



SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES

ΠΑΝΤΕΙΟΝ
ΠΑΝΤΕΙΟΝ

ΠΟΣΟΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Γιώργος Λούντζης (PhD, MSc, MEng)

Εντεταλμένος Διδάσκων (ΕΣΠΑ)
2024 – 2025

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

1. ΟΛΙΚΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΚΑΙ ΟΛΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

2. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

Στις μονομεταβλητές συναρτήσεις:

Έστω $y=y(x)$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx \quad \rightarrow \quad dy = y'(x) dx$$

$$\text{Π.χ.} \quad y = 3x^2 - 2x \quad \rightarrow \quad dy = (6x - 2) dx$$

Για πολυμεταβλητές συναρτήσεις $\rightarrow$ ολικό διαφορικό.

Έστω συνάρτηση $y=y(x,z,\omega)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} y=y(x,z,\omega) &\rightarrow dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial z} dz + \frac{\partial y}{\partial \omega} d\omega \\ &\rightarrow dy = y_x dx + y_z dz + y_\omega d\omega \end{aligned}$$

Με τον παραπάνω τρόπο υπολογίζεται προσεγγιστικά η μεταβολή της συνάρτησης $y=y(x,z,\omega)$ όταν από το σημείο που ορίζεται από τα (x,z,ω) πηγαίνουμε στο σημείο $(x+dx, z+dz, \omega+d\omega)$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

Π.χ.

$$y = 3x^2 - 4\omega^4x + 5\omega^2 + 20$$

$$dy = (6x - 4\omega^4)dx + (-16\omega^3x + 10\omega)d\omega$$

Για τη «ν-μεταβλητή» συνάρτηση $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n$$

→ $dy = y_1 dx_1 + \dots + y_n dx_n$

ολικό διαφορικό



Παράδειγμα

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

Η συνολική κατανάλωση (K) σε μία χώρα εξαρτάται (δηλ. είναι συνάρτηση) από το εθνικό εισόδημα (E) της χώρας και από το ύψος του επιτοκίου (t) στην χώρα. Δηλαδή,

$$K = g(E, t)$$

Ολικό Διαφορικό:

$$dK = \frac{\partial K}{\partial E} dE + \frac{\partial K}{\partial t} dt$$

Άρα:

$$\frac{\partial K}{\partial E} > 0 \quad \text{αλλά} \quad \frac{\partial K}{\partial t} < 0$$

Ταυτόχρονα το εθνικό εισόδημα (E) εξαρτάται από το ύψος του επιτοκίου (t), δηλαδή, $E = \lambda(t)$

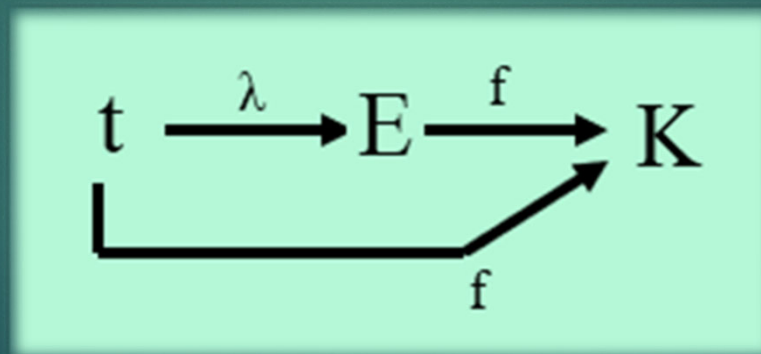
ΕΝΟΤΗΤΑ 5

Συνεπώς στη σχέση $E=\lambda(t)$ δεχόμαστε ότι

$$\frac{dE}{dt} > 0$$

Άρα, $K = f(E, t)$ όπου $E = \lambda(t)$

Η παράγωγος $\frac{\partial K}{\partial t}$ της μας δίνει τον ρυθμό μεταβολής της K όταν μεταβάλλεται το t αλλά με το E σταθερό.



