SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES

ΠΟΣΟΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Γιώργος Λούντζης (PhD, MSc, MEng)

Εντεταλμένος Διδάσκων (ΕΣΠΑ)
2023-2024

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

1. ΜΙΚΡΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

2. ΜΙΚΡΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΜΕ ΦΟΡΟΛΟΓΙΑ

3. ΜΙΚΡΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΣΕ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ ΜΕ ΔΥΟ ΤΟΜΕΙΣ

4. ΜΙΚΡΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΣΕ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ ΜΕ ΔΥΟ ΤΟΜΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΑΛΛΑΓΕΣ ΜΕ ΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Προσδιορισμός τιμής ισσορροπίας Pe ώστε

$$Q^s = Q^d = Q^e$$

Q^s η ποσότητα που προσφέρεται σε τέλειο ανταγωνισμό

Q^d η ζητούμενη ποσότητα

Αν $Q^s = -a + \beta P$ και $Q^d = \gamma - \delta P$

τότε

$$\left.\begin{aligned} Q^s &= -a + \beta P \\ Q^d &= \gamma - \delta P \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} Q^e &= -a + \beta P \\ Q^e &= \gamma - \delta P \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} -a &= Q^e - \beta P \\ \gamma &= Q^e + \delta P \end{aligned}$$

Κανόνας του Grammer

$$-a = 1 \cdot Q^e - \beta \cdot P$$

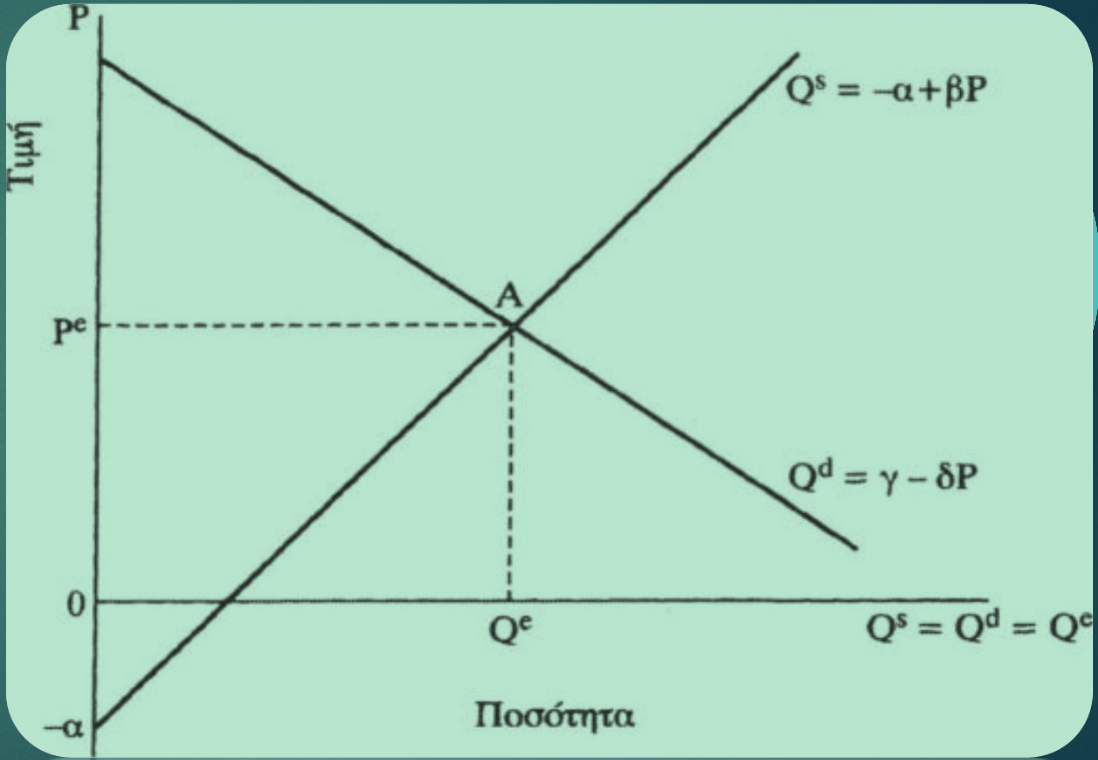
$$\gamma = 1 \cdot Q^e + \delta \cdot P$$

$$Q^e = \frac{\begin{vmatrix} -a & -\beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\beta \\ 1 & \delta \end{vmatrix}} = \frac{-\alpha\delta+\beta\gamma}{\delta+\beta}$$

$$P^e = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a \\ 1 & \gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\beta \\ 1 & \delta \end{vmatrix}} = \frac{\gamma+\alpha}{\delta+\beta}$$

Διαγραμματικά

Σημείο Ισορροπίας
A (Qe, Pe)



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ –ΑΣΚΗΣΗ

Ένας παραγωγός πετρελαίου προτίθεται να προσφέρει στην αγορά ποσότητα Q^s σύμφωνα με την παρακάτω συνάρτηση $Q^s = -72 + 34P$.

Έχει επίσης εκτιμηθεί ότι η συνάρτηση ζήτησης στην αγορά είναι

$Q^d = 400 - 2P$, όπου Q^d είναι η ζητούμενη ποσότητα σε επίπεδο τιμών P.

Ζητείται:

α) Η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας στην αγορά,

β) Εάν η συνάρτηση προσφοράς αλλάξει και γίνει $Q^s = -90 + 15P$, ποια θα είναι η νέα τιμή ισορροπίας;

ΛΥΣΗ

α) Η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας στην αγορά

Για τον υπολογισμό της τιμής ισορροπίας πρέπει

$Q^s = Q^d$ → $-72 + 34P = 400 - 2P$ → $36P = 472$

→ $P = 13{,}11$ (τιμή ισορροπίας)

Οπότε,

$Q^s = -72 + (34 * 13{,}11)$ → $Q^s = 373{,}77$

$Q^d = 400 - (2 * 13{,}11) = 400 - 26{,}22$ → $Q^d = 373{,}77$

Άρα, η ποσότητα ισορροπίας είναι $Q = 373{,}77$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

β) Εάν η συνάρτηση προσφοράς αλλάξει και γίνει $Q^s = -90 + 15P$, ποια θα είναι η νέα τιμή ισορροπίας;

Με την αλλαγή της συνάρτησης προσφοράς, θα έχω νέο σημείο ισορροπίας:

$$Q^s = Q^d$$

Όπου $Q^s = -90 + 15P$ και $Q^d = 400 - 2P$

$Q^s = Q^d \rightarrow -90 + 15P = 400 - 2P \rightarrow 17P = 490$

$\rightarrow$ $P = 28,82$ (νέα τιμή ισορροπίας).

