W} = Uw>0, \qquad \frac{\partial U}{\partial L} = UL>0$$

U η συνολική χρησιμότητα του συνδικάτου,

W το επίπεδο των μισθών,

L ο αριθμός των απασχολούμενων.

Η συνάρτηση ζήτησης εργασίας είναι:

$L = D(W)$ ← **Περιορισμός**

Συνάρτηση του Lagrange θα έχουμε

$$L = U(W, L) + \lambda(L - D(W))$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ 7

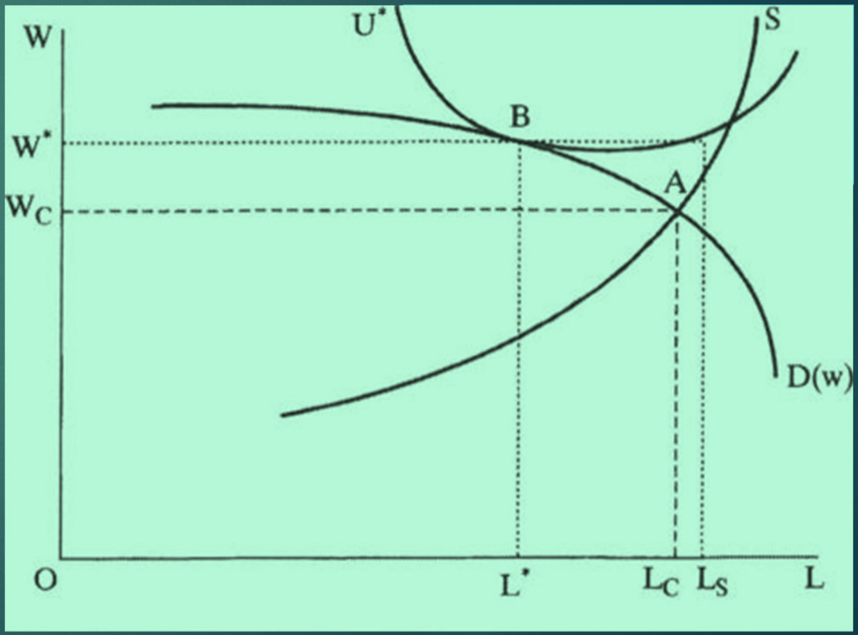
Ισορροπία στην αγορά εργασίας και συνδικάτα

$$L = U(W, L) + \lambda(L - D(W))$$

Η ισορροπία στην αγορά θα υπάρχει όταν

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial W} &= Uw - \lambda D'(W^*) \\ \frac{\partial L}{\partial L} &= UL + \lambda = 0 \end{aligned}\right\} (\div) \qquad \frac{Uw}{UL} = -D'(W)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = L - D(W^*) = 0$$



Η ισορροπία της ανταλλαγής

Γιώργος (Γ)
Πέτρος (Π)
Τόξα (Τ)
Βέλη (Β)

Αν οι συνολικές διαθέσιμες ποσότητες του Γιώργου και του Πέτρου για τα δύο αγαθά είναι Μ και Ν

→ $U_r(T_Γ\ B_Γ)$

Άρα, για $MaxU_r(T_r,B_r)$ με τους περιορισμούς

$$M-T_Γ-T_Π \geq 0$$

$$N-B_Γ-B_Π \geq 0$$

$$T_Γ,\ B_Γ \geq 0$$

Σχηματίζω την λαγκρατζιανή συνάρτηση:

$$L_Γ= U_r(T_r,B_r)+λ_T(M-T_Γ-T_Π)+λ_B(N-B_Γ-B_Π)$$

Η ισορροπία της ανταλλαγής

Εάν ο Γιώργος συμπεριφέρεται ορθολογικά, τότε θα θέλει όσο το δυνατόν περισσότερα τόξα και βέλη. Έτσι, και οι δυο περιορισμοί θα ισχύουν.

Οπότε,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L\Gamma}{\partial T\Gamma} &= \frac{\partial U\Gamma}{\partial T\Gamma} - \lambda_T = 0 \\ \frac{\partial L\Gamma}{\partial B\Gamma} &= \frac{\partial U\Gamma}{\partial B\Gamma} - \lambda_B = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \frac{\frac{\partial U\Gamma}{\partial T\Gamma}}{\frac{\partial U\Gamma}{\partial B\Gamma}} = \frac{\lambda_T}{\lambda_B}$$

Για τον Πέτρο η συνάρτηση του Lagrange θα είναι:

$$L_\Pi = U_\Pi(T_\Pi, B_\Pi) + \mu_T(M - T_\Gamma - T_\Pi) + \mu_B(N - B_\Gamma - B_\Pi)$$