ΕΝΟΤΗΤΑ 5

A. Κατ' αρχάς παίρνουμε το ολικό διαφορικό της $K = g(E, t)$, δηλαδή

$$dK = \frac{\partial K}{\partial E} dE + \frac{\partial K}{\partial t} dt$$

B. Στη συνέχεια διαιρούμε και τα δύο σκέλη της με το dt οπότε έχουμε

$$\frac{dK}{dt} = \frac{\partial K}{\partial E} \frac{dE}{dt} + \frac{\partial K}{\partial t} \frac{dt}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dK}{dt} \text{ (ολική παράγωγος της } K \text{ ως προς το } t) = \frac{\partial K}{\partial E} \frac{dE}{dt} + \frac{\partial K}{\partial t}$$

Παράδειγμα - Εφαρμογή

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

$$K = 10 + 0,7E - 0,2t^2 \quad \text{όπου } E = 0,1t^2$$

$$\frac{\partial K}{\partial E} = 0,7$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} = -0,4t$$

$$\frac{dE}{dt} = 0,2t$$

$$\text{οπότε,} \quad \frac{dK}{dt} = 0,7 \cdot 0,2t + (-0,4t) = 0,14t - 0,40t = -0,26t$$

$$\text{Παρατηρούμε ότι } \frac{\partial K}{\partial t} = -0,4t \quad \text{αλλά} \quad \frac{dK}{dt} = -0,26t.$$

Δηλαδή με σταθερό το E , η αρνητική επίδραση μιας δεδομένης αύξησης του t πάνω στο K είναι μεγαλύτερη από την αρνητική επίδραση της ίδιας αύξησης του t πάνω στο K αλλά με το E μη σταθερό.

Γενικά: Αν $y=f(x,z)$ όπου $x=\lambda(z)$, τότε η ολική παράγωγος προς y προς την z είναι

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{dx}{dz} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{dz}{dz} = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{dx}{dz} + \frac{\partial y}{\partial z} \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dz} = f_x \frac{dx}{dz} + f_z \frac{dz}{dz} = f_x \frac{dx}{dz} + f_z$$

ΑΣΚΗΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

Έστω η συνάρτηση χρησιμότητας:

$$U = X^{1/2} Y^{1/4}$$

Να βρεθεί:

Η κλίση της καμπύλης αδιαφορίας $U = X^{1/2} Y^{1/4}$

ΛΥΣΗ

Η κλίση της καμπύλης αδιαφορίας δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dY}{dX} = - \frac{U_x}{U_y} = - \frac{\frac{d(X^{1/2} Y^{1/4})}{dX}}{\frac{d(X^{1/2} Y^{1/4})}{dY}} = - \frac{\frac{1}{2} X^{-1/2} Y^{1/4}}{\frac{1}{4} X^{1/2} Y^{-3/4}} = -2 \frac{Y}{X}$$

ΑΣΚΗΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

Η γενική μορφή της CES συνάρτησης παραγωγής είναι:

$$Q = \gamma (\delta K^{-\rho} + (1 - \delta)L^{-\rho})^{-\mu/\rho}$$

όπου γ και $\mu \geq 0$, $\rho \geq -1$ και $0 \leq \delta \leq 1$.

Το μ δείχνει το βαθμό ομοιογένειας της συνάρτησης.

Αν $\mu = 1$, θα έχουμε σταθερές αποδόσεις κλίμακας.

Το γ εκφράζει την αποδοτικότητα,

το δ είναι παράμετρος διανομής και

το ρ η παράμετρος υποκατάστασης μεταξύ των συντελεστών παραγωγής κεφαλαίου (K) και εργασίας (L).

Να βρεθεί ο οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης.

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

Ο οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης δίνεται από τη σχέση:

$$MRTS_{L,K} = \frac{dK}{dL} = - \frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}} = - \frac{\frac{\partial((\gamma(\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}))^{-\mu/\rho})}{\partial L}}{\frac{\partial((\gamma(\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}))^{-\mu/\rho})}{\partial K}}$$

Οι προς παραγωγή συναρτήσεις είναι σύνθετες.

Γνωρίζουμε ότι αν $Y = f(u)$ και $u = g(x)$, τότε

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY}{du} \cdot \frac{du}{dX}$$

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

$$\Theta\acute{\epsilon}\tau\omega\ u = \delta K^{-\rho} + (1 - \delta)L^{-\rho},$$

οπότε:

$$\frac{dK}{dL} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial L}}{\frac{\partial f}{\partial K}} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial L}}{\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial K}} = - \frac{\frac{\partial(\gamma u^{-\mu/\rho})}{\partial u} \cdot \frac{\partial(\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho})}{\partial L}}{\frac{\partial(\gamma u^{-\mu/\rho})}{\partial u} \cdot \frac{\partial(\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho})}{\partial K}}$$

