



ΠΑΝΤΕΙΟΝ  
ΠΑΝΤΕΙΟΝ

SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION  
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES

# ΠΟΣΟΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Γιώργος Λούντζης (PhD, MSc, MEng)

Εντεταλμένος Διδάσκων (ΕΣΠΑ)  
2024 – 2025

**ΕΝΟΤΗΤΑ 7**

# ΕΝΟΤΗΤΑ 7

1. ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΥΠΟ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ

2. ΜΕΘΟΔΟΣ LAGRANGE

3. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Έστω η πολυμεταβλητή συνάρτηση  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$   
υπό τον περιορισμό  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = b$  ( $M = P_1 X_1 + P_2 X_2$ ).

Στη μέθοδο Lagrange εισάγουμε μία νέα μεταβλητή τη  $\lambda$  (πολλαπλασιαστής Lagrange) και κατασκευάζουμε την Λαγκρατζιανή συνάρτηση:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda[b - g(x_1, x_2)]$$

Συνθήκες για τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο:

$$1. \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0$$

$$2. \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0$$

$$3. \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = b - g(x_1, x_2) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{εγγυάται αυτόματα ότι ο περιορισμός ικανοποιείται.}$$

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Διαιρούμε τις εξισώσεις (1) και (2) για τον περιορισμό του  $\lambda$ :

Από την (3):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f / \partial x_1}{\partial f / \partial x_2} &= \frac{\partial g / \partial x_1}{\partial g / \partial x_2} \\ b &= g(x_1, x_2) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Μπορώ να βρω} \\ \text{τα } x_1^*, x_2^*. \end{array}$$

Για τον υπολογισμό του  $\lambda^*$  λύνω ως προς  $\lambda$  την (1):  $\lambda = \frac{\partial f / \partial x_1}{\partial g / \partial x_2}$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Έστω, η συνάρτηση η  $f = x^{1/2}y^{1/2}$  υπό τον περιορισμό  $\alpha x + cy = b \rightarrow b - \alpha x - cy = 0$

Η λαγκρατζιανή συνάρτηση είναι  $L = x^{1/2}y^{1/2} + \lambda[b - \alpha x - cy]$

Συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\left. \begin{array}{l} \text{i. } L_x = \frac{1}{2} x^{-1/2} y^{1/2} - \lambda \alpha = 0 \\ \text{ii. } L_y = \frac{1}{2} y^{-1/2} x^{1/2} - \lambda c = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\div) \\ \frac{y}{x} = \frac{\alpha}{c} \end{array} \rightarrow y = \frac{\alpha x}{c} \left\{ \begin{array}{l} b - \alpha x - c \frac{\alpha x}{c} = 0 \end{array} \right. \rightarrow x^* = \frac{b}{2\alpha}$$

$$\text{iii. } L_\lambda = b - \alpha x - cy = 0$$

$$\text{Μέσω της (iii)} \rightarrow b - \alpha \frac{b}{2\alpha} - cy = 0 \rightarrow y^* = \frac{b}{2c}$$

Για να βρούμε το  $\lambda$ , μέσα από την (i) και αντικαθιστώ τις τιμές για τα  $x^*$  και  $y^*$

$$\lambda^* = \frac{1}{2\alpha} x^{*-1/2} y^{*1/2} = \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{b}{2\alpha}\right)^{-1/2} \left(\frac{b}{2c}\right)^{1/2} = \frac{1}{2\alpha^{1/2} c^{1/2}}$$

# ΕΝΟΤΗΤΑ 7

## Ερμηνεία πολλαπλασιαστή Lagrange

$$L^* = f(x_1^*, x_2^*) + \lambda^* [b - g(x_1^*, x_2^*)]$$

Διαφορίζοντας ως προς  $b$  βρίσκουμε:

$$\frac{dL^*}{db} = f_{x_1} dx_1^*/db + f_{x_2} dx_2^*/db + [b - g(x_1^*, x_2^*)] d\lambda^*/db + \lambda^* (1 - g_{x_1} dx_1^*/db - g_{x_2} dx_2^*/db)$$

ή

$$\frac{dL^*}{db} = (f_{x_1} - \lambda^* g_{x_1}) dx_1^*/db + (f_{x_2} - \lambda^* g_{x_2}) dx_2^*/db + [b - g(x_1^*, x_2^*)] d\lambda^*/db + \lambda^*$$

Τώρα στο βέλτιστο έχουμε

$$f_{x_1} - \lambda^* g_{x_1} = 0,$$

$$f_{x_2} - \lambda^* g_{x_2} = 0, \text{ και}$$

$$b - g(x_1^*, x_2^*) = 0.$$

Γι' αυτό παίρνουμε

$$\frac{dL^*}{db} = \lambda^*$$

$f_{x_1}$ ,  $f_{x_2}$ ,  $g_{x_1}$  και  $g_{x_2}$   
είναι εκτιμώμενες στο  
βέλτιστο

*Δηλαδή, ο πολλαπλασιαστής Lagrange μας λέει την επίδραση μίας αλλαγής στον περιορισμό μέσω της παραμέτρου  $b$  στη βέλτιστη τιμή της συνάρτησης στόχου  $f$ .*

## Συνθήκες δεύτερης τάξης για περιορισμένη βελτιστοποίηση

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Υποθέτουμε ότι έχουμε μία συνάρτηση  $n$  μεταβλητών  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  και έναν περιορισμό  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = b$ . Κατασκευάζοντας έναν φραγμένο Εσσιανό πίνακα (Bordered Hessian) από τη συνάρτηση Lagrange όπου τα συνοριακά στοιχεία είναι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης του περιορισμού  $g$  και τα υπόλοιπα στοιχεία είναι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της Lagrangean συνάρτησης  $L$ .

$$|H^B| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_n \\ g_1 & L_{11} & L_{1n} \\ g_2 & L_{21} & L_{2n} \\ g_n & L_{n1} & L_{nn} \end{vmatrix}$$

*Εκτιμημένες μερικές  
παράγωγοι στις κριτικές  
τιμές  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \lambda^*)$*

Επαρκείς συνθήκες για τοπικό μέγιστο

$$|H_1^B| < 0, \quad |H_2^B| > 0$$

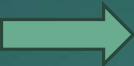
$$|H_1^B| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 \\ g_1 & L_{11} \end{vmatrix}$$

$$|H_2^B| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \end{vmatrix}$$

Επαρκείς συνθήκες για τοπικό ελάχιστο:

$$|H_1^B| < 0, \quad |H_2^B| < 0$$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$z=xy$  υπό τον περιορισμό  $x+y=6$  

$$L = xy + \lambda(6-x-y)$$

$$L_x = y - \lambda = 0, y = \lambda$$

$$L_y = x - \lambda = 0, x = \lambda$$

$$L_\lambda = 6 - x - y = 0 \quad \rightarrow \quad x^* = y^* = \lambda^* = 3$$

$$L_{xx} = L_{yy} = 0$$

$$L_{xy} = L_{yx} = 1$$

$$g_x = g_y = 1$$

Κατασκευάζουμε το συνοριακό (ή πλαισιωμένο) Εσσιανό Πίνακα της συνάρτησης Lagrange:

$$|H^B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & gx & gy \\ 1 & 0 & 1 & gx & Lxx & Lxy \\ 1 & 1 & 0 & gy & Lyx & Lyy \end{vmatrix}$$