Παραγωγίζοντας ως προς T_Π και B_π, παίρνουμε:

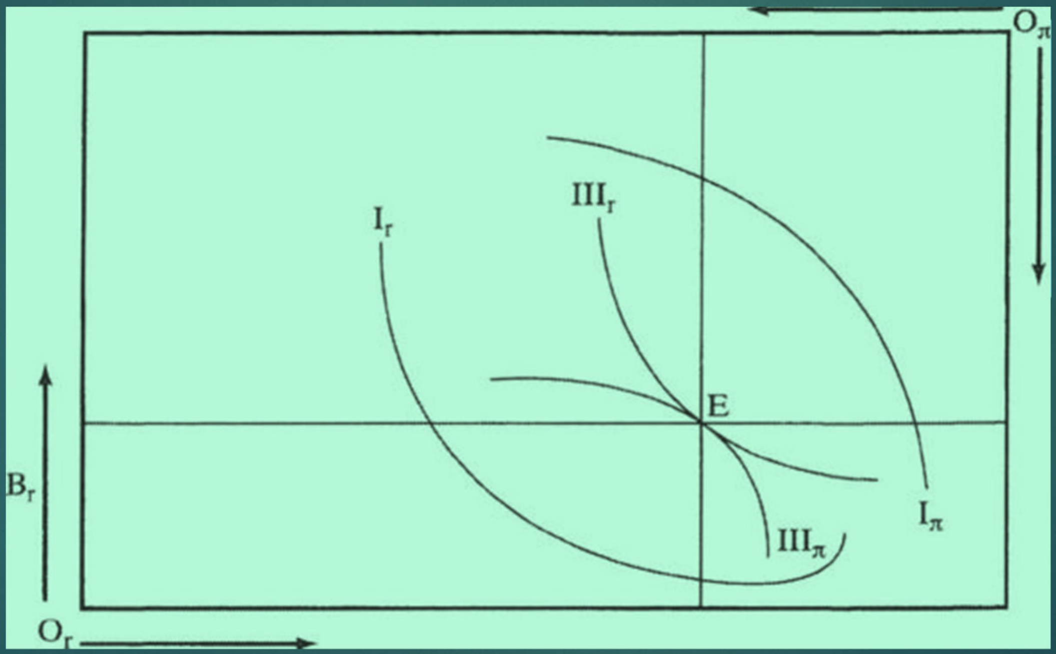
$$\frac{\frac{\partial U\Pi}{\partial T\Pi}}{\frac{\partial U\Pi}{\partial B\Pi}} = \frac{\mu_T}{\mu_B}$$

$$\frac{\frac{\partial U\Gamma}{\partial T\Gamma}}{\frac{\partial U\Gamma}{\partial B\Gamma}} = \frac{\frac{\partial U\Pi}{\partial T\Pi}}{\frac{\partial U\Pi}{\partial B\Pi}}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Η ισορροπία της ανταλλαγής



Μεγιστοποίηση χρησιμότητας και ζήτηση καταναλωτή

Έστω η U(x,y) υπό το περιορισμό $P_x x+P_y y=M$

Υποθέτω ότι $U_x, U_y>0$

$$L= U(x,y)+ \lambda[M- P_x x-P_y y]$$

$$\left.\begin{aligned} L_x &= U_x- \lambda Px=0 \\ L_y &= U_y- \lambda Py=0 \end{aligned}\right\} \quad U_x/ Px= U_y/Py =\lambda$$

$$L_\lambda= M- P_x x-P_y y=0$$

Ο πολλαπλασιαστής Lagrange είναι η οριακή χρησιμότητα του εισοδήματος M όταν max U:

$$\lambda^*= \frac{\partial U^*}{\partial M} \text{ ή } - \frac{Ux}{Uy} = - \frac{Px}{Py}$$

Μεγιστοποίηση χρησιμότητας και ζήτηση καταναλωτή

Η καμπύλη αδιαφορίας είναι ο τόπος των συνδυασμών x και y που αποδίδουν ένα σταθερό επίπεδο χρησιμότητας U:

$$dU = U_x dx + U_y dy = 0$$

$$U_x + U_y dy/dx = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{Ux}{Uy}$$

Αναδιατάσσοντας τον εισοδηματικό περιορισμό $P_x x + P_y y = M \rightarrow y = M/P_y - P_x x/P_y$