όμως

$$\frac{\partial(\gamma u^{-\mu/\rho})}{\partial u} = - \frac{\mu}{\rho} \gamma u^{-\mu/\rho-1},$$

$$\frac{\partial(\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho})}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L} (\delta K^{-\rho}) + \frac{\partial}{\partial L} (1-\delta)L^{-\rho} = 0 - \rho(1-\delta)L^{-\rho-1}$$

$$\frac{\partial(\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho})}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K} (\delta K^{-\rho}) + \frac{\partial}{\partial K} (1-\delta)L^{-\rho} = -\rho\delta K^{-\rho-1} + 0$$

Άρα,

$$\frac{dK}{dL} = \frac{-\rho(1-\delta)L^{-\rho-1}}{-\rho\delta K^{-\rho-1}} = (1-\delta/\delta)(L/K)^{-(\rho+1)}$$

Ομογενείς Συναρτήσεις

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

Μία διαφορική εξίσωση ονομάζεται **ομογενής** σε κάθε μία από τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

- 1) εάν η εξίσωση είναι πρώτης τάξης και οι συντελεστές των διαφορικών **dx και dy** είναι του ίδιου βαθμού ομογενείς συναρτήσεις των μεταβλητών,
και
- 2) εάν είναι γραμμικές οποιασδήποτε τάξης, αλλά ο σταθερός όρος είναι μηδενικός.

Ομογενής Διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

Μία συνηθισμένη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης της μορφής:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

είναι ομογενής, εάν και οι δύο συναρτήσεις $M(x, y)$ και $N(x, y)$ είναι ομογενείς συναρτήσεις του ίδιου βαθμού n .
Δηλ. πολλαπλασιάζοντας κάθε μεταβλητή με την παράμετρο λ , να ισχύει:

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n M(x, y) \text{ και } N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n N(x, y)$$

Έτσι,

$$\frac{M(\lambda x, \lambda y)}{N(\lambda x, \lambda y)} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

ΑΣΚΗΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

Δίνεται η συνάρτηση παραγωγής

$$Q = \frac{aLK - bL^2 - cK^2}{aL + bK}$$

Να βρεθεί:

- α) ότι η παραπάνω συνάρτηση είναι ομογενής πρώτου βαθμού και
- β) ότι η ομογένεια της οριακής παραγωγικότητας της εργασίας και του κεφαλαίου είναι μηδενικού βαθμού.

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

α) ότι η συνάρτηση $Q = \frac{aLK - bL^2 - cK^2}{aL + bK}$ είναι ομογενής πρώτου βαθμού

Γνωρίζουμε ότι αν $Q = f(K, L)$ μια συνάρτηση παραγωγής και ισχύει

$$f(\lambda K, \lambda L) = \lambda^\mu f(K, L) = \lambda Q$$

τότε η συνάρτηση είναι ομογενής πρώτου βαθμού.

Έστω ότι το κεφάλαιο και η εργασία αυξάνονται κατά το ίδιο ποσοστό λ .

Τότε η συνάρτηση παραγωγής γίνεται:

$$Q_1 = \frac{a(\lambda L)(\lambda K) - b(\lambda L)^2 - c(\lambda K)^2}{a(\lambda L) + b(\lambda K)} = \frac{a\lambda^2 LK - b\lambda^2 L^2 - c\lambda^2 K^2}{a\lambda L + b\lambda K}$$
$$\rightarrow Q_1' = \frac{\lambda^2 (aLK - bL^2 - cK^2)}{\lambda(aL + bK)} = \frac{\lambda(aLK - bL^2 - cK^2)}{aL + bK} = \lambda \cdot Q$$

Άρα, η συνάρτηση παραγωγής είναι ομογενής πρώτου βαθμού.

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

β) ότι η ομογένεια της οριακής παραγωγικότητας της εργασίας και του κεφαλαίου είναι μηδενικού βαθμού.

Η οριακή παραγωγικότητα της εργασίας δίνεται από τη σχέση:

$$MPL = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial \left(\frac{aLK - bL^2 - cK^2}{aL + bK} \right)}{\partial L}$$

Θέτω $g(L) = aLK - bL^2 - cK^2$ και $h(L) = aL + bK$.

$$MPL = \frac{\partial \left(\frac{g(L)}{h(L)} \right)}{\partial L} = \frac{[h(L) \frac{\partial g(L)}{\partial L} - g(L) \frac{\partial h(L)}{\partial L}]}{h(L)^2} = \frac{(aL + bK)(aK - 2bL) - (aLK - bL^2 - cK^2)a}{(aL + bK)^2} = \frac{a^2LK - 2abL^2 + abK^2 - 2b^2KL - a^2LK + abL^2 + acK^2}{(aL + bK)^2}$$

$$\rightarrow MPL = \frac{-abL^2 + a(b+c)K^2 - 2b^2KL}{(aL + bK)^2}$$

Έστω ότι το κεφάλαιο και η εργασία αυξάνονται κατά το ίδιο ποσοστό λ .