Ελέγχουμε τα πρόσημα των ηγετικών κύριων ελασσόνων:

$$|H_1^B| = 0 - 1 < 0$$

$$|H_2^B| = -1(0-1) + 1(1-0) > 0$$

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Άρα, τοπικό μέγιστο στο  $x^* = y^* = 3$



## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Σχέση του μακροχρονίου συνολικού κόστους και της συνάρτησης παραγωγής

Έστω  $Q = AL^a K^b$  με  $A > 0, a > 0$  και  $b < 1$

Περιορισμός του συνολικού κόστους  $C = WL + rK$

Σχηματίζω συνάρτηση Lagrange  $LA = AL^a K^b + \lambda(C - WL - rK)$

Για max οι συνθήκες πρώτης τάξης απαιτούν οι πρώτες μερικοί παράγωγοι σε σχέση με τα  $K, L$  και  $\lambda$  να είναι ίσες με το μηδέν:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial LA}{\partial L} = a * \frac{Q}{L} - \lambda w = 0 \rightarrow a * \frac{Q}{L} = \lambda w \\ \frac{\partial LA}{\partial K} = b * \frac{Q}{K} - \lambda r = 0 \rightarrow b * \frac{Q}{K} = \lambda r \end{array} \right\} (\div) \frac{a * \frac{Q}{L}}{b * \frac{Q}{K}} = \frac{\lambda w}{\lambda r} \rightarrow K = \frac{W}{r} * \frac{b}{a} * L$$

$$\frac{\partial LA}{\partial \lambda} = C - WL - rK = 0 \rightarrow C = WL + rK$$

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

όπου  $Q$  το παραγόμενο προϊόν,

$L$  η εισροή εργασία,

$K$  η εισροή κεφάλαιο και

$A, a, b$  είναι σταθερές

$W$  αμοιβές του κεφαλαίου

$r$  αμοιβές της εργασίας

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Σχέση του μακροχρονίου συνολικού κόστους και της συνάρτησης παραγωγής

Αντικαθιστώντας το  $K = \frac{W}{r} * \frac{b}{a} * L$  στη συνάρτηση παραγωγής, έχω:

$$Q = L^a \left( \frac{W}{r} * \frac{b}{a} * L \right)^b \rightarrow Q = L^a L^b \left( \frac{W}{r} * \frac{b}{a} \right)^b \rightarrow Q = L^{a+b} \left( \frac{W}{r} * \frac{b}{a} \right)^b$$

$$\rightarrow L^{a+b} = \frac{Q}{\left( \frac{W}{r} * \frac{b}{a} \right)^b} \rightarrow L^{a+b} = Q * \left( \frac{W}{r} * \frac{b}{a} \right)^{-b} \rightarrow L = Q^{1/a+b} \left( \frac{r}{W} * \frac{a}{b} \right)^{b/a+b}$$

$$\text{Συνεπώς, η } K = \frac{W}{r} * \frac{b}{a} * L \rightarrow K = \frac{W}{r} * \frac{b}{a} [Q^{1/a+b} \left( \frac{r}{W} * \frac{a}{b} \right)^{b/a+b}]$$

$$\rightarrow K = Q^{1/a+b} \left( \frac{r}{W} * \frac{a}{b} \right)^{b/a+b-1} \rightarrow K = Q^{1/a+b} \left( \frac{r}{W} * \frac{a}{b} \right)^{a/a+b}$$

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Σχέση του μακροχρονίου συνολικού κόστους και της συνάρτησης παραγωγής

$$\rightarrow L = Q^{1/a+b} \left( \frac{r}{w} * \frac{a}{b} \right)^{b/a+b}$$

$$\rightarrow K = Q^{1/a+b} \left( \frac{r}{w} * \frac{a}{b} \right)^{a/a+b}$$

Οπότε, από την  $C = WL + rK$ , έχω

$$\rightarrow C = W Q^{1/a+b} \left( \frac{r}{w} * \frac{a}{b} \right)^{b/a+b} + r Q^{1/a+b} \left( \frac{w}{r} * \frac{b}{a} \right)^{b/a+b} \rightarrow C = Q^{1/a+b} \left[ W \left( \frac{r}{w} * \frac{a}{b} \right)^{b/a+b} + r \left( \frac{w}{r} * \frac{b}{a} \right)^{b/a+b} \right]$$

$$\rightarrow C = Q^{1/a+b} \left[ W \left( \frac{r}{w} * \frac{a}{b} \right)^{b/a+b} + \frac{r}{\left( \frac{r}{w} * \frac{a}{b} \right)^{a/a+b}} \right] \rightarrow C = Q^{1/a+b} \left[ \frac{ra}{b} + \frac{r}{\left( \frac{r}{w} * \frac{a}{b} \right)^{a/a+b}} \right]$$

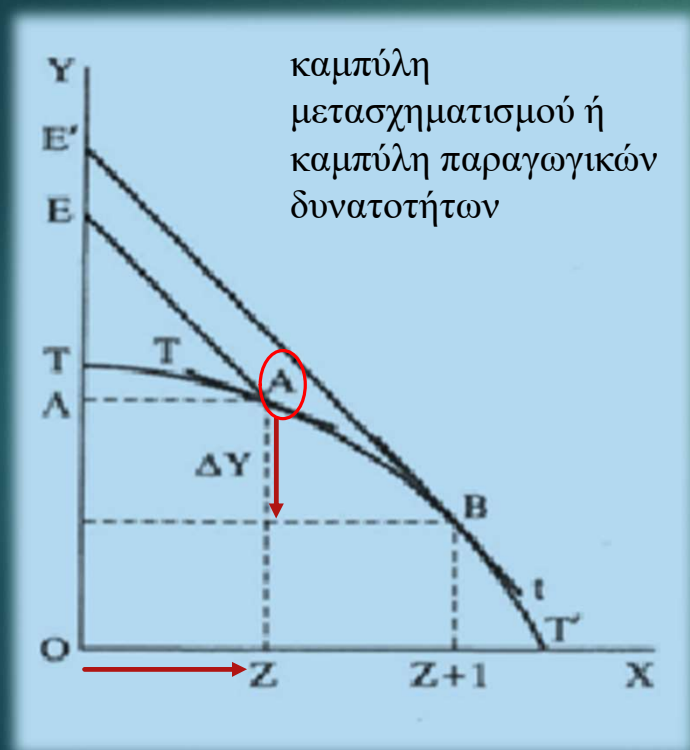
$$\rightarrow C = Q^{1/a+b} r \left[ \left( \frac{a}{b} + 1 \right) \left( \frac{w}{r} * \frac{a}{b} \right)^{a/a+b} \right]$$

$$\rightarrow C = r \left( \frac{a}{b} + 1 \right) \left( \frac{w}{r} * \frac{a}{b} \right)^a Q^{1/a+b}$$