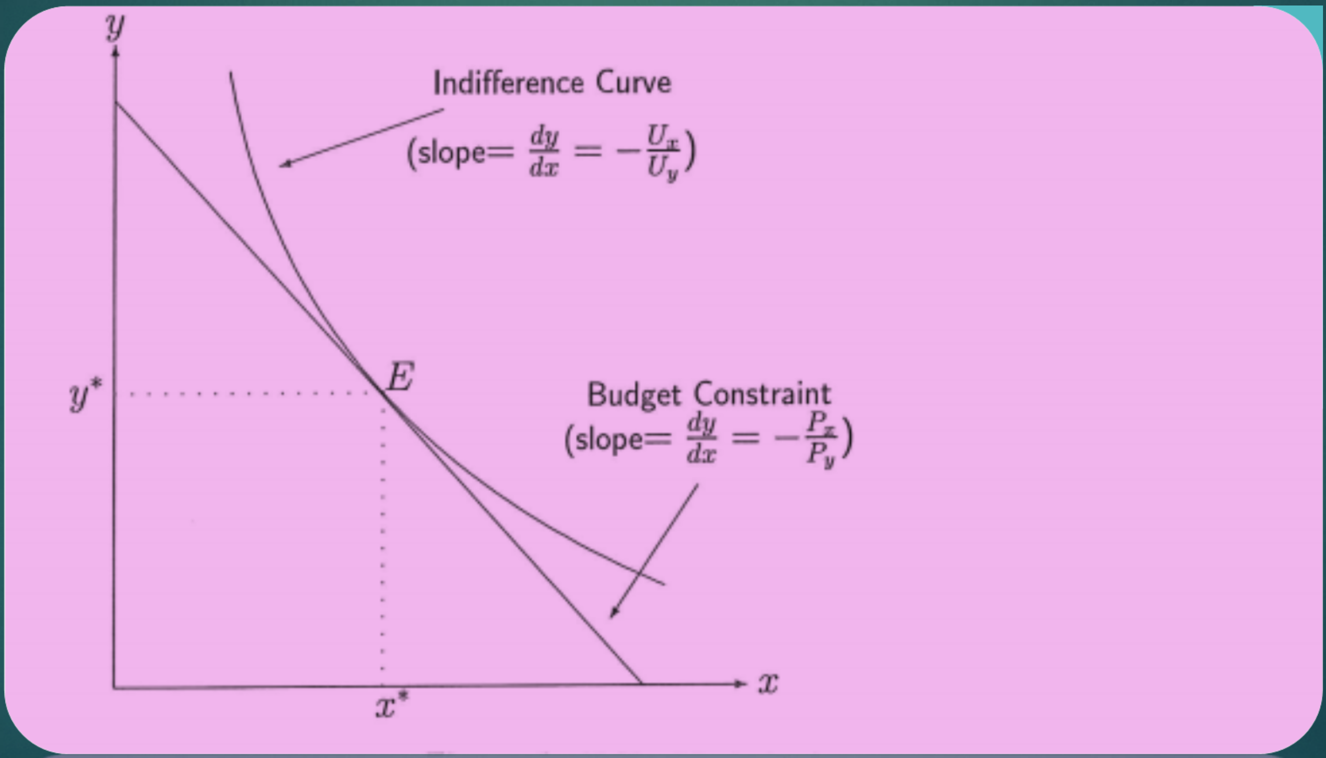
Συνθήκες δεύτερης τάξης: $|H^B| = \begin{vmatrix} 0 & Px & Py \\ Px & Uxx & Uxy \\ Py & Uxy & Uyy \end{vmatrix}$ $|H^B_1| = -P_x^2 < 0$ $|H^B_2| = -P_x^2 U_{yy} - P_y^2 U_{xx} + 2P_x P_y U_{xy} > 0$

Υπενθυμίζοντας από τις συνθήκες πρώτης τάξης ότι $P_x = U_x/\lambda$ και $P_y = U_y/\lambda$.

Γι αυτό:

$$|H^B_2| = \frac{-Ux^2Uyy - Uy^2Uxx + 2UxUyUxy}{\lambda^2} > 0 \rightarrow Ux^2Uyy + Uy^2Uxx - 2UxUyUxy < 0$$ για τοπικό μέγιστο.

Μεγιστοποίηση χρησιμότητας και ζήτηση καταναλωτή



ΑΣΚΗΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Ας υποθέσουμε ότι ένας καταναλωτής έχει ένα εισόδημα 90 € και θέλει να το κατανείμει για την απόκτηση δύο αγαθών του αγαθού Α και του αγαθού Β.

Υποθέτουμε, ακόμη, ότι η τιμή για τα δύο αγαθά είναι: $P_\alpha = P_\beta = 2$ €.