Τότε η οριακή παραγωγικότητα της εργασίας γίνεται:

$$MPL1 = \frac{-ab(\lambda L)^2 + a(b+c)(\lambda K)^2 - 2b^2(\lambda K)(\lambda L)}{(a(\lambda L) + b(\lambda K))^2} = \frac{-ab\lambda^2 L^2 + a(b+c)\lambda^2 K^2 - 2b^2\lambda^2 KL}{\lambda^2((aL + bK))^2} = \frac{\lambda^2(-abL^2 + a(b+c)K^2 - 2b^2KL)}{\lambda^2((aL + bK))^2} = \frac{-abL^2 + a(b+c)K^2 - 2b^2KL}{(aL + bK)^2} = MPL.$$

Άρα, η οριακή παραγωγικότητα της εργασίας είναι ομογενής μηδενικού βαθμού.

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

Η οριακή παραγωγικότητα του κεφαλαίου δίνεται από τη σχέση: $MPK = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\partial \left(\frac{aLK - bL^2 - cK^2}{aL + bK} \right)}{\partial K}$
Θέτω $g(K) = aLK - bL^2 - cK^2$ και $h(K) = aL + bK$.

$$MPK = \frac{\partial \left(\frac{g(K)}{h(K)} \right)}{\partial K} = \frac{[h(K) \frac{\partial g(K)}{\partial K} - (g(K) \frac{\partial h(K)}{\partial L})]}{h(K)^2} = \frac{(aL + bK)(aL - 2cK) - (aLK - bL^2 - cK^2)b}{(aL + bK)^2} =$$

$$\rightarrow MPK = \frac{a^2 L^2 - 2acLK + abKL - 2bcK^2 - abLK + b^2 L^2 + bcK^2}{(aL + bK)^2} = \frac{(a^2 + b^2)L^2 - bcK^2 - 2acKL}{(aL + bK)^2}$$

Έστω ότι το κεφάλαιο και η εργασία αυξάνονται κατά το ίδιο ποσοστό λ .

Τότε η οριακή παραγωγικότητα της εργασίας γίνεται:

$$MPK1 = \frac{(a^2 + b^2)(\lambda L)^2 - bc(\lambda K)^2 - 2ac(\lambda K)(\lambda L)}{(a(\lambda L) + b(\lambda K))} = \frac{(a^2 + b^2)\lambda^2 L^2 - bc\lambda^2 K^2 - 2ac\lambda^2 KL}{\lambda((aL + bK))} = \frac{\lambda^2((a^2 + b^2)L^2 - bcK^2 - 2acKL)}{\lambda^2(aL + bK)^2}$$

$$\rightarrow MPK1 = \frac{(a^2 + b^2)L^2 - bcK^2 - 2acKL}{(aL + bK)^2} = MPK$$

Άρα, η οριακή παραγωγικότητα του κεφαλαίου είναι ομογενής μηδενικού βαθμού.

Ομογενείς Συναρτήσεις

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

Αν $Q = f(K, L)$ μια συνάρτηση παραγωγής και $f(\lambda K, \lambda L) = \lambda^\mu f(K, L)$,

τότε

- αν $\mu > 1$, οι αποδόσεις κλίμακας είναι αύξουσες,
- αν $\mu = 1$, είναι σταθερές και
- αν $\mu < 1$, είναι φθίνουσες.

ΑΣΚΗΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

Δίνονται οι πιο κάτω συναρτήσεις παραγωγής:

$$Q_1 = aL^a K^{1-a} - bL^b K^{1-b}, \quad 0 < a, b < 1$$

$$Q_2 = \frac{aL^2 K(K+L)}{b(L^2 + K^2)}$$

Q η παραγόμενη ποσότητα,

L ο συντελεστής εργασίας,

K ο συντελεστής κεφάλαιο.

Να προσδιοριστεί, για καθεμιά από τις παραπάνω συναρτήσεις, η φύση των αποδόσεων κλίμακας.