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Διαγραμματική αποτύπωση ισορροπίας της επιχείρησης

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7



$P_x$  είναι η τιμή του προϊόντος X  
 $P_y$  είναι η τιμή του προϊόντος Y

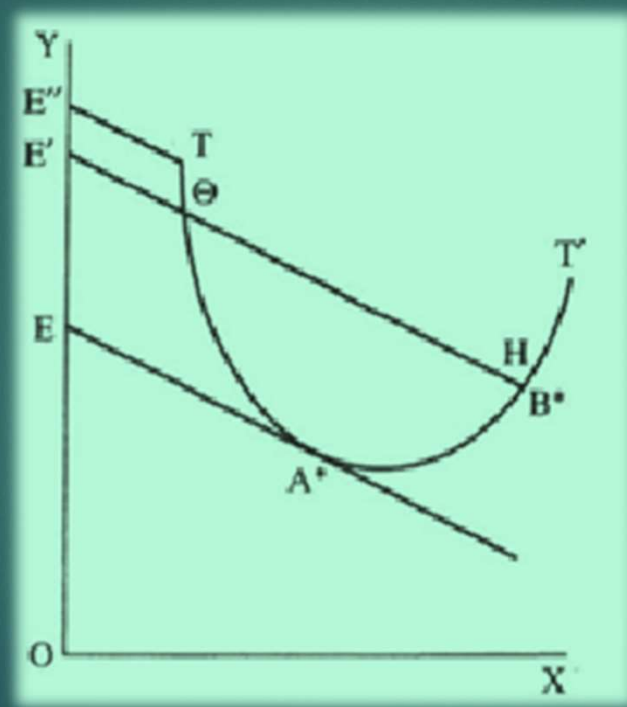
$$\left. \begin{aligned} EA &= -\frac{P_x}{P_y} \\ EA &= -\frac{\Delta E}{\Delta A} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\Delta E}{\Delta A} = \frac{P_x}{P_y} \quad \text{ή} \quad P_y \Delta E = P_x \Delta A$$

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Διαγραμματική αποτύπωση ισορροπίας της επιχείρησης

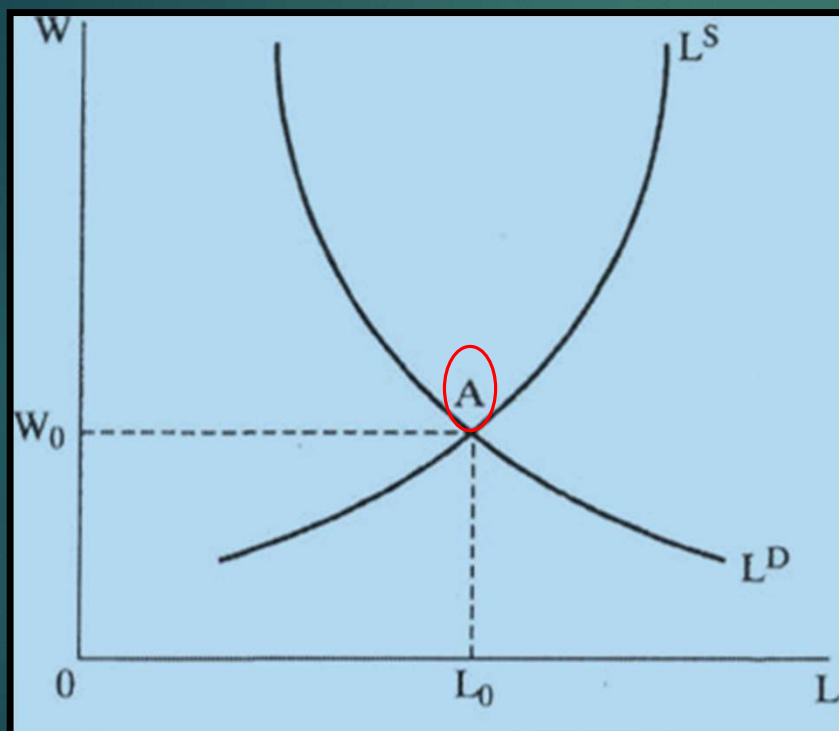
## ΕΝΟΤΗΤΑ 7



## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

### Ισορροπία στην αγορά εργασίας και συνδικάτα



όπου

$L$  ο εργατικός πληθυσμός,

$W$  ο μισθός,

$L^D$  η ζήτηση εργασίας,

$L^S$  η προσφορά εργασίας.

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

### Ισορροπία στην αγορά εργασίας και συνδικάτα

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση χρησιμότητας του εργατικού συνδικάτου δίνεται από

$$U=U(w,L), \quad \frac{\partial U}{\partial w} = U_w > 0, \quad \frac{\partial U}{\partial L} = U_L > 0$$

Η συνάρτηση ζήτησης εργασίας είναι:

$$L = D(W) \quad \leftarrow \text{Περιορισμός}$$

$U$  η συνολική χρησιμότητα του συνδικάτου,

$W$  το επίπεδο των μισθών,

$L$  ο αριθμός των απασχολούμενων.

Συνάρτηση του Lagrange θα έχουμε

$$L = U(W, L) + \lambda(L - D(W))$$

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

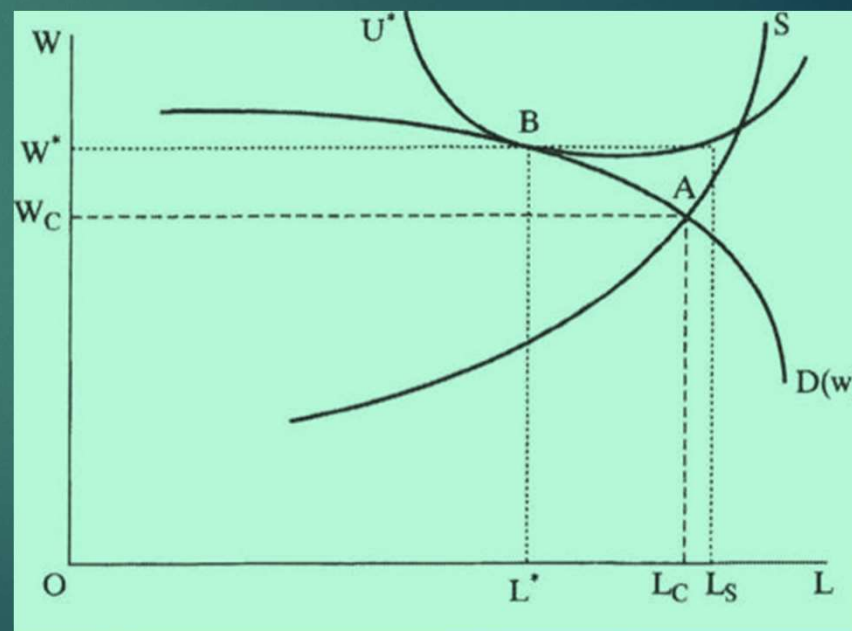
## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