Γνωρίζουμε, ακόμη, ότι η συνάρτηση χρησιμότητας του καταναλωτή είναι: $U = A \cdot 2B$.

Να βρεθεί η ποσότητα των δύο αγαθών, για τις οποίες ο καταναλωτής απολαμβάνει τη ***μεγαλύτερη χρησιμότητα.***

ΛΥΣΗ

Υπάρχει ο εισοδηματικός περιορισμός:

$P_\alpha \cdot A + P_\beta \cdot B = 90 \rightarrow 2A + 2B = 90 \rightarrow A + B = 45$

Σχηματίζω τη συνάρτηση Lagrange: $LA(A,B) = 2AB + \lambda(45 - A - B)$

Οι πρώτου βαθμού συνθήκες (αναγκαίες) για ένα μέγιστο: $LA_A=0$, $LA_B=0$, $LA_\lambda=0$

$$\left.\begin{aligned}
LA_A &= \frac{dL}{dA} = 2B-\lambda \rightarrow 2B-\lambda=0 \rightarrow B=\frac{\lambda}{2} \\
LA_B &= \frac{dL}{dB} = 2A-\lambda \rightarrow 2A-\lambda=0 \rightarrow A=\frac{\lambda}{2} \\
LA_\lambda &= \frac{dL}{d\lambda} = 45 - A - B \rightarrow 45 - A - B = 0 \rightarrow A+B=45
\end{aligned}\right\} \quad \frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{2} = 45 \rightarrow \lambda = 45$$

Συνεπώς, για $\lambda = 45 \rightarrow$
B = 22,5 και A = 22,5

ΛΥΣΗ

Οι δευτέρου βαθμού συνθήκες (ικανές) για ένα μέγιστο απαιτούν:

$$LA_{AA}<0, \quad LA_{BB}<0, \quad (LA_{AB})^2< LA_{AA}LA_{BB}$$

$LA_{AA}= \frac{d^2 LA}{dA^2} = 0$

$LA_{BB} = \frac{d^2 LB}{dB^2} = 0$

$LA_{AB}= \frac{d^2 LA}{dA \quad dB} = 2$

$LA_{AA} = 0$ και $LA_{BB} = 0$

$(LA_{AB})^2 < LA_{AA}LA_{BB} \rightarrow \quad 4 < 0$, που δεν ισχύει

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιούμε τη μήτρα του Hessian:

Όπου, $g_A = \frac{d(A+B)}{dA} = 1$, και $g_B = \frac{d(A+B)}{dB} = 1$

$g_A^2 LA_{22} - 2 g_A g_B LA_{12} + g_B^2 LA_{11} = -4 < 0$**

Αφού το ανάπτυγμα της μήτρας του Hessian είναι μικρότερο του μηδενός, τότε τα σημεία A = B = 22,5 μεγιστοποιούν τη χρησιμότητα του καταναλωτή.

**Θυμίζω από προηγούμενα
$|H^B_2| = Ux^2 Uyy - 2UxUyUxy + Uy^2 Uxx < 0$ για τοπικό μέγιστο.

ΑΣΚΗΣΗ

Μια κτηματική εταιρία πώλησης ακινήτων διαφημίζει τα ακίνητά της σε δύο εφημερίδες: Στα Παντειακά Νέα, τα οποία είναι μικρής εμβέλειας και στα Περιφερειακά Νέα, εθνικής εμβέλειας.

Οι οικονομολόγοι της επιχείρησης πιστεύουν ότι υπάρχει μια σχέση μεταξύ των πωλήσεων Η και του ποσού που ξοδεύεται για διαφήμιση και στις δύο εφημερίδες. Η σχέση αυτή δίνεται από:

$$\mathrm{H} = \frac{4.500X}{2+X} + \frac{1.800\,Y}{20+Y}$$

όπου Χ είναι τα χρήματα (σε χιλ. ευρώ) που πληρώνονται για διαφήμιση στα Παντειακά Νέα και Υ τα χρήματα (σε χιλ. ευρώ) που πληρώνονται για διαφήμιση στα Περιφερειακά Νέα. Η αμοιβή της εταιρίας είναι το 12,5% και περιλαμβάνει το κόστος διαφήμισης. Εάν η εταιρία έχει σχεδιάσει να δαπανήσει 2.000.000 ευρώ για διαφήμιση, πώς θα έπρεπε να διανείμει αυτό το ποσό μεταξύ των δύο εφημερίδων, για να μεγιστοποιήσει τα καθαρά της κέρδη, και πόσα είναι αυτά;