Οπότε $Q^s = -90 + (15 * 28,82) \rightarrow Q^s = 342,35$

$Q^d = 400 - 2 \cdot 28,82 \rightarrow Q^d = 342,35$

Συνεπώς, η νέα ποσότητα ισορροπίας είναι $Q^d = 342,35$

…με φορολογία

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Η τιμή του αγαθού μετά τη φορολογία γίνεται $P = P - t$

Άρα, οι συναρτήσεις της προσφοράς και της ζήτησης γίνονται:

$$Q^s = -\alpha + \beta(P - t) \rightarrow Q^s - \beta P = -\alpha - \beta t$$

$$Q^d = \gamma - \delta P \rightarrow Q^d + \delta P = \gamma$$

Για $Q^s = Q^d = Q^e$

$$\left.\begin{aligned} Q^e - \beta P &= -\alpha - \beta t \\ Q^e + \delta P &= \gamma \end{aligned}\right\} \text{κανόνας Gramer}$$

$$Q^e = \frac{\begin{vmatrix} -a-\beta t & -\beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\beta \\ 1 & \delta \end{vmatrix}} = \frac{-\alpha\delta - t\beta\delta + \beta\gamma}{\delta + \beta}$$

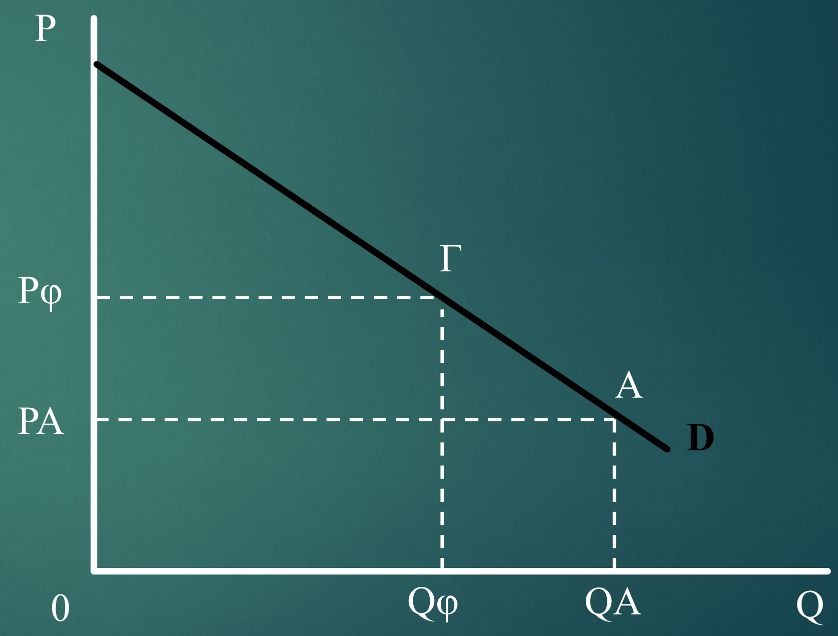
$$P^e = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a-\beta t \\ 1 & \gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\beta \\ 1 & \delta \end{vmatrix}} = \frac{\gamma + \alpha + tb}{\delta + \beta}$$

…με φορολογία

Διαγραμματικά

Πριν τη φορολογία
Σημείο Α (QA,PA)

Μετά τη φορολογία
Σημείο Γ (Qφ,Pφ)



ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Μακροοικονομικό υπόδειγμα ισορροπίας οικονομίας με δύο τομείς

Έστω ότι έχω δύο τομείς → Αγορά Προϊόντος, Αγορά Χρήματος

Συνολική κατανάλωση	$C = \alpha+\beta Y$	$(\alpha > 0, 0 < \beta < 1)$
Σύνολο ιδιωτικής επένδυσης	$I = \gamma+\delta r$	$(\gamma > 0, \delta < 0)$
Θ.Ι. της αγοράς προϊόντος	$Y=C+I$	

r: επιτόκιο
Y: εισόδημα οικονομίας

Ζήτηση χρήματος	$M_D = \lambda Y+\sigma+\mu r$	$(\lambda, \sigma > 0, \mu < 0)$
Προσφορά χρήματος	$Ms = M_0$	
Θ.Ι. της αγοράς χρήματος	$M_D= M_S$	

Μακροοικονομικό υπόδειγμα ισορροπίας οικονομίας με δύο τομείς

Συνθήκη ισορροπίας στην αγορά προϊόντος

$Y = C+I$

$C = \alpha+\beta Y$
$I = \gamma+\delta r$

→ $Y = \alpha+\beta Y+\gamma+\delta r$

→ $\mathbf{Y-\beta Y = \alpha+\gamma+\delta r}$

Συνθήκη ισορροπίας στην αγορά χρήματος

$M_D = M_s$

$M_D = \lambda Y+\sigma+\mu r$
$Ms = M_0$

→ $M_0 = \lambda Y+\sigma+\mu r$

→ $\mu r = M_0-\lambda Y-\sigma$

Μακροοικονομικό υπόδειγμα ισορροπίας οικονομίας με δύο τομείς

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{Y-\beta Y = \alpha+\gamma+\delta r} \\ &\mu r = M_0-\lambda Y-\sigma \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &Y-\beta Y-\delta r = \alpha+\gamma \\ &\mu r = M_0-\lambda Y-\sigma \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &(1-\beta)Y - \delta r = \alpha+\gamma \\ &\lambda Y + \mu r = M_0-\sigma \end{aligned}\right\}$$

κανόνας Gramer

$$Y=\frac{\begin{vmatrix} \alpha+\gamma & -\delta \\ M0-\sigma & \mu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-\beta & -\delta \\ \lambda & \mu \end{vmatrix}}=\frac{(\alpha+\gamma)\mu-(-\delta)(M0-\sigma)}{\mu(1-\beta)-(-\delta)\lambda}$$

$$r=\frac{\begin{vmatrix} 1-\beta & \alpha+\gamma \\ \lambda & M0-\sigma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-\beta & -\delta \\ \lambda & \mu \end{vmatrix}}=\frac{(1-\beta)(M0-\sigma)-\lambda(\alpha+\gamma)}{\mu(1-\beta)-(-\delta)\lambda}$$