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

Έστω ότι το κεφάλαιο (K) και η εργασία (L) αυξάνονται κατά το ίδιο ποσοστό λ.

Τότε οι συναρτήσεις παραγωγής γίνονται:

$$Q_1' = a(\lambda L)^a (\lambda K)^{1-a-b} (\lambda L)^b (\lambda K)^{1-b} = a\lambda^a L^a \lambda^{1-a} K^{1-a} - b \lambda^b L^b \lambda^{1-b} K^{1-b} = a\lambda L^a K^{1-a} - b \lambda L^b K^{1-b}$$

$$\rightarrow Q_1' = \lambda(aL^a K^{1-a} - bL^b K^{1-b}) = \lambda Q_1$$

$$Q_2' = \frac{a(\lambda L)^2 (\lambda K)(\lambda K + \lambda L)}{b((\lambda L)^2 + (\lambda K)^2)} = \frac{a\lambda^2 L^2 \lambda K \lambda (K+L)}{b \lambda^2 (L^2 + K^2)} = \frac{\lambda^4 (aL^2 K(K+L))}{b \lambda^2 (L^2 + K^2)}$$

$$\rightarrow Q_2' = \frac{\lambda^2 aL^2 K(K+L)}{b(L^2 + K^2)} = \lambda^2 Q_2$$

Άρα, οι αποδόσεις κλίμακας για την

*Q1 είναι σταθερές ($\mu=1$)
και αύξουσες για την Q2 ($\mu=2$).*

ΑΣΚΗΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

Να αποδειχθεί ότι για τη συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas η ελαστικότητα υποκατάστασης είναι ίση με τη μονάδα. Η ελαστικότητα υποκατάστασης δίνεται από τον τύπο:

$$\sigma = \frac{\frac{\partial(\frac{K}{L})}{\frac{K}{L}}}{\frac{d(\frac{\frac{\partial L}{\partial Q}}{\frac{\partial L}{\partial K}})}{\frac{\partial L}{\partial K}}}$$

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

Η συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas δίνεται από τη σχέση: $Q = AL^aK^b$

Υπολογίζω τους επιμέρους όρους:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial (AL^aK^b)}{\partial L} = AK^b \frac{\partial (L^a)}{\partial L} = AK^b a L^{a-1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\partial (AL^aK^b)}{\partial K} = AL^a \frac{\partial (K^b)}{\partial K} = AbK^{b-1}L^a$$

$$\frac{\partial Q}{\partial L} / \frac{\partial Q}{\partial K} = AK^b a L^{a-1} / AbK^{b-1} L^a = a/b * K/L$$

$$d\left(\frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}}\right) = d(a/b * K/L) = a/b d(K/L)$$

$$\sigma = \frac{\frac{\partial(K/L)}{K/L}}{d\left(\frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}}\right) / \frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}}}$$

$$\sigma = \frac{\frac{\partial(K/L)}{K/L}}{d\left(\frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}}\right) / \frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}}} = \frac{\frac{\partial(K/L)}{(K/L)}}{(\frac{a}{b}) * d(K/L) / (\frac{a}{b}) * (K/L)} = 1$$

ΑΣΚΗΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

Δείξτε ότι στην περίπτωση μιας συνάρτησης παραγωγής τύπου Cobb-Douglas ο επιχειρηματίας μεγιστοποιεί το κέρδος του σε ένα σύστημα τέλει ανταγωνισμού, όταν υπάρχουν φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας.

Η συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas είναι: $Q = AL^aK^b$

Το συνολικό κόστος TC δίνεται από τη σχέση: $TC = rK + wL$

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

Η συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas είναι: $Q = AL^a K^b$

Το συνολικό κόστος TC δίνεται από τη σχέση: $TC = rK + wL$

Ο λόγος του οριακού προϊόντος της εργασίας (MPL) προς το οριακό προϊόν του κεφαλαίου (MPK) είναι:

$$\frac{MPL}{MPK} = \frac{dQ}{dL} / \frac{dQ}{dK} = \frac{w}{r}$$

$$MPL = \frac{dQ}{dL} = \frac{d(AL^a K^b)}{dL} = AaL^{a-1} K^b$$

$$MPK = \frac{dQ}{dK} = \frac{d(AL^a K^b)}{dK} = AbL^a K^{b-1}$$

$$\frac{w}{r} = (AaL^{a-1} K^b) / (AbL^a K^{b-1})$$

$$\rightarrow \frac{w}{r} = \left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{K}{L}\right)$$

$$\rightarrow K = \left(\frac{w}{r}\right) \left(\frac{b}{a}\right) L$$

$$Q = AL^a K^b$$

$$Q = AL^a \left(\left(\frac{w}{r}\right) \left(\frac{b}{a}\right) L\right)^b = A \left(\left(\frac{w}{r}\right) \left(\frac{b}{a}\right)\right)^b L^{a+b}$$