ΛΥΣΗ

Αν Η οι πωλήσεις της κτηματικής εταιρίας το καθαρό της κέρδος (αμοιβή):

$$\Pi = 0{,}125H - 2.000$$

Άρα, θα βρω τις τιμές Χ και Υ μεγιστοποιείται η $H = \frac{4.500X}{2+X} + \frac{1.800\,Y}{20+Y}$ παρουσιάζει μέγιστο, υπό τον περιορισμό

$$X + Y = 2.000 \quad \rightarrow \quad 2.000 - X - Y = 0.$$

Σχηματίζω συνάρτηση Lagrange:

$$LA(K, L) = \frac{4.500X}{2+X} + \frac{1.800\,Y}{20+Y} + \lambda(2.000 - X - Y)$$

ΛΥΣΗ

Σχηματίζω συνάρτηση Lagrange:

$$LA(K, L) = \frac{4.500X}{2+X} + \frac{1.800\,Y}{20+Y} + \lambda(2.000 - X - Y)$$

Οι πρώτου βαθμού αναγκαίες συνθήκες για ένα μέγιστο απαιτούν: $\frac{dLA}{dX}=0$, $\frac{dLA}{dY}=0$, $\frac{dLA}{d\lambda}=0$

$$\frac{dLA}{dX}=0 \rightarrow d\left(\frac{4.500X}{2+X} + \frac{1.800\,Y}{20+Y} + \lambda(2.000 - X - Y)\right)/dX=0 \rightarrow d\left(\frac{4.500X}{2+X}\right)/dX + d\left(\frac{1.800\,Y}{20+Y}\right)/dX + d(\lambda(2.000 - X - Y))/dX=0$$

$$\rightarrow \frac{9000}{(2+X)^2} - \lambda=0 \qquad \rightarrow \frac{9000}{(2+X)^2} = \lambda$$

$$\frac{dLA}{dY}=0 \rightarrow d\left(\frac{4.500X}{2+X} + \frac{1.800\,Y}{20+Y} + \lambda(2.000 - X - Y)\right)/dY=0 \rightarrow d\left(\frac{4.500X}{2+X}\right)/dY + d\left(\frac{1.800\,Y}{20+Y}\right)/dY + d(\lambda(2.000 - X - Y))/dY=0$$

$$\rightarrow \frac{36000}{(20+Y)^2} - \lambda=0 \qquad \rightarrow \frac{36000}{(20+Y)^2} = \lambda$$

ΛΥΣΗ

$\frac{dLA}{d\lambda}=0 \rightarrow d(\frac{4.500X}{2+X}+\frac{1.800\,Y}{20+Y}+\lambda(2.000-X-Y))/d\lambda=0$

$\rightarrow d(\frac{4.500X}{2+X})/d\lambda + d(\frac{1.800\,Y}{20+Y})/d\lambda + d(\lambda(2.000-X-Y))/d\lambda=0 \qquad \rightarrow X+Y=2000$

Διαιρώ τις $\frac{9000}{(2+X)^2}=\lambda$ και $\frac{36000}{(20+Y)^2}=\lambda \rightarrow$

$\frac{9000}{(2+X)^2} / \frac{36000}{(20+Y)^2} = \frac{\lambda}{\lambda} \rightarrow \quad \frac{9000}{(2+X)^2} / \frac{36000}{(20+Y)^2} = 1 \rightarrow \frac{(20+Y)^2}{(2+X)^2} = 4 \rightarrow \frac{20+Y}{2+X} = 2 \rightarrow 20+Y = 4+2X$

$\rightarrow 2X-Y=16$

$\left.\begin{matrix} X+Y=2000 \\ Y=2X-16 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} X+(2X-16)=2.000 \\ Y=2X-16 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 3X=2016 \\ Y=2X-16 \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} X=672 \\ Y=1.328 \end{matrix}$

ΛΥΣΗ

Οι δευτέρου βαθμού συνθήκες (ικανές) για ένα μέγιστο :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2LA}{dX^2} < 0 \\ \dfrac{d^2LA}{dY^2} < 0 \\ \left(\dfrac{d^2LA}{dXdY}\right)^2 < \dfrac{d^2LA}{dX^2} * \dfrac{d^2LA}{dY^2} \end{array}\right\}$$

$$\frac{d^2LA}{dX^2} = d\left(\frac{9000}{(2+X)^2} - \lambda\right)/dX = -9000(2+x)^{-3} = -2{,}939427*10^{-5} < 0$$

$$\frac{d^2LA}{dY^2} = d\left(\frac{36000}{(20+Y)^2} - \lambda\right)/dY = -72000(2+Y)^{-3} = -3{,}060395*10^{-5} < 0$$

$$\frac{d^2LA}{dXdY} = d\left(\frac{9000}{(2+X)^2} - \lambda\right)/dY = 0$$

Άρα, $\left(\dfrac{d^2LA}{dXdY}\right)^2 = 0 < \dfrac{d^2LA}{dX^2} * \dfrac{d^2LA}{dY^2} = 8{,}995*10^{-10}$