Μακροοικονομικό υπόδειγμα ισορροπίας οικονομίας με δύο τομείς

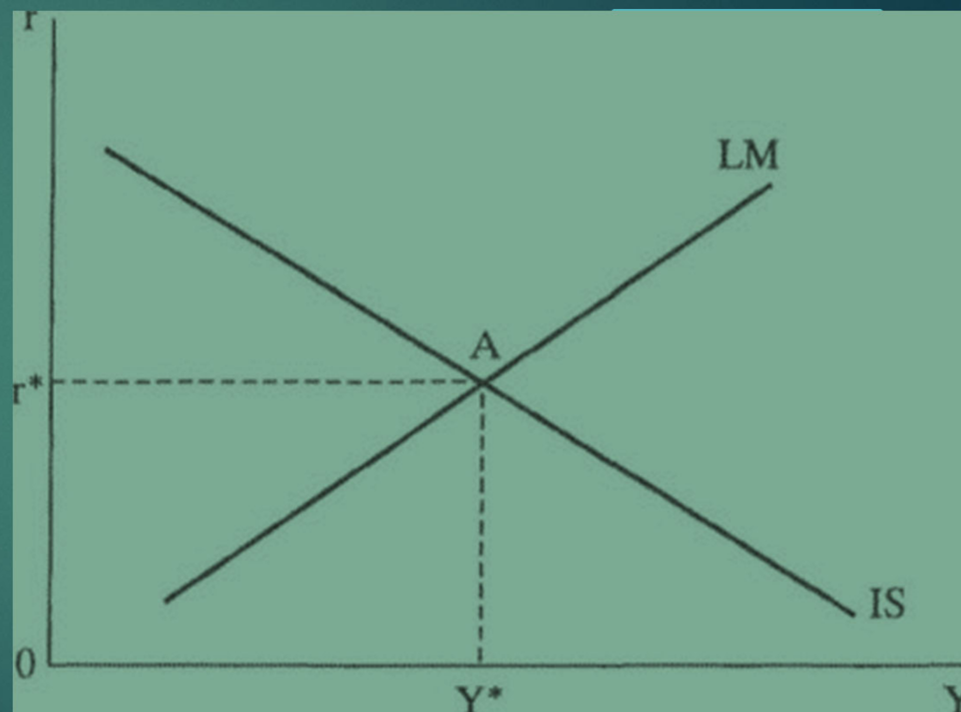
Διαγραμματικά

Συνθήκη ισορροπίας αγοράς προϊόντος

$Y\text{-}\beta Y = \alpha+\gamma+\delta r \qquad (IS)$

Συνθήκη ισορροπίας αγοράς χρήματος

$\mu r = M_0\text{-}\lambda Y\text{-}\sigma \qquad (LM)$



Μακροοικονομικό υπόδειγμα ισορροπίας οικονομίας με δύο τομείς… με συναλλαγές με το εξωτερικό

Συνθήκη ισορροπίας στην αγορά προϊόντος

$Y = C+I+X-M$

$C = \alpha+\beta Y$
$I = \gamma+\delta r$
$M = A+mY$

$X = Xo$ εξαγωγές

$M = A+mY$ εισαγωγές

$\rightarrow \quad Y = \alpha+\beta Y+\gamma+\delta r+Xo-A-mY$

$\rightarrow \quad Y-\beta Y+mY-\delta r = \alpha+\gamma+Xo-A$

$\rightarrow \quad (1-\beta+m)Y-\delta r = \boldsymbol{\alpha+\gamma}+Xo\boldsymbol{-A}$

Συνθήκη ισορροπίας στην αγορά χρήματος (όπως πριν)

$\mu r = M_0-\lambda Y-\sigma$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Μακροοικονομικό υπόδειγμα ισορροπίας οικονομίας με δύο τομείς… με συναλλαγές με το εξωτερικό

$$\left.\begin{aligned}(1-\beta+m)Y-\delta r &= \boldsymbol{\alpha}+\gamma+Xo-\mathbf{A}\\ \mu r &= M_0-\lambda Y-\sigma\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}(1-\beta+m)Y-\delta r &= \boldsymbol{\alpha}+\gamma+Xo-\mathbf{A}\\ \lambda Y+\mu r &= M_0-\sigma\end{aligned}\right\}$$

κανόνας Gramer

$$Y=\frac{\begin{vmatrix}\alpha+\gamma+X0-A & -\delta\\ M0-\sigma & \mu\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1-\beta+m & -\delta\\ \lambda & \mu\end{vmatrix}}=\frac{(\alpha+\gamma+X_0-A)\mu-(-\delta)(M_0-\sigma)}{\mu(1-\beta+m)-(-\delta)\lambda}$$

$$r=\frac{\begin{vmatrix}1-\beta+m & \alpha+\gamma+X0-A\\ \lambda & M0-\sigma\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1-\beta+m & -\delta\\ \lambda & \mu\end{vmatrix}}=\frac{(1-\beta+m)(M_0-\sigma)-\lambda(\alpha+\gamma+X_0-A)}{\mu(1-\beta)-(-\delta)\lambda}$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

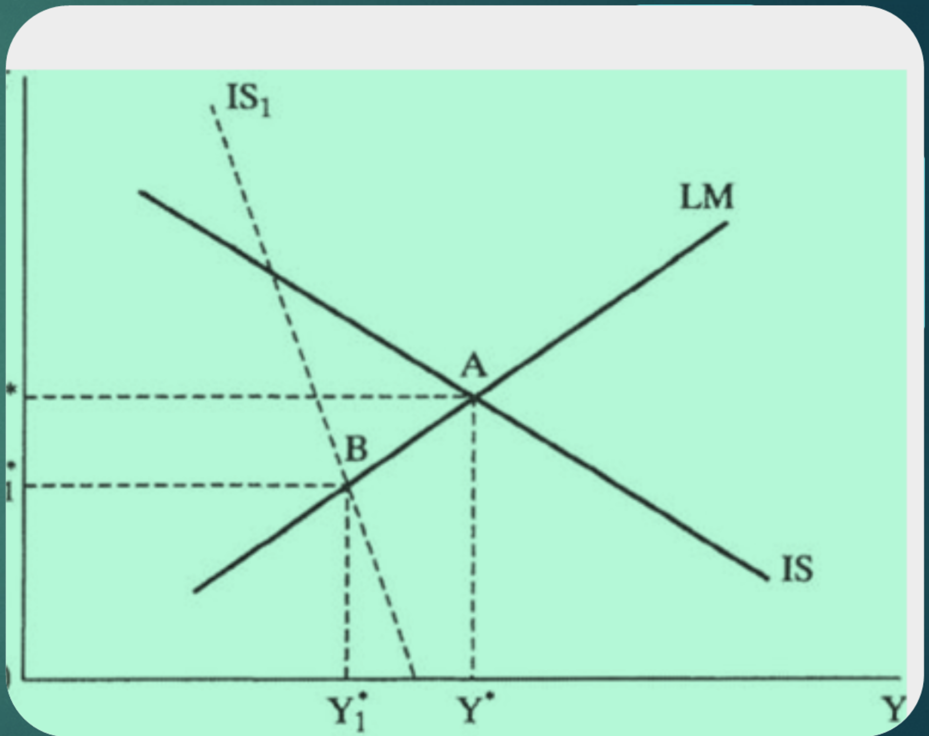
Μακροοικονομικό υπόδειγμα ισορροπίας οικονομίας με δύο τομείς… με συναλλαγές με το εξωτερικό