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

$$TC = rK + wL$$

$$TC = \left(\frac{wb}{a}\right)L + wL = \left(\frac{a}{b} + 1\right)wL \rightarrow L = \frac{aTC}{(a+b)w}$$

$$Q = A\left(\left(\frac{w}{r}\right)\left(\frac{b}{a}\right)\right)^b L^{a+b}$$

$$Q = A\left(\left(\frac{w}{r}\right)\left(\frac{b}{a}\right)\right)^b \left(\frac{aTC}{(a+b)w}\right)^{a+b} \rightarrow Q = \frac{A}{(a+b)^{a+b}} \left(\frac{a}{w}\right)^a \left(\frac{b}{r}\right)^b TC^{a+b}$$

$$\rightarrow TC = (a+b) \frac{1}{A} \left(\frac{w}{a}\right)^a \left(\frac{r}{b}\right)^b Q^{1/a+b}$$

Θέτω: $B = (a+b) \frac{1}{A} \left(\frac{w}{a}\right)^a \left(\frac{r}{b}\right)^b$

οπότε: $TC = B Q^{1/a+b}$

Το οριακό κόστος θα είναι:

$$MC = \frac{dC}{dQ} = d(B Q^{1/a+b})/dQ = B * \frac{1}{a+b} Q^{1/a+b-1}$$

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

Θέτω: $B = (a+b) \frac{1}{A} \left(\frac{w}{a}\right)^a \left(\frac{r}{b}\right)^b$

οπότε: $TC = B Q^{1/a+b}$

Το οριακό κόστος θα είναι:

$$MC = \frac{dC}{dQ} = \frac{d(B \cdot Q^{1/a+b})}{dQ} = B \cdot \frac{1}{a+b} Q^{\frac{1}{a+b}-1}$$

Μια τελείως ανταγωνιστική επιχείρηση μεγιστοποιεί το ολικό της κέρδος, το οριακό κόστος ανέρχεται ($MC \nearrow$):

$$\frac{dMC}{dQ} > 0$$

$$\frac{dMC}{dQ} = \frac{d(B \cdot \frac{1}{a+b} Q^{\frac{1}{a+b}-1})}{dQ} = \frac{B}{a+b} \left(\frac{1}{a+b} - 1\right) Q^{\frac{1}{a+b}-2}$$

Για να ισχύει $\frac{dMC}{dQ} > 0$, θα πρέπει $(\frac{1}{a+b} - 1) > 0$, αφού τα υπόλοιπα μέλη της παραπάνω εξίσωσης είναι θετικά.

$$\left(\frac{1}{a+b} - 1\right) > 0 \rightarrow \frac{1}{a+b} > 1 \rightarrow a+b < 1$$

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

Γνωρίζουμε ότι αν $Q = f(K, L)$ μια συνάρτηση παραγωγής και $f(\lambda K, \lambda L) = \lambda^\mu f(K, L)$, τότε
αν $\mu > 1$, οι αποδόσεις κλίμακας είναι αύξουσες,
αν $\mu = 1$ είναι σταθερές και
αν $\mu < 1$, είναι φθίνουσες.

$$Q(\lambda K, \lambda L) = A(\lambda L)^a (\lambda K)^b = A \lambda^a \lambda^b L^a K^b = \lambda^{a+b} A L^a K^b = \lambda^{a+b} Q(K, L)$$

Συνεπώς, όταν $a + b < 1 \rightarrow$ **οι αποδόσεις κλίμακας είναι φθίνουσες.**

Άρα, αν η παραγωγή γίνεται σύμφωνα με τη συνάρτηση Cobb-Douglas, ο επιχειρηματίας **μεγιστοποιεί** το κέρδος του σ' ένα σύστημα τέλει ανταγωνισμού, όταν υπάρχουν **φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας.**

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

ΤΕΛΟΣ 5^{ΗΣ} ΕΝΟΤΗΤΑΣ