Max Π όταν X = 672.000 € για διαφήμιση στα Παντειακά Νέα και Y = 1.328.000 € στα Περιφερειακά Νέα. Οι πωλήσεις H θα είναι:

$$H = \frac{4.500X}{2+X} + \frac{1.800Y}{20+Y} = 6.259.930,$$ άρα τα καθαρά κέρδη θα είναι:

$$\Pi = 0{,}125 \cdot H - 2.000.000 = 4.259.930\ €.$$

ΑΣΚΗΣΗ

Μια ξυλουργική εταιρία έχει την ακόλουθη συνάρτηση κόστους:

$$TC = 64L + 15S$$

Όπου L ο αριθμός των ξυλουργών και S η ποσότητα της ενέργειας που καταναλώνεται σε εκατομμύρια τόνους.

Η συνάρτηση παραγωγής δίνεται από την:

$$Q = 160L + 103S - 4L^2 - 1.03S^2$$

Η εταιρία επιθυμεί να παράγει 1.000 μονάδες προϊόντος.

Να βρεθεί η τιμή των L και S που ελαχιστοποιεί το κόστος παραγωγής.

ΛΥΣΗ

Η εταιρία επιθυμεί να παράγει 1.000 μονάδες προϊόντος:

$$Q = 1.000.$$

Min TC: $TC = 64L + 15S$

υπό τον περιορισμό $1.000 = 160L + 103S - 4L^2 - 1{,}03S^2.$

Σχηματίζω συνάρτηση Lagrange:

$$LA(L,S,\lambda) = 64L + 15S + \lambda(1.000 - 160L - 103S + 4L^{\cdot 2} + 1{,}03S^2)$$

Συνθήκες πρώτου βαθμού για min:

$$\frac{dLA}{dL} = 0 \qquad \frac{dLA}{dL} = d(64L + 15S + \lambda(1.000 - 160L - 103S + 4L^2 + 1{,}03S^2)/dL = 64 + \lambda(-160 + 8L) = 0$$

$$\frac{dLA}{dS} = 0 \qquad \frac{dLA}{dS} = d(64L + 15S + \lambda(1.000 - 160L - 103S + 4L^{\cdot 2} + 1{,}03S^2)/dS = 15 + \lambda(-103 + 2{,}06S) = 0$$

$$\frac{dLA}{d\lambda} = 0 \qquad \frac{dLA}{d\lambda} = d(64L + 15S + \lambda(1.000 - 160L - 103S + 4L^{\cdot 2} + 1{,}03S^2)/d\lambda = 1.000 - 160L - 103S + 4L^2 + 1{,}03S^2 = 0$$

ΛΥΣΗ

$64+\lambda(-160+8L)=0 \rightarrow 64=\lambda(160-8L)$

$15+\lambda(-103+2{,}06S)=0 \rightarrow 15=\lambda(-2{,}06S+103)$

$(\div)$

$1.000-160L-103S+4L^2+1{,}03S^2=0 \rightarrow 1000=160L+103S-4L^{2}-1{,}03S^2$

$$\frac{64}{15}=\frac{160-8L}{-2{,}06S+103} \rightarrow 64(-2{,}06S+103)=15(160-8L) \rightarrow L=1{,}0986S-34{,}933$$

$$1.000=160(1{,}0986S-34{,}933)+103S-4(1{,}0986S-34{,}933)^2-1{,}03S^2$$

$$\rightarrow 5{,}857S^2-585{,}79S+1.1470{,}5=0 \rightarrow S^2-100S+1.958{,}196=0 \text{ (τριώνυμο)}$$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=100^2-4\cdot 1958{,}196=2.167{,}216=(46{,}553)^2$$

Άρα, οι ρίζες είναι: $S_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-100\pm46{,}533}{2}=\begin{matrix}73{,}276\\26{,}7233\end{matrix}$

ΛΥΣΗ

Για S1 = 73,276 → L, = 1,0986 · 73,276 - 34,933 = 45,568 (αποδεκτή)

Για S_2= 26,7233 → L_2= 1,0986 · 26,7233 - 34,933 = -5,57 (απορρίπτεται)