### Ισορροπία στην αγορά εργασίας και συνδικάτα

$$L = U(W, L) + \lambda(L - D(W))$$

Η ισορροπία στην αγορά θα υπάρξει όταν

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial W} &= U_W - \lambda D'(W^*) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= U_L + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= L - D(W^*) = 0 \end{aligned} \right\} (\div) \quad \frac{U_W}{U_L} = -D'(W)$$





## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

### Η ισορροπία της ανταλλαγής

Γιώργος (Γ)

Πέτρος (Π)

Τόξα (Τ)

Βέλη (Β)

Αν οι συνολικές διαθέσιμες ποσότητες του Γιώργου και του Πέτρου για τα δύο αγαθά είναι Μ και Ν

$$\rightarrow U_r(T_r, B_r)$$

Άρα, για  $\text{Max} U_r(T_r, B_r)$  με τους περιορισμούς

$$M - T_r - T_\Pi \geq 0$$

$$N - B_r - B_\Pi \geq 0$$

$$T_r, B_r \geq 0$$

Σχηματίζω την λαγκρατζιανή συνάρτηση:

$$L_r = U_r(T_r, B_r) + \lambda_T(M - T_r - T_\Pi) + \lambda_B(N - B_r - B_\Pi)$$

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

### Η ισορροπία της ανταλλαγής

Εάν ο Γιώργος συμπεριφέρεται ορθολογικά, τότε θα θέλει όσο το δυνατόν περισσότερα τόξα και βέλη. Έτσι, και οι δυο περιορισμοί θα ισχύουν.

Οπότε,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L_G}{\partial T_G} &= \frac{\partial U_G}{\partial T_G} - \lambda_T = 0 \\ \frac{\partial L_G}{\partial B_G} &= \frac{\partial U_G}{\partial B_G} - \lambda_B = 0 \end{aligned} \right\} \quad \frac{\frac{\partial U_G}{\partial T_G}}{\frac{\partial U_G}{\partial B_G}} = \frac{\lambda_T}{\lambda_B}$$

$$\frac{\frac{\partial U_G}{\partial T_G}}{\frac{\partial U_G}{\partial B_G}} = \frac{\frac{\partial U_\Pi}{\partial T_\Pi}}{\frac{\partial U_\Pi}{\partial B_\Pi}}$$

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Για τον Πέτρο η συνάρτηση του Lagrange θα είναι:

$$L_\Pi = U_\Pi(T_\Pi, B_\Pi) + \mu_T(M - T_G - T_\Pi) + \mu_B(N - B_G - B_\Pi)$$

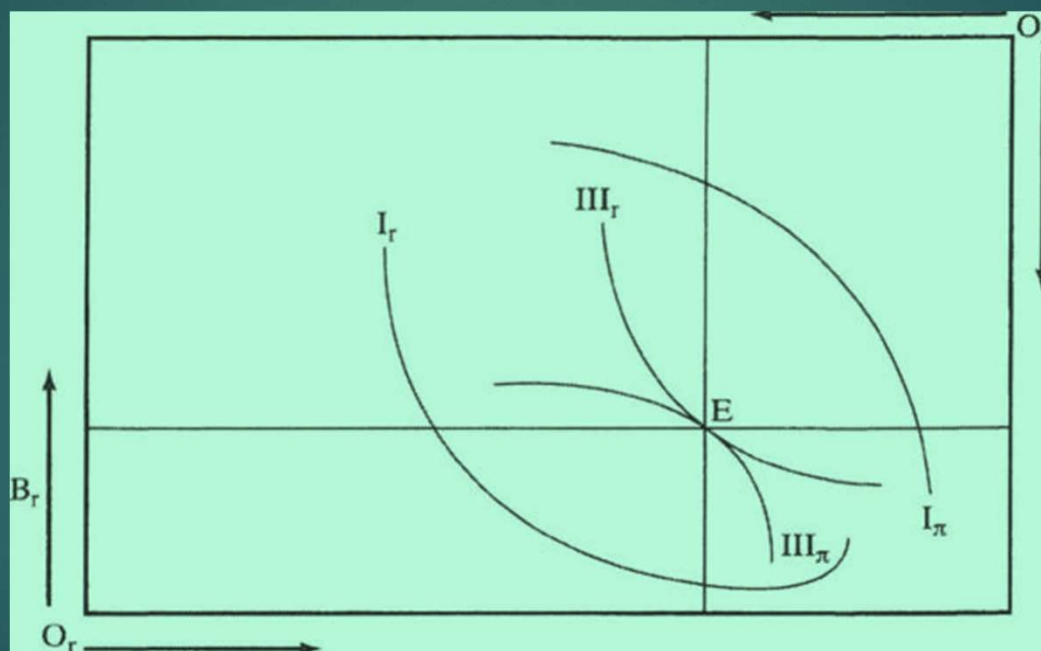
Παραγωγίζοντας ως προς  $T_\Pi$  και  $B_\Pi$ , παίρνουμε:

$$\frac{\frac{\partial U_\Pi}{\partial T_\Pi}}{\frac{\partial U_\Pi}{\partial B_\Pi}} = \frac{\mu_T}{\mu_B}$$

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

### Η ισορροπία της ανταλλαγής



## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

### Μεγιστοποίηση χρησιμότητας και ζήτηση καταναλωτή

Έστω η  $U(x,y)$  υπό το περιορισμό  $P_x x + P_y y = M$

Υποθέτω ότι  $U_x, U_y > 0$

$$L = U(x,y) + \lambda [M - P_x x - P_y y]$$

$$L_x = U_x - \lambda P_x = 0$$

$$L_y = U_y - \lambda P_y = 0$$

$$L_\lambda = M - P_x x - P_y y = 0$$

$$U_x / P_x = U_y / P_y = \lambda$$

Ο πολλαπλασιαστής Lagrange είναι η οριακή χρησιμότητα του εισοδήματος  $M$  όταν  $\max U$ :

$$\lambda^* = \frac{\partial U^*}{\partial M} \quad \text{ή} \quad - \frac{U_x}{U_y} = - \frac{P_x}{P_y}$$

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

### Μεγιστοποίηση χρησιμότητας και ζήτηση καταναλωτή

Η καμπύλη αδιαφορίας είναι ο τόπος των συνδυασμών  $x$  και  $y$  που αποδίδουν ένα σταθερό επίπεδο χρησιμότητας  $U$ :

$$dU = U_x dx + U_y dy = 0$$

$$U_x + U_y dy/dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{U_x}{U_y}$$

Αναδιατάσσοντας τον εισοδηματικό περιορισμό  $P_x x + P_y y = M \quad \rightarrow \quad y = M/P_y - P_x x / P_y$

$$\text{Συνθήκες δεύτερης τάξης: } |H^B| = \begin{vmatrix} 0 & P_x & P_y \\ P_x & U_{xx} & U_{xy} \\ P_y & U_{xy} & U_{yy} \end{vmatrix} \quad |H^B_1| = -P_x^2 < 0 \quad |H^B_2| = -P_x^2 U_{yy} - P_y^2 U_{xx} + 2P_x P_y U_{xy} > 0$$

Υπενθυμίζοντας από τις συνθήκες πρώτης τάξης ότι  $P_x = U_x/\lambda$  και  $P_y = U_y/\lambda$ .