Διαγραμματικά

Συνθήκη ισορροπίας αγοράς προϊόντος
Y-βY = α+γ+δr (IS)
Y-βY+mY-δr = α+γ+Xo-A (IS1)*

Συνθήκη ισορροπίας αγοράς χρήματος
$\mu r = M_0 - \lambda Y - \sigma$ (LM)

*συναλλαγές με το εξωτερικό



Πρότυπο αγοράς δύο προϊόντων Χ και Ψ

$$\left.\begin{array}{l} Q_{dx} = \alpha+\beta P_x+\gamma P_\psi \\ Q_{d\psi} = \delta+\varepsilon P_x+\zeta P_\psi \end{array}\right\}$$ Συναρτήσεις ζήτησης των δύο προϊόντων

$$\left.\begin{array}{l} Q_{s\chi} = \eta+\theta P_\chi+\iota P_\psi \\ Q_{s\psi} = \kappa+\lambda P_\chi+\mu P_\psi \end{array}\right\}$$ Συναρτήσεις προσφοράς των δύο προϊόντων

$$\left.\begin{array}{l} Q_{dx} = Qs_x \\ Q_{d\psi} = Q_{s\psi} \end{array}\right\}$$ Συνθήκες Ισορροπίας με δύο προϊόντα. Ρχ και Ρψ είναι οι τιμές των δύο αγαθών και τα α – μ

Πρότυπο αγοράς δύο προϊόντων Χ και Ψ

Για να βρούμε την τιμή P και την ποσότητα Q ισορροπίας για δύο αγαθά, θα πρέπει να λυθεί το σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

$$Q_{dx} = \alpha+\beta P_x+\gamma P_\psi$$

$$Q_{d\psi} = \delta+\varepsilon P_x+\zeta P_\psi$$

$$Q_{s\chi} = \eta+\theta P_\chi+\iota P_\psi$$

$$Q_{s\psi}= \kappa+\lambda P_\chi+\mu P_\psi$$

$$Q_{dx} = Qs_x$$

$$Q_{d\psi}= Q_{s\psi}$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Πρότυπο αγοράς δύο προϊόντων X και Ψ

$$\begin{Vmatrix} Qdx \\ Qd\psi \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha \\ \delta \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \beta & \gamma \\ \varepsilon & \zeta \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} Px \\ P\psi \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} Qsx \\ Qs\psi \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \eta \\ \kappa \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \theta & \iota \\ \lambda & \mu \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} Px \\ P\psi \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} Qdx \\ Qd\psi \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Qsx \\ Qs\psi \end{Vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Vmatrix} \alpha \\ \delta \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \beta & \gamma \\ \varepsilon & \zeta \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} Px \\ P\psi \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \eta \\ \kappa \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \theta & \iota \\ \lambda & \mu \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} Px \\ P\psi \end{Vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Vmatrix} \beta & \gamma \\ \varepsilon & \zeta \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} Px \\ P\psi \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} \theta & \iota \\ \lambda & \mu \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} Px \\ P\psi \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \eta \\ \kappa \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} \alpha \\ \delta \end{Vmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{Vmatrix} \beta & \gamma \\ \varepsilon & \zeta \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} \theta & \iota \\ \lambda & \mu \end{Vmatrix} \right\} \begin{Vmatrix} Px \\ P\psi \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \eta - \alpha \\ \kappa - \delta \end{Vmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{Vmatrix} \beta - \theta & \gamma - \iota \\ \varepsilon - \lambda & \zeta - \mu \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} Px \\ P\psi \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \eta - \alpha \\ \kappa - \delta \end{Vmatrix}}$$

$(A \circ P = B)$

Πρότυπο αγοράς δύο προϊόντων Χ και Ψ

κανόνας Gramer

$$P_\chi = \frac{\begin{vmatrix} \eta-\alpha & \gamma-\iota \\ \kappa-\delta & \zeta-\mu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta-\theta & \gamma-\iota \\ \varepsilon-\lambda & \zeta-\mu \end{vmatrix}} = \frac{(\eta-\alpha)(\zeta-\mu)-(\gamma-\iota)(\kappa-\delta)}{(\beta-\theta)(\zeta-\mu)-(\gamma-\iota)(\varepsilon-\lambda)}$$

$$P_\psi = \frac{\begin{vmatrix} \beta-\theta & \eta-\alpha \\ \varepsilon-\lambda & \kappa-\delta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta-\theta & \gamma-\iota \\ \varepsilon-\lambda & \zeta-\mu \end{vmatrix}} = \frac{(\beta-\theta)(\kappa-\delta)-(\eta-\alpha)(\varepsilon-\lambda)}{(\beta-\theta)(\zeta-\mu)-(\gamma-\iota)(\varepsilon-\lambda)}$$

Αντικαθιστώντας στις

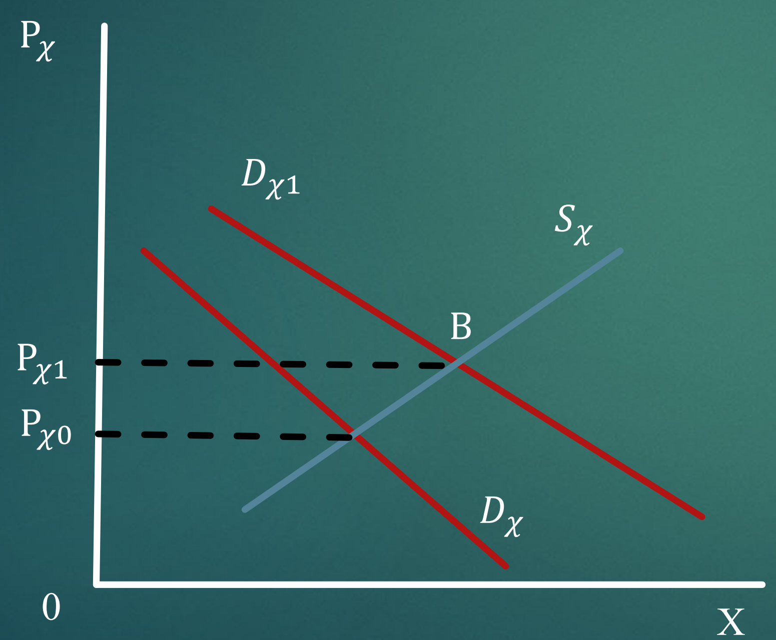
$$Q_{dx} = \alpha+\beta P_x+\gamma P_\psi$$
$$Q_{s\chi} = \eta+\theta P_\chi+\iota P_\psi$$