Συνεπώς, L = 45,568 και S = 73,276

Άρα, $\lambda = \frac{64}{(160-8L)}$ =0,312

Οι συνθήκες δευτέρου βαθμού (ικανές) για min:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^2LA}{dS^2} > 0 \\ \frac{d^2LA}{dL^2} > 0 \\ \left(\frac{d^2LA}{dSdL}\right)^2 < \frac{d^2LA}{dS^2} * \frac{d^2LA}{dL^2} \end{array}\right\}$$

$\frac{d^2LA}{dS^2}$= d(15+λ(-103+2,06S))/dS=2,06λ=0,643 > 0

$\frac{d^2LA}{dL^2}$=d(64+λ(-160+8L))/dL=8λ=2,496 > 0

$\frac{d^2LA}{dSdL}$= d(15+λ(-103+2,06S))/dL=0

$\left(\frac{d^2LA}{dSdL}\right)^2=0< \frac{d^2LA}{dS^2} * \frac{d^2LA}{dL^2}$ =1,6049 που ισχύει

Άρα, για L = 45,568 και S = 73,276 το min TC

ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται το πιο κάτω υπόδειγμα συμπεριφοράς του καταναλωτή

$$U = 5Q_1^{0,8}\ Q_2^{0,2}$$

Ε = 1.000 ευρώ (το εισόδημα του καταναλωτή μιας συγκεκριμένης χρονικής περιόδου)

P_1 = 10 ευρώ (η τιμή του αγαθού 1)

P_2 = 40 ευρώ (η τιμή του αγαθού 2)

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση χρησιμότητας είναι ομογενής πρώτου βαθμού και

β) να βρεθούν οι ποσότητες που μεγιστοποιούν τα κέρδη της επιχείρησης.

ΛΥΣΗ

α) Θυμίζουμε ότι μία συνάρτηση $U = f(Q_1,Q_2)$ είναι ομογενής πρώτου βαθμού αν:

$$U(\lambda Q_1,\lambda Q_2) = \lambda U(Q_1,Q_2)$$

$$U(\lambda Q_1,\lambda Q_2) = 5(\lambda Q1)^{0,8} (\lambda Q_2)^{0,2} = 5\lambda^{0,8}Q_1^{0,8} \lambda^{0,2} Q_2^{0,2}= 5\lambda Q_1^{0,8} Q_2^{0,2}= \lambda U (Q_1,Q_2)$$

Συνεπώς, η συνάρτηση χρησιμότητας U είναι ομογενής πρώτου βαθμού.

β) Ζητείται η μεγιστοποίηση της U υπό τον περιορισμό $E = 1.000€ \rightarrow P_1Q_1+P_2Q_2 = 1.000$

$\rightarrow 1.000= 10Q_1 + 40Q_2$.

Σχηματίζω συνάρτηση Lagrange:

$$LA =5Q_1^{0,8} Q_2^{0,2}+\lambda(1.000 - 10Q1-40Q_2)$$

ΛΥΣΗ

Συνθήκες πρώτου βαθμού για max: (÷)

$\frac{dLA}{dQ1}=0$ $\quad$ $d(5Q_1^{0,8}\, Q_2^{0,2}+\lambda(\ 1.000 - 10Q_1-40Q_2))/dQ_1=0 \rightarrow 4Q_1^{-0,2}\, Q_2^{0,2}-10\lambda=0 \rightarrow 4Q_1^{-0,2}\, Q_2^{0,2}=10\lambda$

$\frac{dLA}{dQ2}=0$ $\quad$ $d(5Q_1^{0,8}\, Q_2^{0,2}+\lambda(\ 1.000 - 10Q_1-40Q_2))/dQ_2=0 \rightarrow Q_1^{0,8}\, Q_2^{-0,8}-40\lambda=0 \rightarrow Q_1^{0,8}\, Q_2^{-0,8}=40\lambda$

$\frac{dLA}{d\lambda}=0$ $\quad$ $d(5Q_1^{0,8}\, Q_2^{0,2}+\lambda(\ 1.000 - 10Q_1-40Q_2))/d\lambda=0 \rightarrow 10Q_1+40Q_2=1.000$

$$4Q_1^{-0,2}\, Q_2^{0,2}/\ Q_1^{0,8}\, Q_2^{-0,8}=\frac{10\lambda}{40\lambda} \rightarrow \frac{4Q_2}{Q_1}=\frac{1}{4} \rightarrow 16Q_2=Q_1$$