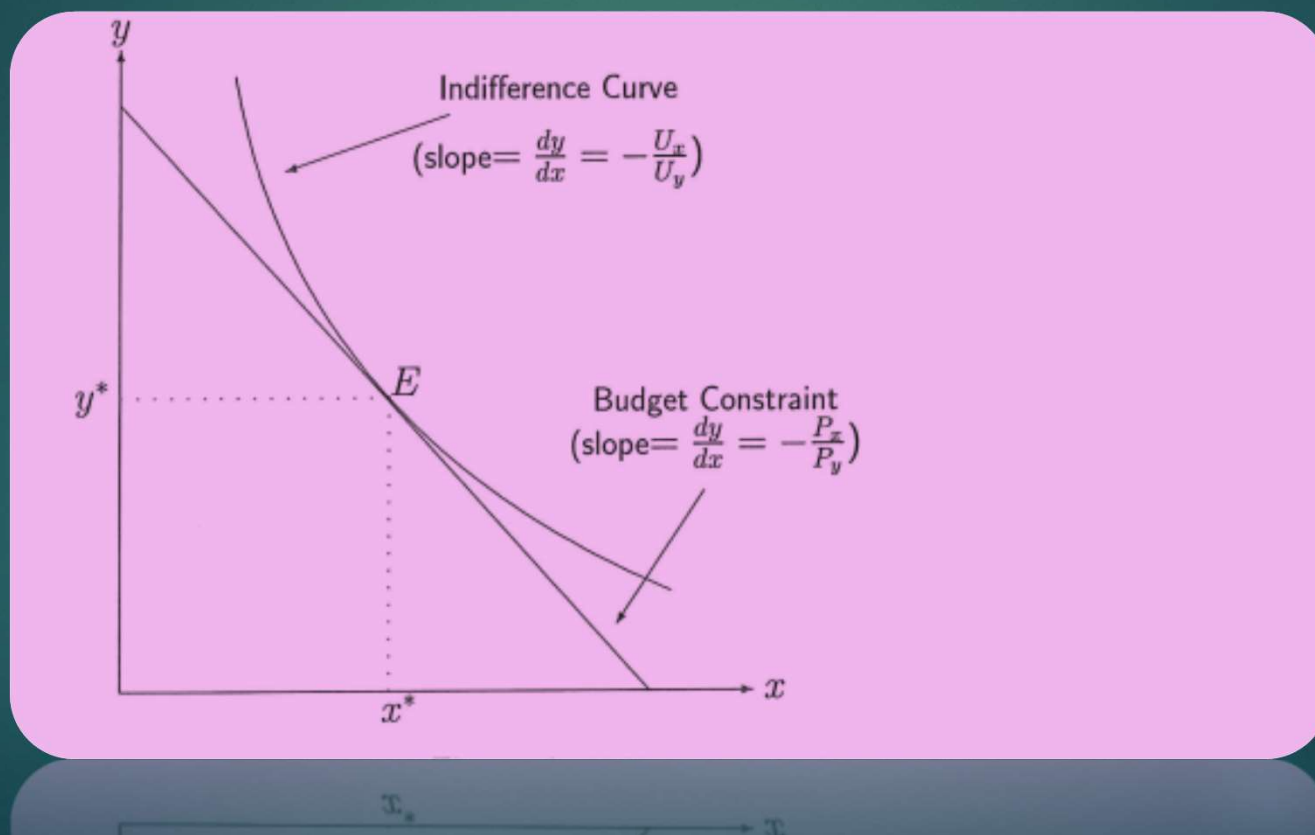
Γι αυτό:

$$|H^B_2| = \frac{-U_x^2 U_{yy} - U_y^2 U_{xx} + 2U_x U_y U_{xy}}{\lambda^2} > 0 \quad \rightarrow \quad U_x^2 U_{yy} + U_y^2 U_{xx} - 2U_x U_y U_{xy} < 0 \text{ για τοπικό μέγιστο.}$$

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

### Μεγιστοποίηση χρησιμότητας και ζήτηση καταναλωτή



## ΑΣΚΗΣΗ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Ας υποθέσουμε ότι ένας καταναλωτής έχει ένα εισόδημα 90 € και θέλει να το κατανείμει για την απόκτηση δύο αγαθών του αγαθού Α και του αγαθού Β.

Υποθέτουμε, ακόμη, ότι η τιμή για τα δύο αγαθά είναι:

$$P_{\alpha} = P_{\beta} = 2 \text{ €}.$$

Γνωρίζουμε, ακόμη, ότι η συνάρτηση χρησιμότητας του καταναλωτή είναι:  $U = A \cdot 2B$ .

Να βρεθεί η ποσότητα των δύο αγαθών, για τις οποίες ο καταναλωτής απολαμβάνει τη **μεγαλύτερη χρησιμότητα.**

## ΛΥΣΗ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Υπάρχει ο εισοδηματικός περιορισμός:

$$P_{\alpha} \cdot A + P_{\beta} \cdot B = 90 \rightarrow 2A + 2B = 90 \rightarrow A + B = 45$$

Σχηματίζω τη συνάρτηση Lagrange:  $LA(A,B) = 2AB + \lambda(45 - A - B)$

Οι πρώτου βαθμού συνθήκες (αναγκαίες) για ένα μέγιστο:  $LA_A=0, \quad LA_B=0, \quad LA_{\lambda}=0$

$$LA_A = \frac{dL}{dA} = 2B - \lambda \rightarrow 2B - \lambda = 0 \rightarrow B = \frac{\lambda}{2}$$

$$LA_B = \frac{dL}{dB} = 2A - \lambda \rightarrow 2A - \lambda = 0 \rightarrow A = \frac{\lambda}{2}$$

$$LA_{\lambda} = \frac{dL}{d\lambda} = 45 - A - B \rightarrow 45 - A - B = 0 \rightarrow A + B = 45$$

$$\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = 45 \rightarrow \lambda = 45$$

Συνεπώς, για  $\lambda = 45 \rightarrow$   
 **$B = 22,5$  και  $A = 22,5$**



# ΛΥΣΗ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Οι δευτέρου βαθμού συνθήκες (ικανές) για ένα μέγιστο απαιτούν:

$$LA_{AA} < 0, \quad LA_{BB} < 0, \quad (LA_{AB})^2 < LA_{AA} LA_{BB}$$

$$LA_{AA} = \frac{d^2 LA}{dA^2} = 0$$

$$LA_{BB} = \frac{d^2 LB}{dB^2} = 0$$

$$LA_{AB} = \frac{d LA}{dA dB} = 2$$

$$LA_{AA} = 0 \text{ και } LA_{BB} = 0$$

$$(LA_{AB})^2 < LA_{AA} LA_{BB} \rightarrow 4 < 0, \text{ που δεν ισχύει}$$

## ΛΥΣΗ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 6

Χρησιμοποιούμε τη μήτρα του Hessian:

Όπου,  $g_A = \frac{d(A+B)}{dA} = 1$ , και  $g_B = \frac{d(A+B)}{dB} = 1$

$$g_A^2 LA_{22} - 2g_A g_B LA_{12} + g_B^2 LA_{11} = -4 < 0^{**}$$

Αφού το ανάπτυγμα της μήτρας του Hessian είναι μικρότερο του μηδενός, τότε τα σημεία  $A = B = 22,5$  μεγιστοποιούν τη χρησιμότητα του καταναλωτή.

