



ΠΑΝΤΕΙΟΝ
ΠΑΝΤΕΙΟΝ

SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES

ΠΟΣΟΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Γιώργος Λούντζης (PhD, MSc, MEng)

Εντεταλμένος Διδάσκων (ΕΣΠΑ)
2024 – 2025

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

1. ΜΙΚΡΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ
2. ΜΙΚΡΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΜΕ ΦΟΡΟΛΟΓΙΑ
3. ΜΙΚΡΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΣΕ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ ΜΕ ΔΥΟ ΤΟΜΕΙΣ
4. ΜΙΚΡΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΣΕ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ ΜΕ ΔΥΟ ΤΟΜΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΑΛΛΑΓΕΣ ΜΕ ΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Προσδιορισμός τιμής ισορροπίας P_e ώστε

$$Q^s = Q^d = Q^e$$

Q^s η ποσότητα που προσφέρεται σε τέλει ανταγωνισμό

Q^d η ζητούμενη ποσότητα

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Αν $Q^s = -\alpha + \beta P$ και $Q^d = \gamma - \delta P$

τότε

$$\left. \begin{array}{l} Q^s = -\alpha + \beta P \\ Q^d = \gamma - \delta P \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} Q^e = -\alpha + \beta P \\ Q^e = \gamma - \delta P \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} -\alpha = Q^e - \beta P \\ \gamma = Q^e + \delta P \end{array}$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Κανόνας του Grammer

$$-a = 1 \cdot Q^e - \beta \cdot P$$

$$\gamma = 1 \cdot Q^e + \delta \cdot P$$

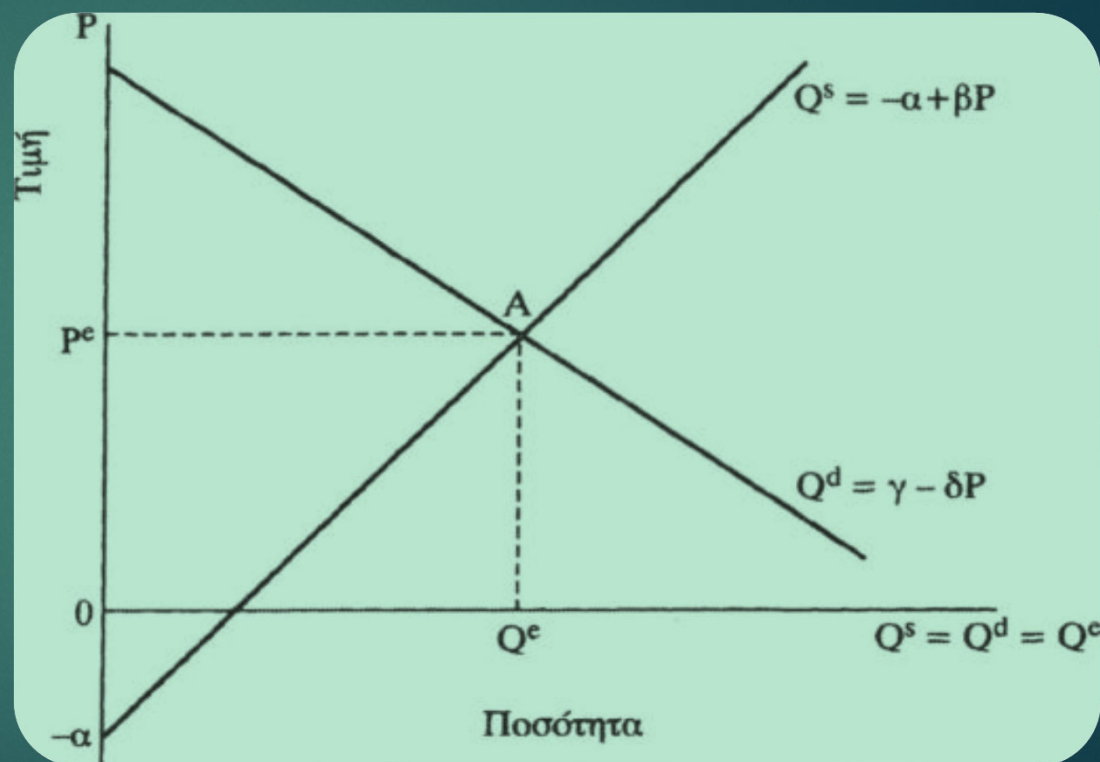
$$Q^e = \frac{\begin{vmatrix} -a & -\beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\beta \\ 1 & \delta \end{vmatrix}} = \frac{-\alpha\delta + \beta\gamma}{\delta + \beta}$$

$$P^e = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a \\ 1 & \gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\beta \\ 1 & \delta \end{vmatrix}} = \frac{\gamma + \alpha}{\delta + \beta}$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Διαγραμματικά

Σημείο Ισορροπίας
A (Q_e , P_e)



ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ –ΑΣΚΗΣΗ

Ένας παραγωγός πετρελαίου προτίθεται να προσφέρει στην αγορά ποσότητα Q^s σύμφωνα με την παρακάτω συνάρτηση $Q^s = -72 + 34P$.

Έχει επίσης εκτιμηθεί ότι η συνάρτηση ζήτησης στην αγορά είναι $Q^d = 400 - 2P$, όπου Q^d είναι η ζητούμενη ποσότητα σε επίπεδο τιμών P .

Ζητείται:

- α) Η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας στην αγορά,
- β) Εάν η συνάρτηση προσφοράς αλλάξει και γίνει $Q^s = -90 + 15P$, ποια θα είναι η νέα τιμή ισορροπίας;

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

α) Η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας στην αγορά

Για τον υπολογισμό της τιμής ισορροπίας πρέπει

$$Q^s = Q^d \rightarrow -72 + 34P = 400 - 2P \rightarrow 36P = 472$$

$$\rightarrow P = 13,11 \text{ (τιμή ισορροπίας)}$$

Οπότε,

$$Q^s = -72 + (34 * 13,11) \rightarrow Q^s = 373,77$$

$$Q^d = 400 - (2 * 13,11) = 400 - 26,22 \rightarrow Q^d = 373,77$$

Άρα, η ποσότητα ισορροπίας είναι $Q = 373,77$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

β) Εάν η συνάρτηση προσφοράς αλλάξει και γίνει $Q^s = -90 + 15P$, ποια θα είναι η νέα τιμή ισορροπίας;