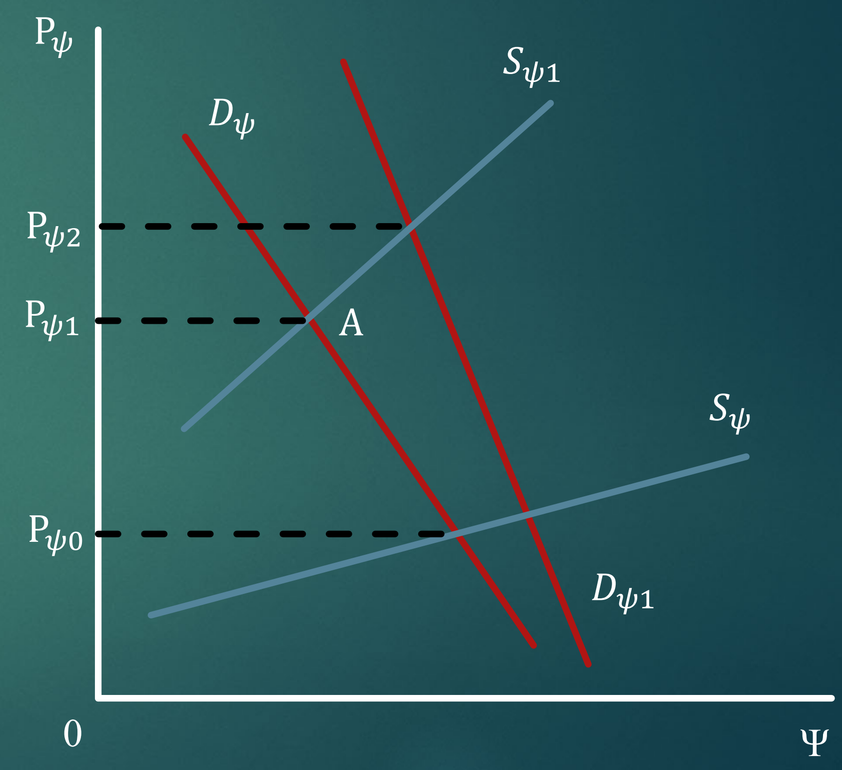
βρίσκουμε και τις ποσότητες ισορροπίας.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Πρότυπο αγοράς δύο προϊόντων Χ και Ψ

Διαγραμματικά





Πρότυπο αγοράς δύο προϊόντων Χ και Ψ

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω οι συναρτήσεις ζήτησης/προσφοράς για τα αλληλοεξαρτώμενα προϊόντα f και z:

$$Q_{df} = 8 - 2P_f + P_z \qquad Q_{sf} = -5 + 3P_f$$
$$Q_{dz} = 16 + P_f - P_z \qquad Q_{sz} = -1 + 2P_Z$$

Να εκτιμηθούν οι τιμές και οι ποσότητες ισορροπίας του προτύπου αγοράς για τα προϊόντα (f) και (z).

Πρότυπο αγοράς δύο προϊόντων Χ και Ψ

ΛΥΣΗ

Για να υπάρχει ισορροπία, πρέπει:

$$Q_{df} = Q_{sf}$$
$$Q_{dz} = Q_{sz}$$

$$\left.\begin{array}{l} Q_{df} = Q_{sf} \rightarrow 8 - 2P_f + P_z = -5 + 3P_f \rightarrow 5P_f - P_z = 13 \\ Q_{dz} = Q_{sz} \rightarrow 16 + P_f - P_z = -1 + 2P_z \rightarrow -P_f + 3P_z = 17 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{κανόνας Gramer}}$$

$$P_f = \frac{\begin{vmatrix} 13 & -1 \\ 17 & +3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & +3 \end{vmatrix}} = \frac{(13*3)-(-1*17)}{(5*3)-((-1*(-1))} = \frac{56}{14}$$

$\rightarrow P_f = 4$

$$P_z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & +13 \\ -1 & +17 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & +3 \end{vmatrix}} = \frac{(5*17)-(13*(-1))}{(5*3)-((-1*(-1))} = \frac{98}{14}$$

$\rightarrow P_z = 7$

Πρότυπο αγοράς δύο προϊόντων Χ και Ψ

ΛΥΣΗ

→ $P_f = 4$

→ $P_z = 7$

Οπότε οι ποσότητες ισορροπίας:

$Q_{df} = 8 - 2P_f + P_z = 8 – 2*4 + 7$ → $Q_{df} = 7$

$Q_{dz} = 16 + P_f - P_z = 16 + 4 – 7$ → $Q_{dz} = 13$

ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται το πιο κάτω υπόδειγμα ισορροπίας στην αγορά ενός προϊόντος:

$$Q^s = -2 + 2P$$

$$Q^d = 10 - P$$

Ζητούνται:

α) Η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας.

β) Ο αντίκτυπος της επιβολής φόρου 2 ευρώ ανά μονάδα προσφερόμενης ποσότητας, το συνολικό ποσό του φόρου και η πραγματική τιμή για τους πωλητές.

γ) Ο αντίκτυπος στο σημείο ισορροπίας μετά από μια επιδότηση του κράτους κάθε προσφερόμενης ποσότητας με 3 ευρώ.

ΛΥΣΗ

α) Η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας.

$Q^s = -2 + 2P$
$Q^d = 10 - P$

$$Q^s = Q^d$$
$$\rightarrow -2 + 2P = 10 - P$$
$$\rightarrow -12 = -3P$$
$$\rightarrow P_e = 4 \quad \text{(τιμή ισορροπίας)}$$

$Q^s = -2 + 2P$
$Q^d = 10 - P$

P=4

$Q^s = -2 + 2*4 = -2+8 = 6$
$Q^d = 10 – P = 10 – 4 = 6$

Άρα, Qe = 6 (ποσότητα ισσοροπίας)

ΛΥΣΗ

β) Ο αντίκτυπος της επιβολής φόρου 2 ευρώ ανά μονάδα προσφερόμενης ποσότητας, το συνολικό ποσό του φόρου και η πραγματική τιμή για τους πωλητές.

Η νέα συνάρτηση προσφοράς είναι $Q_t^s = -2 + 2(P-t) = -2 + 2(P-2)$

$\rightarrow Q_t^s = -2+2P-4$

$\rightarrow Q_t^s = -6+2P$

Βρίσκω τα Qe’ και Pe’ $\quad Q_t^s = Q^d \rightarrow -6 + 2P = 10 - P$

$\rightarrow -16 = -3P$

$\rightarrow Pe' = \frac{16}{3} = 5{,}33$ (νέα τιμή ισορροπίας)

$Q_t^s = -6 + 2P$

$Q^d = 10 - P$

P=5,33

$Q_t^s = -6 + 2*5{,}33 = -6+10{,}66=4{,}67$

$Q^d = 10 – P = 10 – 5{,}33 = 4{,}67$

Άρα, Qe’ = 4,67 (νέα ποσότητα ισσοροπίας)

ΛΥΣΗ

β) Ο αντίκτυπος της επιβολής φόρου 2 ευρώ ανά μονάδα προσφερόμενης ποσότητας, το συνολικό ποσό του φόρου και η πραγματική τιμή για τους πωλητές.