**\*\***Θυμίζω από προηγούμενα

$$|H^B_2| = Ux^2 U_{yy} - 2Ux U_y U_{xy} + Uy^2 U_{xx} < 0 \text{ για τοπικό μέγιστο.}$$

## ΑΣΚΗΣΗ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Μια κτηματική εταιρία πώλησης ακινήτων διαφημίζει τα ακίνητά της σε δύο εφημερίδες: Στα Παντειακά Νέα, τα οποία είναι μικρής εμβέλειας και στα Περιφερειακά Νέα, εθνικής εμβέλειας.

Οι οικονομολόγοι της επιχείρησης πιστεύουν ότι υπάρχει μια σχέση μεταξύ των πωλήσεων  $H$  και του ποσού που ξοδεύεται για διαφήμιση και στις δύο εφημερίδες. Η σχέση αυτή δίνεται από:

$$H = \frac{4.500X}{2 + X} + \frac{1.800 Y}{20 + Y}$$

όπου  $X$  είναι τα χρήματα (σε χιλ. ευρώ) που πληρώνονται για διαφήμιση στα Παντειακά Νέα και  $Y$  τα χρήματα (σε χιλ. ευρώ) που πληρώνονται για διαφήμιση στα Περιφερειακά Νέα. Η αμοιβή της εταιρίας είναι το 12,5% και περιλαμβάνει το κόστος διαφήμισης. Εάν η εταιρία έχει σχεδιάσει να δαπανήσει 2.000.000 ευρώ για διαφήμιση, πώς θα έπρεπε να διανείμει αυτό το ποσό μεταξύ των δύο εφημερίδων, για να μεγιστοποιήσει τα καθαρά της κέρδη, και πόσα είναι αυτά;

## ΛΥΣΗ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Αν Η οι πωλήσεις της κτηματικής εταιρίας το καθαρό της κέρδος (αμοιβή):

$$\Pi = 0,125H - 2.000$$

Άρα, θα βρω τις τιμές X και Y μεγιστοποιείται η  $H = \frac{4.500X}{2+X} + \frac{1.800Y}{20+Y}$  παρουσιάζει μέγιστο, υπό τον περιορισμό

$$X + Y = 2.000 \quad \rightarrow \quad 2.000 - X - Y = 0.$$

Σχηματίζω συνάρτηση Lagrange:

$$LA(K, L) = \frac{4.500X}{2+X} + \frac{1.800Y}{20+Y} + \lambda(2.000 - X - Y)$$

## ΛΥΣΗ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Σχηματίζω συνάρτηση Lagrange:

$$LA(K, L) = \frac{4.500X}{2+X} + \frac{1.800Y}{20+Y} + \lambda(2.000 - X - Y)$$

Οι πρώτου βαθμού αναγκαίες συνθήκες για ένα μέγιστο απαιτούν:  $\frac{dLA}{dX}=0$ ,  $\frac{dLA}{dY}=0$ ,  $\frac{dLA}{d\lambda}=0$

$$\frac{dLA}{dX}=0 \rightarrow d\left(\frac{4.500X}{2+X} + \frac{1.800Y}{20+Y} + \lambda(2.000 - X - Y)\right)/dX=0 \rightarrow d\left(\frac{4.500X}{2+X}\right)/dX + d\left(\frac{1.800Y}{20+Y}\right)/dX + d(\lambda(2.000 - X - Y))/dX=0$$

$$\rightarrow \frac{9000}{(2+X)^2} - \lambda = 0 \quad \rightarrow \frac{9000}{(2+X)^2} = \lambda$$

$$\frac{dLA}{dY}=0 \rightarrow d\left(\frac{4.500X}{2+X} + \frac{1.800Y}{20+Y} + \lambda(2.000 - X - Y)\right)/dY=0 \rightarrow d\left(\frac{4.500X}{2+X}\right)/dY + d\left(\frac{1.800Y}{20+Y}\right)/dY + d(\lambda(2.000 - X - Y))/dY=0$$

$$\rightarrow \frac{36000}{(20+Y)^2} - \lambda = 0 \quad \rightarrow \frac{36000}{(20+Y)^2} = \lambda$$

# ΛΥΣΗ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

$$\frac{dLA}{d\lambda}=0 \rightarrow d\left(\frac{4.500X}{2+X} + \frac{1.800Y}{20+Y} + \lambda(2.000 - X - Y)\right)/d\lambda=0$$

$$\rightarrow d\left(\frac{4.500X}{2+X}\right)/d\lambda + d\left(\frac{1.800Y}{20+Y}\right)/d\lambda + d(\lambda(2.000 - X - Y))/d\lambda=0$$

$$\rightarrow X+Y=2000$$

$$\text{Διαίρω τις } \frac{9000}{(2+X)^2} = \lambda \text{ και } \frac{36000}{(20+Y)^2} = \lambda \rightarrow$$

$$\frac{9000}{(2+X)^2} / \frac{36000}{(20+Y)^2} = \frac{\lambda}{\lambda} \rightarrow \frac{9000}{(2+X)^2} / \frac{36000}{(20+Y)^2} = 1 \rightarrow \frac{(20+Y)^2}{(2+X)^2} = 4 \rightarrow \frac{20+Y}{2+X} = 2 \rightarrow 20 + Y = 4 + 2X$$

$$\rightarrow 2X - Y = 16$$

$$\left. \begin{array}{l} X+Y=2000 \\ Y=2X-16 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} X + (2X-16) = 2.000 \\ Y=2X-16 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3X=2016 \\ Y=2X-16 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} X=672 \\ Y=1.328 \end{array} \right\}$$

## ΛΥΣΗ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Οι δευτέρου βαθμού συνθήκες (ικανές) για ένα μέγιστο :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2 LA}{dX^2} < 0 \\ \frac{d^2 LA}{dY^2} < 0 \\ \left( \frac{d^2 LA}{dXdY} \right)^2 < \frac{d^2 LA}{dX^2} * \frac{d^2 LA}{dY^2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{d^2 LA}{dX^2} = d\left(\frac{9000}{(2+X)^2} - \lambda\right)/dX = -9000(2+X)^{-3} = -2,939427 * 10^{-5} < 0 \\ \frac{d^2 LA}{dY^2} = d\left(\frac{36000}{(20+Y)^2} - \lambda\right)/dY = -72000(2+Y)^{-3} = -3,060395 * 10^{-5} < 0 \\ \frac{d^2 LA}{dXdY} = d\left(\frac{9000}{(2+X)^2} - \lambda\right)/dY = 0 \end{array}$$