Με την αλλαγή της συνάρτησης προσφοράς, θα έχω νέο σημείο ισορροπίας:

$$Q^s = Q^d$$

$$\text{Όπου } Q^s = -90 + 15P \text{ και } Q^d = 400 - 2P$$

$$Q^s = Q^d \rightarrow -90 + 15P = 400 - 2P \rightarrow 17P = 490$$

$$\rightarrow P = 28,82 \text{ (νέα τιμή ισορροπίας).}$$

$$\text{Οπότε } Q^s = -90 + (15 * 28,82) \rightarrow Q^s = 342,35$$

$$Q^d = 400 - 2 \cdot 28,82 \rightarrow Q^d = 342,35$$

Συνεπώς, η νέα ποσότητα ισορροπίας είναι $Q^d = 342,35$

...με φορολογία

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Η τιμή του αγαθού μετά τη φορολογία γίνεται

$$P = P - t$$

Άρα, οι συναρτήσεις της προσφοράς και της ζήτησης γίνονται:

$$Q^s = -\alpha + \beta(P - t) \rightarrow Q^s - \beta P = -\alpha - \beta t$$

$$Q^d = \gamma - \delta P \rightarrow Q^d + \delta P = \gamma$$

Για

$$Q^s = Q^d = Q^e$$

$$\left. \begin{array}{l} Q^e - \beta P = -\alpha - \beta t \\ Q^e + \delta P = \gamma \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{κανόνας} \\ \text{Cramer} \end{array}$$

$$Q^e = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha - \beta t & -\beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\beta \\ 1 & \delta \end{vmatrix}} = \frac{-\alpha\delta - t\beta\delta + \beta\gamma}{\delta + \beta}$$

$$P^e = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\alpha - \beta t \\ 1 & \gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\beta \\ 1 & \delta \end{vmatrix}} = \frac{\gamma + \alpha + t\beta}{\delta + \beta}$$

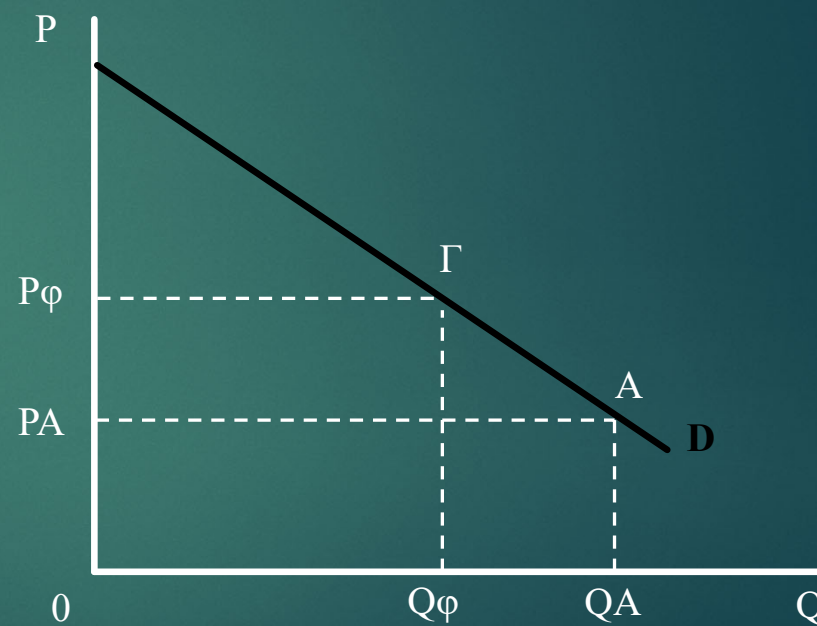
...με φορολογία

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Διαγραμματικά

Πριν τη φορολογία
Σημείο Α (Q_A, P_A)

Μετά τη φορολογία
Σημείο Γ (Q_ϕ, P_ϕ)



...με φορολογία

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΑΣΚΗΣΗ

Η συνάρτηση ζητούμενης ποσότητας ενός αγαθού X:

$$Q^d = 60 - 3P$$

Η συνάρτηση προσφερόμενης ποσότητας και τιμής:

$$Q^s = -16 + 2P$$

Ζητείται:

- α) Η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας. Να γίνει διαγραμματική παρουσίαση.
- β) Η επιβολή ενός φόρου 3 ευρώ ανά μονάδα προσφερόμενης ποσότητας, τι μεταβολές θα προκαλέσει πάνω στην τιμή και στην ποσότητα ισορροπίας; (Δείξτε τις μεταβολές και διαγραμματικά.)
- γ) Ποιον τελικά θα επιβαρύνει ο φόρος;

...με φορολογία

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

α) Να βρεθεί τιμή και η ποσότητα ισορροπίας.

Πρέπει $Q^e = Q^d = Q^s$

$$Q^d = Q^s \rightarrow 60 - 3P = -16 + 2P \rightarrow 76 = 5P \rightarrow P_e = 15,2 \text{ (τιμή ισορροπίας)}$$

$$\text{Συνεπώς, } Q^d = 60 - 3 \cdot 15,2 \rightarrow Q^d = 14,4$$

$$Q^s = -16 + 2 \cdot 15,2 = -16 + 30,4 \rightarrow Q^s = 14,4$$

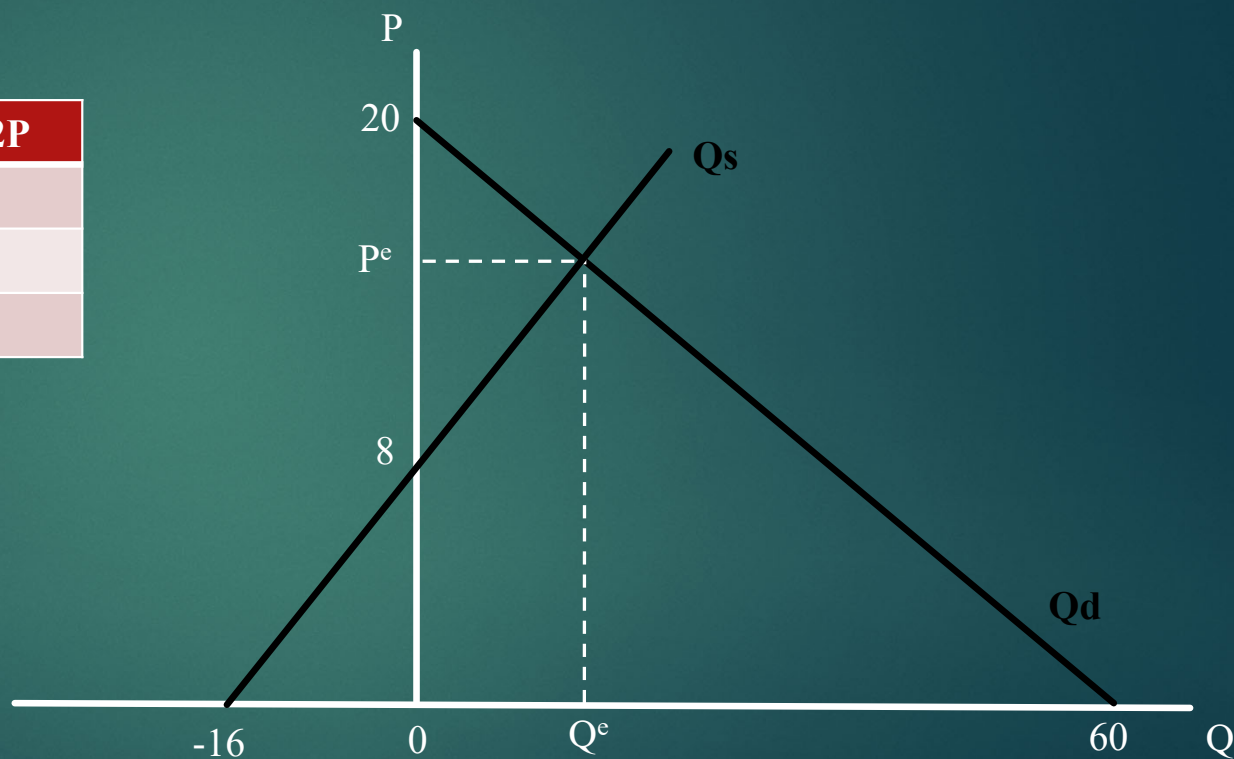
$$\text{Άρα η ποσότητα ισορροπίας } Q^e = 14,4$$