Ο αντίκτυπος της επιβολής φόρου 2 ευρώ ανά μονάδα προσφερόμενης ποσότητας είναι:

$$\uparrow Pe \quad \rightarrow \quad \downarrow Qe$$

Το συνολικό ποσό φόρου είναι T = tQ = 2*4,67 = 9,34

Η πραγματική τιμή για τους πωλητές είναι:

$$P - t = P_t = 5{,}33 – 2 = 3{,}33 \text{ ευρώ.}$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Μη Γραμμικές Συναρτήσεις

Έστω η γραμμική συνάρτηση ζήτησης: $Qd = \frac{1}{a}(k\text{-}P)$, με κ,α > 0

$$\rightarrow P = k - a \cdot Q$$

Η συνάρτηση των συνολικών εσόδων (TR): $TR = P \cdot Q$

$$\rightarrow TR = (k - a \cdot Q) \cdot Q$$

$$\rightarrow \boxed{TR = kQ - aQ^2}$$

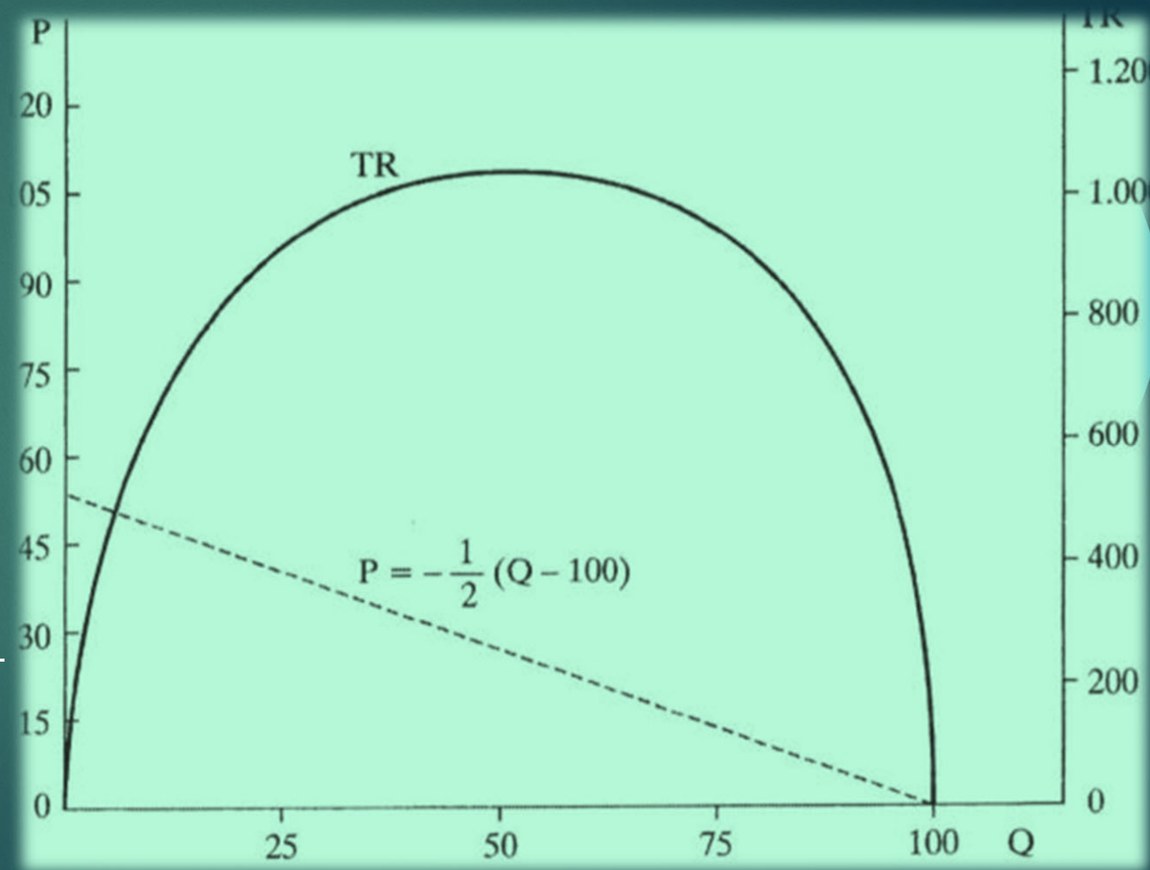
…εξίσωση δευτέρου βαθμού της οποίας η γραφική παράσταση είναι μη-γραμμική.

Μη Γραμμικές Συναρτήσεις

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Γραφική παράσταση:

Για k = 50 και α = ½ ,
→ P = - 0,5(Q -100)



Έστω η συνάρτηση του συνολικού κόστους (TC):

$$TC = F + bQ$$

όπου:

F: Το πάγιο κεφάλαιο.

b: Το μεταβλητό κεφάλαιο ανά μονάδα προϊόντος.

Τότε τα κέρδη (Π) της επιχείρησης θα είναι:

$$\Pi = TR - TC$$

$TR = kQ - aQ^2$ → $\Pi = TR\text{-}TC = kQ - aQ^2 - F - bQ$

$$\rightarrow \boxed{\Pi = -aQ^2 + (k-b)Q - F}$$

Μη Γραμμικές Συναρτήσεις

Επίλυση 2-βαθμιας εξίσωσης

Έστω η συνάρτηση κέρδους όπως υπολογίστηκε: **$\Pi = -aQ^2 + (k - b)Q - F$**

Θέτω Π=0 → **$-aQ^2 + (k - b)Q - F = 0$ (τριώνυμο)**

$$Q = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}}{2a}$$

όπου: α = -α , β = k – b, γ = -F

$$\boxed{Q_{1,2} = \frac{-(k-b) \pm \sqrt{[(k-b)^2 - 4(-a)(-F)]}}{2(-a)}}$$

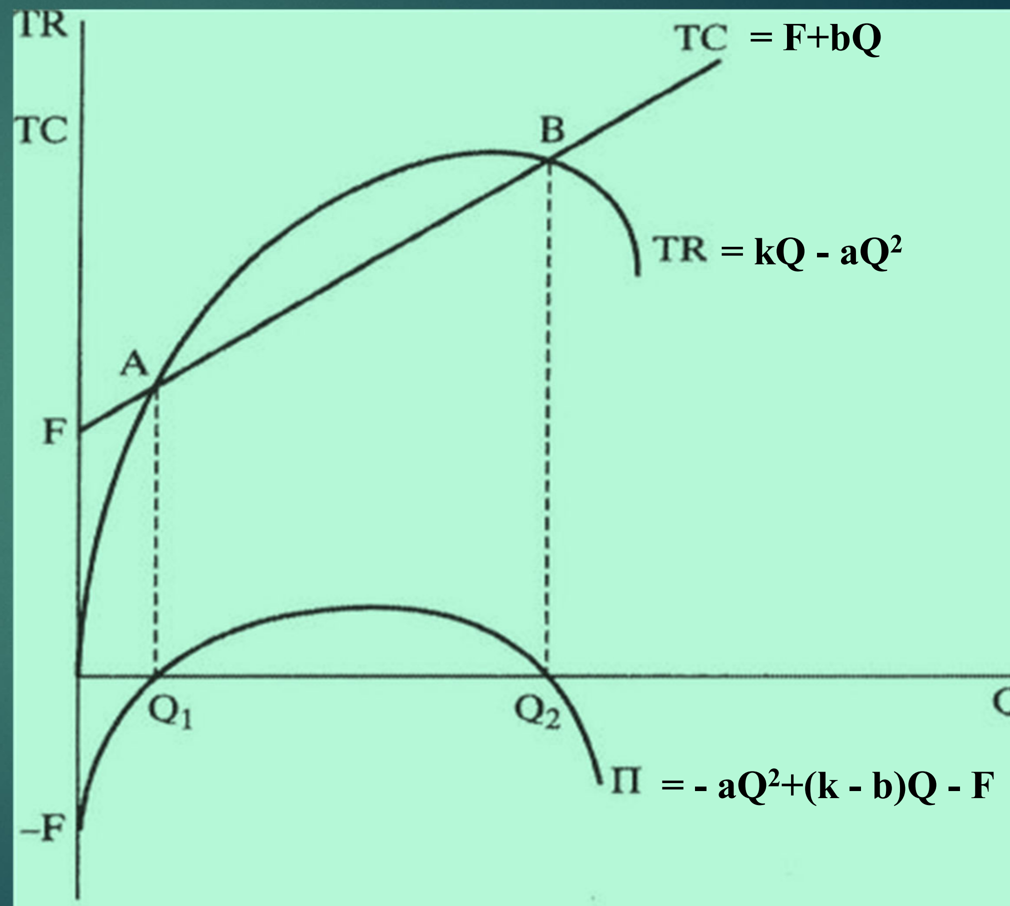
- Αν $\beta^2 - 4a\gamma > 0$ → 2 πραγματικές ρίζες
- Αν $\beta^2 - 4a\gamma = 0$ → 1 διπλή πραγματική ρίζα
- Αν $\beta^2 - 4a\gamma < 0$ → 2 μιγαδικές ρίζες

Μη Γραμμικές Συναρτήσεις

Διαγραμματικά

$$TR = kQ - aQ^2$$
$$TC = F + bQ$$
$$\Pi = -aQ^2 + (k - b)Q - F$$

Q_1 και Q_2:
λύσεις/ρίζες της συνάρτησης Π(Q)



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω η συνάρτηση προσφοράς: $P_s = Q^2+4Q+1$

και η αγοραία συνάρτηση ζήτησης είναι: $P_d = - Q^2 -Q+4$

όπου:

P: Η τιμή αγοράς

Q: Η ποσότητα

Η συνθήκη ισορροπίας απαιτεί : $P_d=P_s$ $\rightarrow$ $- Q^2 -Q+4 = Q^2+4Q+1$
$\rightarrow$ $2Q^2 +5Q – 3 = 0$

$$Q = \frac{-(5) \pm \sqrt{5^2 - 4(2)(-3)}}{2\cdot 2} = \frac{-(5) \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-(5) \pm 7}{4}$$

$$\boldsymbol{Q1= \frac{-(5)+7}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5}$$

$$Q2= \frac{-(5)-7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

(απορρίπτεται)

Άρα, $P = (- 0{,}5)^2 -0{,}5+4 = 3{,}25$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΟΜΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ομογραφικές Συναρτήσεις

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Ομογραφικές είναι οι συναρτήσεις όπως: $Y=\frac{1}{X}$ με Π.Ο. το $R \neq 0$

Το X=0 ονομάζεται ΠΟΛΟΣ της συνάρτησης (μηδενίζει τον παρανομαστή).

Παράδειγμα ομογραφικής συνάρτησης είναι η συνάρτηση του μέσου κόστους AC:

$$AC = \frac{TC}{Q}$$

όπου:

AC: Το μέσο κόστος παραγωγής
TC: Το συνολικό κόστος
Q: Η συνολική παραγωγή.

Δηλαδή, $TC = AC \cdot Q$

Ομογραφικές Συναρτήσεις

Έστω η συνάρτηση του συνολικού κόστους (TC): $TC = F+bQ$

Οπότε, $AC = \frac{F+(bQ)}{Q} = \frac{F}{Q} + b$ → $AC = F \cdot Q^{-1} + b$

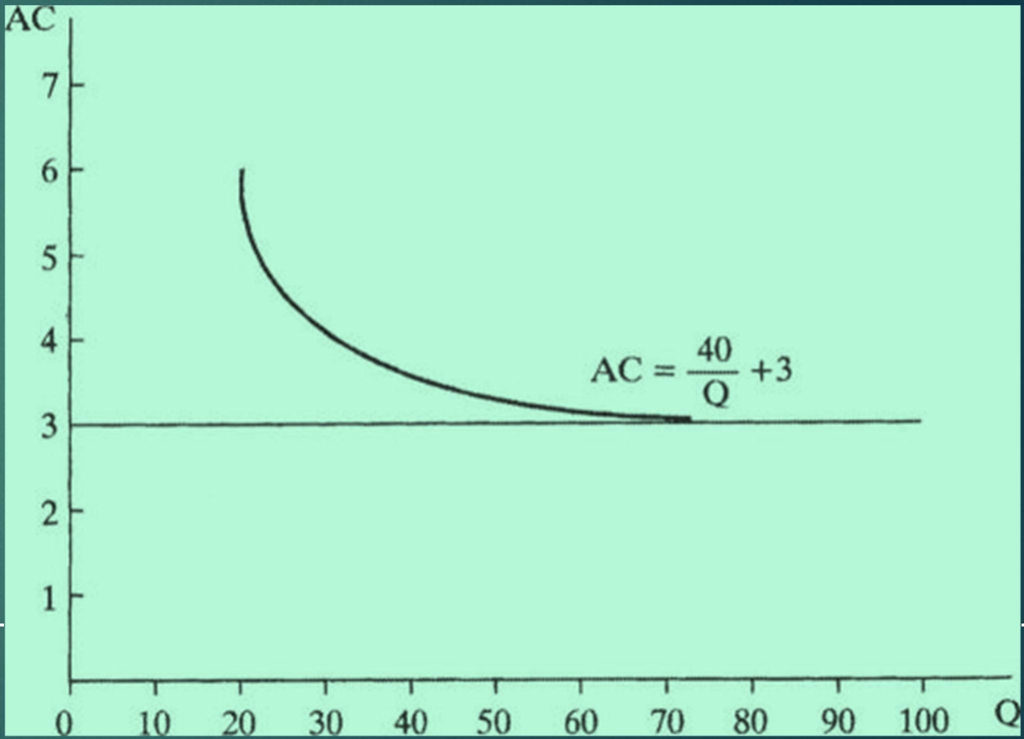
Αν F = 40 και b = 3, τότε $\boxed{AC = 40 \cdot Q^{-1} + 3}$