Άρα,  $\left(\frac{d^2 LA}{dXdY}\right)^2 = 0 < \frac{d^2 LA}{dX^2} * \frac{d^2 LA}{dY^2} = 8,995 * 10^{-10}$

Max Π όταν  $X = 672.000$  € για διαφήμιση στα Παντειακά Νέα και  $Y = 1.328.000$  € στα Περιφερειακά Νέα. Οι πωλήσεις H θα είναι:

$$H = \frac{4.500X}{2+X} + \frac{1.800Y}{20+Y} = 6.259.930, \text{ άρα τα καθαρά κέρδη θα είναι:}$$

$$\Pi = 0,125 \cdot H - 2.000.000 = 4.259.930 \text{ €}.$$



## ΑΣΚΗΣΗ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Μια ξυλουργική εταιρία έχει την ακόλουθη συνάρτηση κόστους:

$$TC = 64L + 15S$$

Όπου  $L$  ο αριθμός των ξυλουργών και  $S$  η ποσότητα της ενέργειας που καταναλώνεται σε εκατομμύρια τόνους.

Η συνάρτηση παραγωγής δίνεται από την:

$$Q = 160L + 103S - 4L^2 - 1.03S^2$$

Η εταιρία επιθυμεί να παράγει 1.000 μονάδες προϊόντος.

Να βρεθεί η τιμή των  $L$  και  $S$  που ελαχιστοποιεί το κόστος παραγωγής.



## ΛΥΣΗ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Η εταιρία επιθυμεί να παράγει 1.000 μονάδες προϊόντος:

$$Q = 1.000.$$

Min TC:

$$TC = 64L + 15S$$

υπό τον περιορισμό

$$1.000 = 160L + 103S - 4L^2 - 1,03S^2.$$

Σχηματίζω συνάρτηση Lagrange:

$$LA(L,S,\lambda) = 64L + 15S + \lambda(1.000 - 160L - 103S + 4L^2 + 1,03S^2)$$

Συνθήκες πρώτου βαθμού για min:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dLA}{dL} = 0 \\ \frac{dLA}{dS} = 0 \\ \frac{dLA}{d\lambda} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{dLA}{dL} = d(64L + 15S + \lambda(1.000 - 160L - 103S + 4L^2 + 1,03S^2))/dL = 64 + \lambda(-160 + 8L) = 0 \\ \frac{dLA}{dS} = d(64L + 15S + \lambda(1.000 - 160L - 103S + 4L^2 + 1,03S^2))/dS = 15 + \lambda(-103 + 2,06S) = 0 \\ \frac{dLA}{d\lambda} = d(64L + 15S + \lambda(1.000 - 160L - 103S + 4L^2 + 1,03S^2))/d\lambda = 1.000 - 160L - 103S + 4L^2 + 1,03S^2 = 0 \end{array}$$

## ΛΥΣΗ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

$$64 + \lambda(-160 + 8L) = 0$$

$$15 + \lambda(-103 + 2,06S) = 0$$

$$\rightarrow 64 = \lambda(160 - 8L)$$

$$\rightarrow 15 = \lambda(-2,06S + 103)$$

} (÷)



$$1.000 - 160L - 103S + 4L^2 + 1,03S^2 = 0$$

$$\rightarrow 1000 = 160L + 103S - 4L^2 - 1,03S^2$$

$$\rightarrow \frac{64}{15} = \frac{160 - 8L}{-2,06S + 1} \rightarrow 64(-2,06S + 103) = 15(160 - 8L) \rightarrow L = 1,0986S - 34,933$$

$$1.000 = 160(1,0986S - 34,933) + 103S - 4(1,0986S - 34,933)^2 - 1,03S^2$$

$$\rightarrow 5,857S^2 - 585,79S + 1.1470,5 = 0 \rightarrow S^2 - 100S + 1.958,196 = 0 \text{ (τριώνυμο)}$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 100^2 - 4 \cdot 1.958,196 = 2.167,216 = (46,553)^2$$

Άρα, οι ρίζες είναι:

$$S_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-100 \pm 46,533}{2} = \frac{73,276}{26,7233}$$

## ΛΥΣΗ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

$$\text{Για } S_1 = 73,276 \rightarrow L_1 = 1,0986 \cdot 73,276 - 34,933 = 45,568 \text{ (αποδεκτή)}$$

$$\text{Για } S_2 = 26,7233 \rightarrow L_2 = 1,0986 \cdot 26,7233 - 34,933 = -5,57 \text{ (απορρίπτεται)}$$

$$\text{Συνεπώς, } L = 45,568 \text{ και } S = 73,276$$

$$\text{Άρα, } \lambda = \frac{64}{(160-8)} = -0,312$$

Εσσιανή μήτρα:

$$\frac{d^2 LA}{dS^2} = d(15 + \lambda(-103 + 2,06S))/dS = 2,06\lambda = -0,643 > 0$$

$$\frac{d^2 LA}{dL^2} = d(64 + \lambda(-160 + 8L))/dL = 8\lambda = -2,496 > 0$$

$$\frac{d^2 LA}{dSdL} = d(15 + \lambda(-103 + 2,06S))/dL = 0$$

$$|H^B| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} & \frac{\partial^2 Q}{\partial L \partial S} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial S \partial L} & \frac{\partial^2 Q}{\partial S^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2,496 & 0 \\ 0 & -0,643 \end{vmatrix}$$

$$|H^B| = (-2,496) * (-0,643) - 0 = 1,604 > 0$$

Άρα, για  $L = 45,568$  και  $S = 73,276$  το  $\min TC$

## ΑΣΚΗΣΗ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Δίνεται το πιο κάτω υπόδειγμα συμπεριφοράς του καταναλωτή

$$U = 5Q_1^{0,8} Q_2^{0,2}$$

$E = 1.000$  ευρώ (το εισόδημα του καταναλωτή μιας συγκεκριμένης χρονικής περιόδου)

$P_1 = 10$  ευρώ (η τιμή του αγαθού 1)

$P_2 = 40$  ευρώ (η τιμή του αγαθού 2)

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση χρησιμότητας είναι ομογενής πρώτου βαθμού και

β) να βρεθούν οι ποσότητες που μεγιστοποιούν τα κέρδη της επιχείρησης.

## ΛΥΣΗ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

α) Θυμίζουμε ότι μία συνάρτηση  $U = f(Q_1, Q_2)$  είναι ομογενής πρώτου βαθμού αν:

$$U(\lambda Q_1, \lambda Q_2) = \lambda U(Q_1, Q_2)$$

$$U(\lambda Q_1, \lambda Q_2) = 5(\lambda Q_1)^{0,8} (\lambda Q_2)^{0,2} = 5\lambda^{0,8} Q_1^{0,8} \lambda^{0,2} Q_2^{0,2} = 5\lambda Q_1^{0,8} Q_2^{0,2} = \lambda U(Q_1, Q_2)$$

Συνεπώς, η συνάρτηση χρησιμότητας  $U$  είναι ομογενής πρώτου βαθμού.