...με φορολογία

ΛΥΣΗ

P	$Q^d = 60 - 3P$	$Q^s = -16 + 2P$
0	60	-16
20	0	24
8	36	0

Σημείο ισορροπίας
 $(Q_e, P_e) = (14,4, 15,2)$



ΕΝΟΤΗΤΑ 2

...με φορολογία

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

β) Η επιβολή ενός φόρου 3 ευρώ ανά μονάδα προσφερόμενης ποσότητας, τι μεταβολές θα προκαλέσει πάνω στην τιμή και στην ποσότητα ισορροπίας;

Η συνάρτηση προσφοράς γίνεται: $Q_t^s = -16 + 2 \cdot (P - 3) \rightarrow Q_t^s = -22 + 2P$

γιατί $P^* = P - 3\text{€}$

Άρα το νέο σημείο ισορροπίας είναι $Q_t^s = Q^d = Q^{e'}$

$$60 - 3P = -22 + 2P \rightarrow 82 = 5P \rightarrow P^{e'} = 16,4 \text{ (η νέα τιμή ισορροπίας)}$$

$$\text{Συνεπώς, } Q^d = 60 - 3 \cdot 16,4 \rightarrow Q^d = 10,8$$

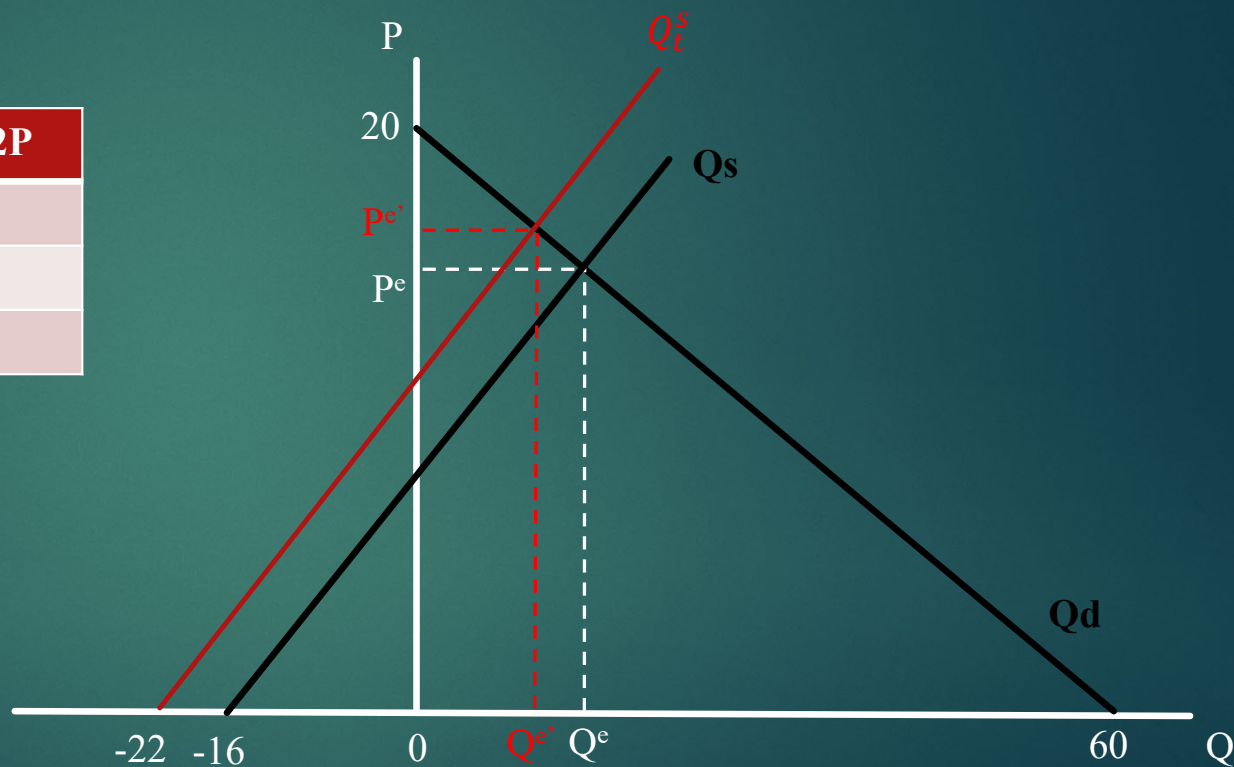
$$Q_t^s = -22 + 2 \cdot 16,4 \rightarrow Q_t^s = 10,8$$

...με φορολογία

ΛΥΣΗ

P	$Q^d = 60 - 3P$	$Q_t^s = -22 + 2P$
0	60	-22
20	0	18
11	27	0

Νέο Σημείο ισορροπίας
(Q_e', P_e') = (10, 8 , 16, 4)



ΕΝΟΤΗΤΑ 2

...με φορολογία

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

γ) Ποιον τελικά θα επιβαρύνει ο φόρος;

Για τον καταναλωτή, η $P = 15,2\text{€}$ σε $P_t = 16,4$ αυξήθηκε $P_t - P = 16,4 - 15,2 = 1,2\text{€}$

Άρα, το ποσοστό του φόρου που επιβαρύνεται ο καταναλωτής για τον φόρο των 3€:

$$\left(\frac{1,2}{3}\right) * 100 = 40\% \text{ του φόρου}$$

Για τον παραγωγό, η $P = 15,2\text{€}$ μειώθηκε σε $P_t = P - t = 16,4 - 3 = 13,4\text{€}$
δηλαδή κατά 1,8€ (η νέα τιμή ισορροπίας μείον φόρος)

Άρα, το ποσοστό του φόρου που επιβαρύνεται ο παραγωγός για τον φόρο των 3€:

$$\left(\frac{1,8}{3}\right) * 100 = 60\% \text{ του φόρου}$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Μακροοικονομικό υπόδειγμα ισορροπίας οικονομίας με δύο τομείς

Έστω ότι έχω δύο τομείς

Αγορά Προϊόντος

Αγορά Χρήματος

Συνολική κατανάλωση	$C = \alpha + \beta Y$	$(\alpha > 0, 0 < \beta < 1)$
Σύνολο ιδιωτικής επένδυσης	$I = \gamma + \delta r$	$(\gamma > 0, \delta < 0)$
Θ.Ι. της αγοράς προϊόντος	$Y = C + I$	

r : επιτόκιο
 Y : εισόδημα οικονομίας

Ζήτηση χρήματος	$M_D = \lambda Y + \sigma + \mu r$	$(\lambda, \sigma > 0, \mu < 0)$
Προσφορά χρήματος	$M_S = M_0$	
Θ.Ι. της αγοράς χρήματος	$M_D = M_S$	

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Μακροοικονομικό υπόδειγμα ισορροπίας οικονομίας με δύο τομείς