$10 \cdot 16Q_2 + 40Q_2=1.000 \rightarrow 200Q_2 = 1.000$

$\rightarrow Q_2 = 5$ και $Q_1=16Q_2 \rightarrow Q_1=80$

ΛΥΣΗ

Συνθήκες δευτέρου βαθμού (ικανές) για max:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^2 LA}{dQ_1^2}<0 \\ \frac{d^2 LA}{dQ_2^2}<0 \\ \left(\frac{d^2 LA}{dQ_1 dQ_2}\right)^2 < \frac{d^2 LA}{dQ_1^2} * \frac{d^2 LA}{dQ_2^2} \end{array}\right\}$$

$\frac{d^2 LA}{dQ_1^2}$=d(4Q$_1^{-0,2}$ Q$_2^{0,2}$-10λ)/dQ$_1$=-8Q$_1^{-1,2}$ Q$_2^{0,2}$=-0,0574<0

$\frac{d^2 LA}{dQ_2^2}$=d(Q$_1^{0,8}$ Q$_2^{-0,8}$-40λ)/dQ2=-0,8Q$_1^{0,8}$ Q$_2^{-1,8}$=-1,4703<0

$\frac{d^2 LA}{dQ_1 dQ_2}$=d((4Q$_1^{-0,2}$ Q$_2^{0,2}$-10λ)/dQ$_2$=0,8Q$_1^{-0,2}$ Q$_2^{-1,2}$=0,04827

Άρα, $\left(\frac{d^2 LA}{dQ_1 dQ_2}\right)^2 = 0,0482 < 0,0844 = \frac{d^2 LA}{dQ_1^2} * \frac{d^2 LA}{dQ_2^2}$ που ισχύει

Άρα, οι ποσότητες που μεγιστοποιούν τη χρησιμότητα του καταναλωτή, για το δεδομένο εισόδημά του της συγκεκριμένης χρονικής περιόδου, είναι:

$$Q_1 = 80 \text{ και } Q_2 = 5$$

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω ότι μια επιχείρηση έχει συνάρτηση ολικών κερδών

$\Pi(x, y) = -4x^2 - 5y^2 + 20xy$

όπου x και y είναι οι παραγόμενες και πωλούμενες ποσότητες των προϊόντων X, Y.

Για την παραγωγή κάθε μονάδας του προϊόντος X απαιτούνται 2 μονάδες ενός συντελεστή παραγωγής και για την παραγωγή κάθε μονάδας του προϊόντος Y απαιτούνται 5 μονάδες του συντελεστή αυτού που διατίθεται σε 40 μονάδες.

Να βρεθεί το μέγιστη τιμή κέρδους υπό την παραπάνω συνθήκη.

ΛΥΣΗ

Ο περιορισμός περιγράφεται από την εξίσωση:

$$2x+5y=40$$

Άρα, ψάχνω την $\max\Pi(x, y) = -4x\hat{}2 - 5y\hat{}2 + 20xy$ υπό τον περιορισμό $2x+5y=40$

Σχηματίζω συνάρτηση Lagrange:

$$\Pi\ (x, y, \lambda) = -4x\hat{}2 - 5y\hat{}2 + 20xy + \lambda(40 - 2x - 5y)$$

Βρίσκω τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης:

$$\left.\begin{aligned} &\Pi x = -8x + 20y - 2\lambda = 0 \rightarrow (\div 2)\ -4x + 10y - \lambda = 0 \\ &\Pi y = 20x - 10y - 5\lambda = 0 \rightarrow (\div 5)\ 4x - 2y - \lambda = 0 \end{aligned}\right\} (+) \quad \left.\begin{aligned} &\lambda = 4y \\ &4x - 2y - \lambda = 0 \end{aligned}\right\} \quad 4x-6y=0$$

$$\Pi\lambda = 40 - 2x - 5y = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{15}{2},\ y = 5,\quad \lambda = 20$$

ΛΥΣΗ

Υπολογίζω τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης

$\Pi xx = -8$

$\Pi yy = -10$

$\Pi xy = \Pi yx = 20$

$\Pi \lambda x = \varphi x = -2$

$\Pi \lambda y = \varphi y = -5$

Οπότε η συνοριακή εσσιανή H:

$$|\mathrm{H}| = \begin{vmatrix} 0 & \varphi x & \varphi y \\ \varphi x & \Pi xx & \Pi yx \\ \varphi y & \Pi xy & \Pi yy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & -8 & 20 \\ -5 & 20 & -10 \end{vmatrix} = 640 > 0$$

Επομένως, στο σημείο με $x = \frac{15}{2}$, $y = 5$ → τοπικό μέγιστο $\Pi(\frac{15}{2}, 5) = 4000$

ΤΕΛΟΣ 7ΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