β) Ζητείται η μεγιστοποίηση της  $U$  υπό τον περιορισμό  $E = 1.000\text{€} \rightarrow P_1 Q_1 + P_2 Q_2 = 1.000$

$$\rightarrow 1.000 = 10Q_1 + 40Q_2.$$

Σχηματίζω συνάρτηση Lagrange:

$$LA = 5Q_1^{0,8} Q_2^{0,2} + \lambda(1.000 - 10Q_1 - 40Q_2)$$

# ΛΥΣΗ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Συνθήκες πρώτου βαθμού για max:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dLA}{dQ_1}=0 \\ \frac{dLA}{dQ_2}=0 \\ \frac{dLA}{d\lambda}=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} d(5Q_1^{0,8} Q_2^{0,2} + \lambda(1.000 - 10Q_1 - 40Q_2))/dQ_1 = 0 \rightarrow 4Q_1^{-0,2} Q_2^{0,2} - 10\lambda = 0 \rightarrow 4Q_1^{-0,2} Q_2^{0,2} = 10\lambda \\ d(5Q_1^{0,8} Q_2^{0,2} + \lambda(1.000 - 10Q_1 - 40Q_2))/dQ_2 = 0 \rightarrow Q_1^{0,8} Q_2^{-0,8} - 40\lambda = 0 \rightarrow Q_1^{0,8} Q_2^{-0,8} = 40\lambda \\ d(5Q_1^{0,8} Q_2^{0,2} + \lambda(1.000 - 10Q_1 - 40Q_2))/d\lambda = 0 \rightarrow 10Q_1 + 40Q_2 = 1.000 \end{array} \quad (\div)$$

$$\Rightarrow 4Q_1^{-0,2} Q_2^{0,2} / Q_1^{0,8} Q_2^{-0,8} = \frac{10\lambda}{40\lambda} \rightarrow \frac{4Q_2}{Q_1} = \frac{1}{4} \rightarrow 16Q_2 = Q_1$$

$$\begin{array}{ll} 10 \cdot 16Q_2 + 40Q_2 = 1.000 & \rightarrow 200Q_2 = 1.000 \\ \rightarrow Q_2 = 5 & \text{και} \quad Q_1 = 16Q_2 \rightarrow Q_1 = 80 \end{array}$$

# ΛΥΣΗ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Συνθήκες δευτέρου βαθμού (ικανές) για max:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 LA}{dQ^2} &< 0 \\ \frac{d^2 LA}{dQ^2} &< 0 \\ \left( \frac{d^2 LA}{dQ_1 dQ_2} \right)^2 &< \frac{d^2 LA}{dQ_1^2} * \frac{d^2 LA}{dQ_2^2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{d^2 LA}{dQ^2} &= d(4Q_1^{-0,2} Q_2^{0,2} - 10\lambda) / dQ_1 = -8Q_1^{-1,2} Q_2^{0,2} = -0,0574 < 0 \\ \frac{d^2 LA}{dQ^2} &= d(Q_1^{0,8} Q_2^{-0,8} - 40\lambda) / dQ_2 = -0,8Q_1^{0,8} Q_2^{-1,8} = -1,4703 < 0 \\ \frac{d^2 LA}{dQ_1 dQ_2} &= d((4Q_1^{-0,2} Q_2^{0,2} - 10\lambda) / dQ_2 = 0,8Q_1^{-0,2} Q_2^{-1,2} = 0,04827 \end{aligned}$$

Άρα,  $\left( \frac{d^2 LA}{dQ_1 dQ_2} \right)^2 = 0,0482 < 0,0844 = \frac{d^2 LA}{dQ_1^2} * \frac{d^2 LA}{dQ_2^2}$  που ισχύει

Άρα, οι ποσότητες που μεγιστοποιούν τη χρησιμότητα του καταναλωτή, για το δεδομένο εισόδημά του της συγκεκριμένης χρονικής περιόδου, είναι:

$$Q_1 = 80 \text{ και } Q_2 = 5$$



## ΑΣΚΗΣΗ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Έστω ότι μια επιχείρηση έχει συνάρτηση ολικών κερδών

$$\Pi(x, y) = -4x^2 - 5y^2 + 20xy$$

όπου  $x$  και  $y$  είναι οι παραγόμενες και πωλούμενες ποσότητες των προϊόντων  $X$ ,  $Y$ .

Για την παραγωγή κάθε μονάδας του προϊόντος  $X$  απαιτούνται 2 μονάδες ενός συντελεστή παραγωγής και για την παραγωγή κάθε μονάδας του προϊόντος  $Y$  απαιτούνται 5 μονάδες του συντελεστή αυτού που διατίθεται σε 40 μονάδες.

Να βρεθεί το μέγιστη τιμή κέρδους υπό την παραπάνω συνθήκη.

## ΛΥΣΗ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Ο περιορισμός περιγράφεται από την εξίσωση:

$$2x+5y=40$$

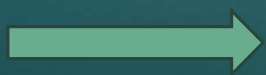
Άρα, ψάχνω την  $\max \Pi(x, y) = -4x^2 - 5y^2 + 20xy$  υπό τον περιορισμό  $2x+5y=40$

Σχηματίζω συνάρτηση Lagrange:

$$\Pi(x, y, \lambda) = -4x^2 - 5y^2 + 20xy + \lambda(40 - 2x - 5y)$$

Βρίσκω τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης:

$$\left. \begin{aligned} \Pi_x &= -8x + 20y - 2\lambda = 0 \rightarrow (\div 2) -4x + 10y - \lambda = 0 \\ \Pi_y &= 20x - 10y - 5\lambda = 0 \rightarrow (\div 5) 4x - 2y - \lambda = 0 \\ \Pi_\lambda &= 40 - 2x - 5y = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &^{(+)} \quad \left. \begin{aligned} \lambda &= 4y \\ 4x - 2y - \lambda &= 0 \end{aligned} \right\} 4x - 6y = 0 \end{aligned}$$



$$x = \frac{15}{2}, y = 5, \lambda = 20$$

## ΛΥΣΗ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Υπολογίζω τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης

$$\Pi_{xx} = -8$$

$$\Pi_{yy} = -10$$

$$\Pi_{xy} = \Pi_{yx} = 20$$

$$\Pi_{\lambda x} = \varphi_x = -2$$

$$\Pi_{\lambda y} = \varphi_y = -5$$

Οπότε η συνοριακή εσσιανή H:

$$|H| = \begin{vmatrix} 0 & \varphi_x & \varphi_y \\ \varphi_x & \Pi_{xx} & \Pi_{yx} \\ \varphi_y & \Pi_{xy} & \Pi_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & -8 & 20 \\ -5 & 20 & -10 \end{vmatrix} = 640 > 0$$

Επομένως, στο σημείο με  $x = \frac{15}{2}$ ,  $y = 5 \rightarrow$  τοπικό μέγιστο  $\Pi(\frac{15}{2}, 5) = 4000$

# ΕΝΟΤΗΤΑ 7

ΤΕΛΟΣ 7<sup>ΗΣ</sup> ΕΝΟΤΗΤΑΣ