Συνθήκη ισορροπίας στην αγορά προϊόντος

$$Y = C + I$$

$$\begin{aligned} C &= \alpha + \beta Y \\ I &= \gamma + \delta r \end{aligned}$$

$$\rightarrow Y = \alpha + \beta Y + \gamma + \delta r$$

$$\rightarrow Y - \beta Y = \alpha + \gamma + \delta r$$

Συνθήκη ισορροπίας στην αγορά χρήματος

$$M_D = M_s$$

$$\begin{aligned} M_D &= \lambda Y + \sigma + \mu r \\ M_s &= M_0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow M_0 = \lambda Y + \sigma + \mu r$$

$$\rightarrow \mu r = M_0 - \lambda Y - \sigma$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Μακροοικονομικό υπόδειγμα ισορροπίας οικονομίας με δύο τομείς

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{Y - \beta Y = \alpha + \gamma + \delta r} \\ \mu r = M_0 - \lambda Y - \sigma \end{array} \right\} \begin{array}{l} Y - \beta Y - \delta r = \alpha + \gamma \\ \mu r = M_0 - \lambda Y - \sigma \end{array} \left\} \begin{array}{l} (1 - \beta)Y - \delta r = \alpha + \gamma \\ \lambda Y + \mu r = M_0 - \sigma \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{κανόνας} \\ \text{Cramer} \end{array}$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha + \gamma & -\delta \\ M_0 - \sigma & \mu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - \beta & -\delta \\ \lambda & \mu \end{vmatrix}} = \frac{(\alpha + \gamma)\mu - (-\delta)(M_0 - \sigma)}{\mu(1 - \beta) - (-\delta)\lambda}$$

$$r = \frac{\begin{vmatrix} 1 - \beta & \alpha + \gamma \\ \lambda & M_0 - \sigma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - \beta & -\delta \\ \lambda & \mu \end{vmatrix}} = \frac{(1 - \beta)(M_0 - \sigma) - \lambda(\alpha + \gamma)}{\mu(1 - \beta) - (-\delta)\lambda}$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Μακροοικονομικό υπόδειγμα ισορροπίας οικονομίας με δύο τομείς

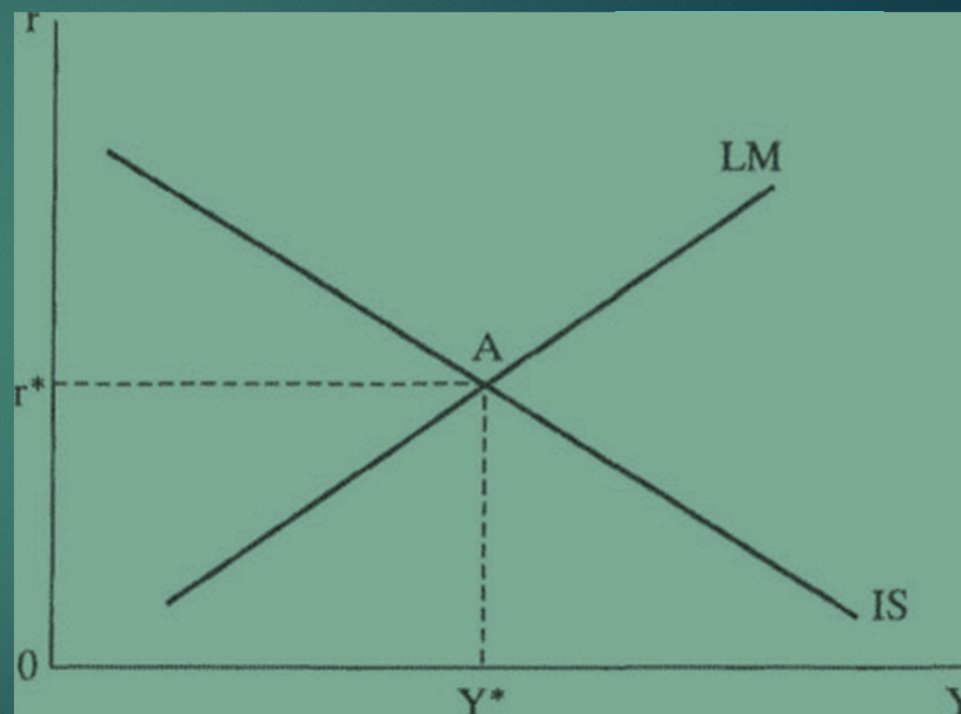
Διαγραμματικά

Συνθήκη ισορροπίας αγοράς προϊόντος

$$Y - \beta Y = \alpha + \gamma + \delta r \quad (IS)$$

Συνθήκη ισορροπίας αγοράς χρήματος

$$\mu r = M_0 - \lambda Y - \sigma \quad (LM)$$



ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Μακροοικονομικό υπόδειγμα ισορροπίας οικονομίας με δύο τομείς... με συναλλαγές με το εξωτερικό

Συνθήκη ισορροπίας στην αγορά προϊόντος

$$X = X_0 \quad \text{εξαγωγές}$$

$$M = A + mY \quad \text{εισαγωγές}$$

$$Y = C + I + X - M$$

$$\rightarrow Y = \alpha + \beta Y + \gamma + \delta r + X_0 - A - mY$$

$$\rightarrow Y - \beta Y + mY - \delta r = \alpha + \gamma + X_0 - A$$

$$\rightarrow (1 - \beta + m)Y - \delta r = \alpha + \gamma + X_0 - A$$

$$C = \alpha + \beta Y$$

$$I = \gamma + \delta r$$

$$M = A + mY$$

Συνθήκη ισορροπίας στην αγορά χρήματος (όπως πριν)

$$\mu r = M_0 - \lambda Y - \sigma$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Μακροοικονομικό υπόδειγμα ισορροπίας οικονομίας με δύο τομείς... με συναλλαγές με το εξωτερικό

$$\left. \begin{array}{l} (1-\beta+m)Y-\delta r = \alpha+\gamma+X_0-A \\ \mu r = M_0-\lambda Y-\sigma \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1-\beta+m)Y-\delta r = \alpha+\gamma+X_0-A \\ \lambda Y+\mu r = M_0-\sigma \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{κανόνας} \\ \text{Cramer} \end{array}$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha+\gamma+X_0-A & -\delta \\ M_0-\sigma & \mu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-\beta+m & -\delta \\ \lambda & \mu \end{vmatrix}} = \frac{(\alpha+\gamma+X_0-A)\mu - (-\delta)(M_0-\sigma)}{\mu(1-\beta+m) - (-\delta)\lambda}$$

$$r = \frac{\begin{vmatrix} 1-\beta+m & \alpha+\gamma+X_0-A \\ \lambda & M_0-\sigma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-\beta+m & -\delta \\ \lambda & \mu \end{vmatrix}} = \frac{(1-\beta+m)(M_0-\sigma) - \lambda(\alpha+\gamma+X_0-A)}{\mu(1-\beta) - (-\delta)\lambda}$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Μακροοικονομικό υπόδειγμα ισορροπίας οικονομίας με δύο τομείς... με συναλλαγές με το εξωτερικό