Ομογραφικές Συναρτήσεις

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Διαγραμματικά

Q	40/Q	3	AC = 40/Q +3
0	∞	3	∞
1	40	3	43
5	8	3	11
10	4	3	7
20	2	3	5
40	1	3	4
80	0,5	3	3,5
160	0,25	3	3,25



Όταν Q = 0, το AC δεν ορίζεται και όταν AC = 3, το Q δεν ορίζεται

ΑΣΚΗΣΗ

Μια εταιρία ηλεκτρονικών αντιμετωπίζει την παρακάτω συνάρτηση ζήτησης:

$$P + Q_d^2 + 5Q_d - 18 = 0$$

όπου:

P: τιμή ανά μονάδα προϊόντος

Qd: Η ζητούμενη ποσότητα.

Έχει, επίσης, εκτιμηθεί ότι η συνάρτηση προσφοράς είναι:

$$2P - 5Q_s^2 + 12Q_S = 12$$

όπου:

Qs: Η προσφερόμενη ποσότητα.

Ζητείται:

Να εκτιμηθούν η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας στην αγορά.

ΛΥΣΗ

Λύνω τη συνάρτηση ζήτησης ως προς P:

$$P + Q_d^2 + 5Q_d - 18 = 0 \rightarrow P_d = -Q_d^2 - 5Q_d + 18$$

Όμοια για τη συνάρτηση προσφοράς:

$$2P - 5\,Q_s^2 + 12Q_S = 12 \quad (:2) \rightarrow \frac{2P}{2} - \frac{5}{2}Q_s^2 + \frac{12}{2}Q_s = \frac{12}{2} \rightarrow P_S = 2{,}5\,Q_s^2 - 6Q_S + 6$$

Η αγορά βρίσκεται σε ισορροπία όταν $Q_d = Q_s$ (= Q) ή ισοδύναμα όταν $P_d = P_s$ (=P):

$$P_d = P_s$$

$$\rightarrow -Q^2 - 5Q + 18 = 2{,}5Q^2 - 6Q + 6 \rightarrow \boxed{3{,}5Q^2 - Q - 12 = 0}$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

$$3{,}5Q^2 - Q - 12 = 0$$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - [4 \cdot 3{,}5 \cdot (-12)] = 169 > 0 \rightarrow$ 2 πραγματικές ρίζες

$$Q_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 * 3{,}5 * (-12)}}{2 \cdot 3{,}5} = 1 \pm \frac{13}{7}$$

$$Q_1 = 1 + \frac{13}{7} = \frac{20}{7} = 2{,}8$$

$$Q_2 = 1 - \frac{13}{7} = -\frac{6}{7}$$

(απορρίπτεται)

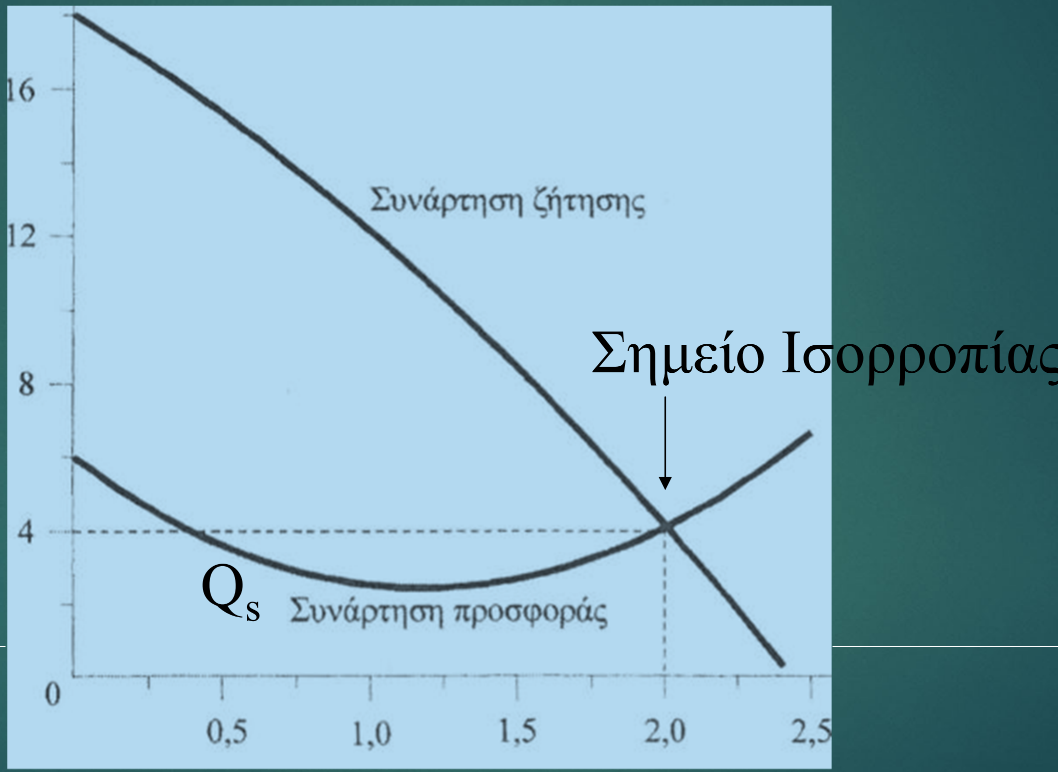
Άρα, η ποσότητα ισορροπίας είναι $Q = 2{,}8$

Από την $Pd = -Q_d^2 - 5Q_d + 18 \rightarrow (-2{,}8)^2 - (5 \cdot 2{,}8) + 18 \rightarrow$ $P = 11{,}84$ (τιμή ισορροπίας)

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES
SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ



ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