Διαγραμματικά

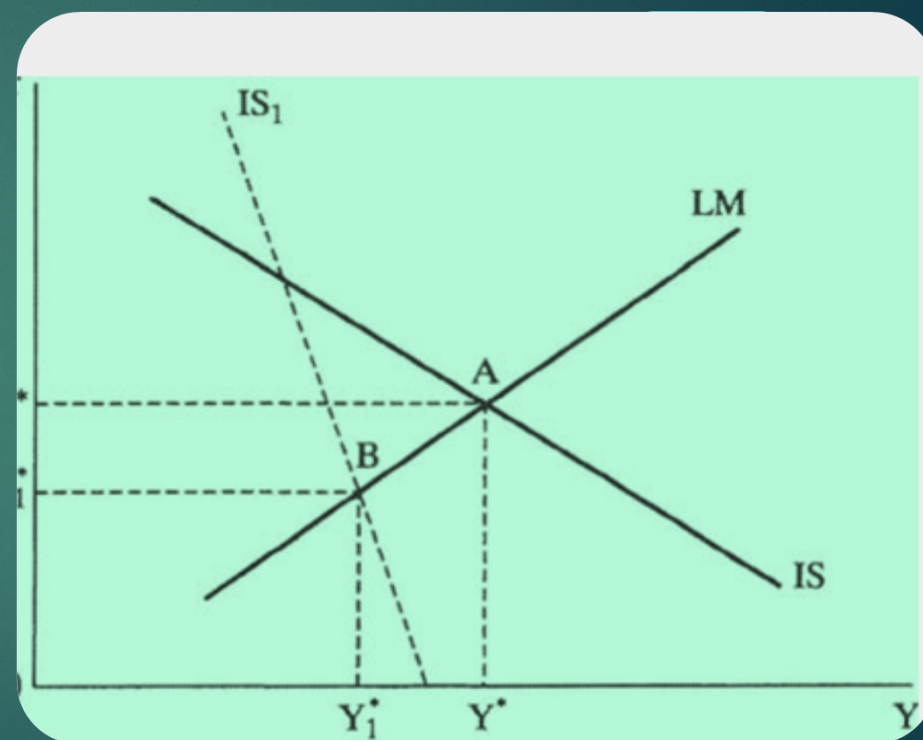
Συνθήκη ισορροπίας αγοράς προϊόντος

$$Y - \beta Y = \alpha + \gamma + \delta r \quad (IS)$$

$$Y - \beta Y + mY - \delta r = \alpha + \gamma + X_0 - A \quad (IS1)^*$$

Συνθήκη ισορροπίας αγοράς χρήματος

$$\mu r = M_0 - \lambda Y - \sigma \quad (LM)$$



*συναλλαγές με το εξωτερικό

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Πρότυπο αγοράς δύο προϊόντων X και Ψ

$$\left. \begin{aligned} Q_{dx} &= \alpha + \beta P_x + \gamma P_\psi \\ Q_{d\psi} &= \delta + \varepsilon P_x + \zeta P_\psi \end{aligned} \right\}$$

Συναρτήσεις ζήτησης των δύο προϊόντων

$$\left. \begin{aligned} Q_{sx} &= \eta + \theta P_x + \iota P_\psi \\ Q_{s\psi} &= \kappa + \lambda P_x + \mu P_\psi \end{aligned} \right\}$$

Συναρτήσεις προσφοράς των δύο προϊόντων

$$\left. \begin{aligned} Q_{dx} &= Q_{sx} \\ Q_{d\psi} &= Q_{s\psi} \end{aligned} \right\}$$

Συνθήκες Ισορροπίας με δύο προϊόντα. P_x και P_ψ είναι οι τιμές των δύο αγαθών και τα $\alpha - \mu$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Πρότυπο αγοράς δύο προϊόντων X και Ψ

Για να βρούμε την τιμή P και την ποσότητα Q ισορροπίας για δύο αγαθά, θα πρέπει να λυθεί το σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

$$Q_{dx} = \alpha + \beta P_x + \gamma P_\psi$$

$$Q_{d\psi} = \delta + \varepsilon P_x + \zeta P_\psi$$

$$Q_{sx} = \eta + \theta P_x + \iota P_\psi$$

$$Q_{s\psi} = \kappa + \lambda P_x + \mu P_\psi$$

$$Q_{dx} = Q_{sx}$$

$$Q_{d\psi} = Q_{s\psi}$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Πρότυπο αγοράς δύο προϊόντων X και Ψ

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \left\| \begin{array}{c} Qdx \\ Qd\psi \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \alpha \\ \delta \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{c} \beta \quad \gamma \\ \varepsilon \quad \zeta \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} Px \\ P\psi \end{array} \right\| \\
 \left\| \begin{array}{c} Qsx \\ Qs\psi \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \eta \\ \kappa \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{c} \theta \quad \iota \\ \lambda \quad \mu \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} Px \\ P\psi \end{array} \right\|
 \end{array} \right. \quad \left\| \begin{array}{c} Qdx \\ Qd\psi \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} Qsx \\ Qs\psi \end{array} \right\|
 \end{array}
 \Rightarrow \left\| \begin{array}{c} \alpha \\ \delta \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{c} \beta \quad \gamma \\ \varepsilon \quad \zeta \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} Px \\ P\psi \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \eta \\ \kappa \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{c} \theta \quad \iota \\ \lambda \quad \mu \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} Px \\ P\psi \end{array} \right\|$$

$$\Rightarrow \left\| \begin{array}{c} \beta \quad \gamma \\ \varepsilon \quad \zeta \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} Px \\ P\psi \end{array} \right\| - \left\| \begin{array}{c} \theta \quad \iota \\ \lambda \quad \mu \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} Px \\ P\psi \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \eta \\ \kappa \end{array} \right\| - \left\| \begin{array}{c} \alpha \\ \delta \end{array} \right\|$$

$$\Rightarrow \left\{ \left\| \begin{array}{c} \beta \quad \gamma \\ \varepsilon \quad \zeta \end{array} \right\| - \left\| \begin{array}{c} \theta \quad \iota \\ \lambda \quad \mu \end{array} \right\| \right\} \left\| \begin{array}{c} Px \\ P\psi \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \eta - \alpha \\ \kappa - \delta \end{array} \right\|$$



$$\left\| \begin{array}{c} \beta - \theta \quad \gamma - \iota \\ \varepsilon - \lambda \quad \zeta - \mu \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} Px \\ P\psi \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \eta - \alpha \\ \kappa - \delta \end{array} \right\|$$

$$(A \circ P = B)$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Πρότυπο αγοράς δύο προϊόντων Χ και Ψ

κανόνας Cramer

$$P_X = \frac{\begin{vmatrix} \eta - \alpha & \gamma - \iota \\ \kappa - \delta & \zeta - \mu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta - \theta & \gamma - \iota \\ \varepsilon - \lambda & \zeta - \mu \end{vmatrix}} = \frac{(\eta - \alpha)(\zeta - \mu) - (\gamma - \iota)(\kappa - \delta)}{(\beta - \theta)(\zeta - \mu) - (\gamma - \iota)(\varepsilon - \lambda)}$$

$$P_\Psi = \frac{\begin{vmatrix} \beta - \theta & \eta - \alpha \\ \varepsilon - \lambda & \kappa - \delta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta - \theta & \gamma - \iota \\ \varepsilon - \lambda & \zeta - \mu \end{vmatrix}} = \frac{(\beta - \theta)(\kappa - \delta) - (\eta - \alpha)(\varepsilon - \lambda)}{(\beta - \theta)(\zeta - \mu) - (\gamma - \iota)(\varepsilon - \lambda)}$$

Αντικαθιστώντας στις

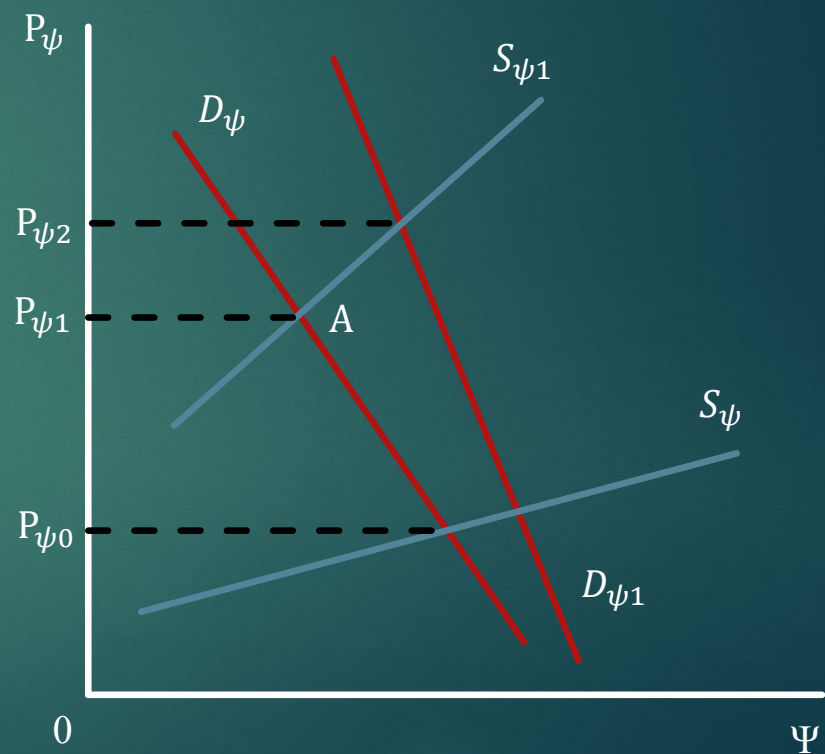
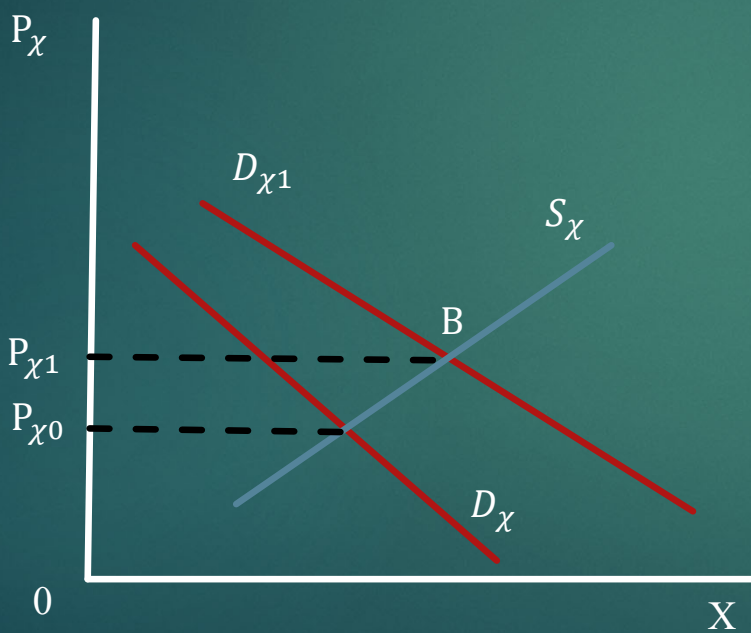
$$\begin{aligned}
 Q_{dx} &= \alpha + \beta P_x + \gamma P_\psi \\
 Q_{sx} &= \eta + \theta P_x + \iota P_\psi
 \end{aligned}$$

βρίσκουμε και τις ποσότητες ισορροπίας.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Πρότυπο αγοράς δύο προϊόντων X και Ψ

Διαγραμματικά



ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Πρότυπο αγοράς δύο προϊόντων X και Ψ

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω οι συναρτήσεις ζήτησης/προσφοράς για τα αλληλοεξαρτώμενα προϊόντα f και z:

$$\begin{aligned} Q_{df} &= 8 - 2P_f + P_z & Q_{sf} &= -5 + 3P_f \\ Q_{dz} &= 16 + P_f - P_z & Q_{sz} &= -1 + 2P_z \end{aligned}$$

Να εκτιμηθούν οι τιμές και οι ποσότητες ισορροπίας του προτύπου αγοράς για τα προϊόντα (f) και (z).

Πρότυπο αγοράς δύο προϊόντων Χ και Ψ

ΛΥΣΗ

Για να υπάρχει ισορροπία, πρέπει:

$$Q_{df} = Q_{sf}$$

$$Q_{dz} = Q_{sz}$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{df} = Q_{sf} &\rightarrow 8 - 2P_f + P_z = -5 + 3P_f \rightarrow 5P_f - P_z = 13 \\ Q_{dz} = Q_{sz} &\rightarrow 16 + P_f - P_z = -1 + 2P_z \rightarrow -P_f + 3P_z = 17 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{κανόνας} \\ \text{Cramer} \end{array} \rightarrow$$

$$P_f = \frac{\begin{vmatrix} 13 & -1 \\ 17 & +3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & +3 \end{vmatrix}} = \frac{(13*3) - (-1*17)}{(5*3) - ((-1)*(-1))} = \frac{56}{14}$$

$$\rightarrow P_f = 4$$

$$P_z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & +13 \\ -1 & +17 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & +3 \end{vmatrix}} = \frac{(5*17) - (13*(-1))}{(5*3) - ((-1)*(-1))} = \frac{98}{14}$$

$$\rightarrow P_z = 7$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Πρότυπο αγοράς δύο προϊόντων X και Ψ

ΛΥΣΗ

$$\rightarrow P_f = 4$$

$$\rightarrow P_z = 7$$

Οπότε οι ποσότητες ισορροπίας:

$$Q_{df} = 8 - 2P_f + P_z = 8 - 2 \cdot 4 + 7$$

$$\rightarrow Q_{df} = 7$$

$$Q_{dz} = 16 + P_f - P_z = 16 + 4 - 7$$

$$\rightarrow Q_{dz} = 13$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΑΣΚΗΣΗ

Η ζήτηση στην αγορά για ένα προϊόν δίδεται από τη συνάρτηση: $Q^d = 36 - (\frac{1}{3})P$

Η συνάρτηση προσφοράς είναι: $Q^s + 9 - 0,5P = 0$

Ζητείται:

- α) Να εκτιμηθεί η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας στην αγορά.
- β) Να εκτιμηθούν οι ελαστικότητες ζήτησης και προσφοράς στην τιμή ισορροπίας.
- γ) Αν η κυβέρνηση επιβάλλει φόρο t ανά μονάδα προσφερόμενης ποσότητας και αν οι παραγωγοί προσαρμόσουν τη συνάρτηση προσφοράς για να συμπεριλάβουν το φόρο, τότε:
 - i) Να εκτιμηθούν οι ελαστικότητες ζήτησης και προσφοράς στη νέα τιμή ισορροπίας, η οποία συμπεριλαμβάνει τους φόρους, όταν $t = 10$ ευρώ. Να γίνει διαγραμματική παρουσίαση,
 - ii) Ποιος πληρώνει το φόρο;

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

α) Να εκτιμηθεί η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας στην αγορά.

Πρέπει

$$Q^e = Q^d = Q^s$$

$$Q^s + 9 - 0,5P = 0 \rightarrow Q^s = -9 + 0,5P \quad \xrightarrow{Q^d = Q^s} \quad 36 - \left(\frac{1}{3}\right)P = -9 + 0,5P \rightarrow 45 = 0,83P$$
$$\rightarrow P_e = 54 \quad \text{ΤΙΜΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ}$$

Άρα,

$$Q^d = 36 - \left(\frac{1}{3}\right) * 54 \rightarrow Q^d = 18$$

$$Q^s = -9 + 0,5 * 54 \rightarrow Q^s = 18$$

Συνεπώς, $Q^e = 18$ ΠΟΣΟΤΗΤΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

β) Να εκτιμηθούν οι ελαστικότητες ζήτησης και προσφοράς στην τιμή ισορροπίας.

Ελαστικότητα ζήτησης

$$\begin{array}{ll} \text{Ξέρουμε ότι} & E_D = \frac{\frac{\Delta Q^d}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}} \\ \text{Από } Q^d = 36 - \left(\frac{1}{3}\right)P & \text{βρίσκω } \frac{\Delta Q^d}{\Delta P} = -\frac{1}{3} \end{array} \quad \rightarrow \quad E_D = \frac{\Delta Q^d}{\Delta P} * \frac{P}{Q^d} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Ξέρουμε ότι} \\ \text{Από } Q^d = 36 - \left(\frac{1}{3}\right)P \end{array}} \right\} \quad E_D = -\frac{1}{3} * \frac{P}{Q^d}$$

$$\begin{array}{l} \text{Επομένως, για } P = 54 \text{ και } Q = 18 \\ \text{(η τιμή και ποσότητα ισορροπίας)} \end{array} \quad \rightarrow \quad E_D = -\frac{1}{3} * \frac{P}{Q^d} = -\frac{1}{3} * \frac{54}{18} \quad \rightarrow \quad E_D = -1$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

Ελαστικότητα προσφοράς

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Ξέρω ότι} & E_s = \frac{\frac{\Delta Q^s}{Q^s}}{\frac{\Delta P}{P}} \\ \text{Από} & Q^s = -9 + 0,5P \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow E_s = \frac{\Delta Q^s}{\Delta P} * \frac{P}{Q^s} \\ \text{βρίσκω} \quad \frac{\Delta Q^s}{\Delta P} = 0,5 \end{array} \quad E_s = 0,5 * \frac{P}{Q^s}$$

$$\begin{array}{l} \text{Επομένως, για } P = 54 \text{ και } Q = 18 \\ \text{(η τιμή και ποσότητα ισορροπίας)} \end{array} \Rightarrow E_s = 0,5 * \frac{P}{Q^s} = 0,5 * \frac{54}{18} \Rightarrow E_s = 1,5$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

β) Αν η κυβέρνηση επιβάλλει φόρο t ανά μονάδα προσφερόμενης ποσότητας και αν οι παραγωγοί προσαρμόσουν τη συνάρτηση προσφοράς για να συμπεριλάβουν το φόρο, τότε:
i) Να εκτιμηθούν οι ελαστικότητες ζήτησης και προσφοράς στη νέα τιμή ισορροπίας, η οποία συμπεριλαμβάνει τους φόρους, όταν $t = 10$ ευρώ.

$$\begin{aligned} \text{Η νέα συνάρτηση προσφοράς: } Q_t^s &= -9 + 0,5 * (P - t) \rightarrow Q_t^s = -9 + 0,5 * (P - 10) \\ \rightarrow Q_t^s &= -9 + 0,5P - 5 \rightarrow Q_t^s = -14 + 0,5P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Νέο σημείο ισορροπίας: } Q^d = Q_t^s &\rightarrow 36 - \left(\frac{1}{3}\right)P = -14 + 0,5P \rightarrow 50 = 0,83P \\ &\rightarrow P^e = 60 \quad \text{ΝΕΑ ΤΙΜΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Συνεπώς, η νέα ποσότητα ισορροπίας: } Q^d &= 36 - \left(\frac{1}{3}\right) * 60 \rightarrow Q^d = 16 \\ Q_t^s &= -14 + 0,5 * 60 \rightarrow Q_t^s = 16 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα, } Q^e = 16 \quad \text{ΝΕΑ ΠΟΣΟΤΗΤΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ}$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

Ελαστικότητα Ζήτησης

$$\begin{array}{ll} \text{Ξέρουμε ότι} & E_D = \frac{\frac{\Delta Q^d}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}} \\ \text{Από} & Q^d = 36 - \left(\frac{1}{3}\right)P \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \\ \text{βρίσκω} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} E_D = \frac{\Delta Q^d}{\Delta P} * \frac{P}{Q^d} \\ \frac{\Delta Q^d}{\Delta P} = -\frac{1}{3} \end{array} \right\}$$

$$E_D = -\frac{1}{3} * \frac{P}{Q^d}$$

Επομένως, για $P = 60$ και $Q = 16$
(η τιμή και ποσότητα ισορροπίας)

$$\Rightarrow E_D = -\frac{1}{3} * \frac{P}{Q^d} = -\frac{1}{3} * \frac{60}{16} \Rightarrow E_D = -1,25$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

Ελαστικότητα προσφοράς

$$\begin{array}{lcl}
 \text{Ξέρω ότι} & E_s = \frac{\frac{\Delta Q_t^s}{Q_t^s}}{\frac{\Delta P}{P}} & \rightarrow E_s = \frac{\Delta Q_t^s}{\Delta P} * \frac{P}{Q_t^s} \\
 \text{Από } Q_t^s = -14 + 0,5P & \text{βρίσκω} & \frac{\Delta Q_t^s}{\Delta P} = 0,5
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{lcl} \text{Ξέρω ότι} & E_s = \frac{\frac{\Delta Q_t^s}{Q_t^s}}{\frac{\Delta P}{P}} & \rightarrow E_s = \frac{\Delta Q_t^s}{\Delta P} * \frac{P}{Q_t^s} \right\} E_s = 0,5 * \frac{P}{Q_t^s}$$

Η τιμή για τον παραγωγό που προσφέρει το προϊόν δεν είναι η τιμή ισορροπίας που πληρώνει ο καταναλωτής ανά μονάδα προϊόντος, αλλά είναι η τιμή αυτή μείον το φόρο $t = 10$ ανά ευρώ μονάδα προσφερόμενης ποσότητας, δηλαδή είναι:

$$Pe' - t = 60 - 10 = 50 = P_t$$

$$\text{Επομένως, για } P = 50 \text{ και } Q = 16 \text{ (η τιμή και ποσότητα ισορροπίας)} \rightarrow E_s = 0,5 * \frac{P}{Q^s_t} = 0,5 * \frac{50}{16} \rightarrow E_s = 1,5625$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

ii) Ποιος πληρώνει το φόρο;

Για τον καταναλωτή:

Από $P = 54$ αυξήθηκε σε $P_t = 60 \rightarrow P_t - P = 60 - 54 = 6$ ευρώ

Επειδή το ύψος του συνολικού ανά μονάδα προσφερόμενης ποσότητας φόρου είναι 10 ευρώ, τότε $(6/10) * 100 = 60\%$ του φόρου.

Για τον παραγωγό:

Από $P = 54$ μειώθηκαν σε $P_t = (P - t) = P - 10 = 60 - 10 = 50 \rightarrow P - P_t = 4$ ευρώ

Επειδή το ύψος του συνολικού ανά μονάδα προσφερόμενης ποσότητας φόρου είναι 10 ευρώ, τότε $(4/10) * 100 = 40\%$ του φόρου.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Διαγραμματικά

Καμπύλη ζήτησης Q_d

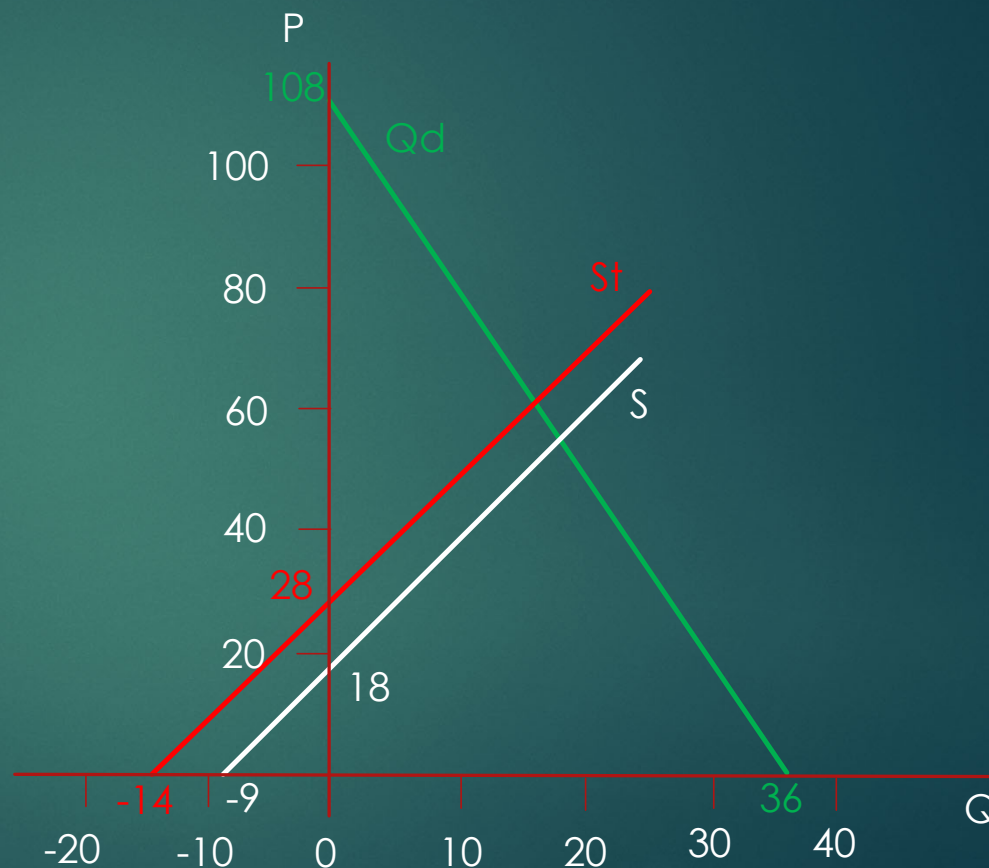
Τιμή P	$Q_d = 36 - (1/3)P$
0	36
108	0

Καμπύλη προσφοράς S (ΠΡΟ ΦΟΡΟΥ)

Τιμή P	$S = -9 + 0.5P$
0	-9
18	0

Καμπύλη προσφοράς S_t (ΜΕ ΦΟΡΟ)

Τιμή P	$S_t = -14 + 0.5P$
0	-14
28	0



ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται το πιο κάτω υπόδειγμα ισορροπίας στην αγορά ενός προϊόντος:

$$Q^s = -2 + 2P$$

$$Q^d = 10 - P$$

Ζητούνται:

- α) Η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας.
- β) Ο αντίκτυπος της επιβολής φόρου 2 ευρώ ανά μονάδα προσφερόμενης ποσότητας, το συνολικό ποσό του φόρου και η πραγματική τιμή για τους πωλητές.
- γ) Ο αντίκτυπος στο σημείο ισορροπίας μετά από μια επιδότηση του κράτους κάθε προσφερόμενης ποσότητας με 3 ευρώ. Να γίνει διαγραμματική παρουσίαση.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

α) Η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας.

$$Q^s = -2 + 2P$$

$$Q^d = 10 - P$$

$$Q^s = Q^d$$

$$\rightarrow -2 + 2P = 10 - P$$

$$\rightarrow -12 = -3P$$

$$\rightarrow P_e = 4 \quad (\text{τιμή ισορροπίας})$$

$$Q^s = -2 + 2P$$

$$Q^d = 10 - P$$

$$P=4$$

$$Q^s = -2 + 2 \cdot 4 = -2 + 8 = 6$$

$$Q^d = 10 - P = 10 - 4 = 6$$

Άρα, $Q_e = 6$ (ποσότητα ισορροπίας)

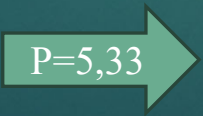
ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

β) Ο αντίκτυπος της επιβολής φόρου 2 ευρώ ανά μονάδα προσφερόμενης ποσότητας, το συνολικό ποσό του φόρου και η πραγματική τιμή για τους πωλητές.

Η νέα συνάρτηση προσφοράς είναι $Q_t^s = -2 + 2(P-t) = -2 + 2(P-2)$
 $\rightarrow Q_t^s = -2 + 2P - 4$
 $\rightarrow Q_t^s = -6 + 2P$

Βρίσκω τα Q_e' και P_e' $Q_t^s = Q^d \rightarrow -6 + 2P = 10 - P$
 $\rightarrow -16 = -3P$
 $\rightarrow P_e' = \frac{16}{3} = 5,33$ (νέα τιμή ισορροπίας)

$Q_t^s = -6 + 2P$
 $Q^d = 10 - P$  $P=5,33$ $Q_t^s = -6 + 2 \cdot 5,33 = -6 + 10,66 = 4,67$
 $Q^d = 10 - P = 10 - 5,33 = 4,67$ Άρα, $Q_e' = 4,67$ (νέα ποσότητα ισορροπίας)

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

β) Ο αντίκτυπος της επιβολής φόρου 2 ευρώ ανά μονάδα προσφερόμενης ποσότητας, το συνολικό ποσό του φόρου και η πραγματική τιμή για τους πωλητές.

Ο αντίκτυπος της επιβολής φόρου 2 ευρώ ανά μονάδα προσφερόμενης ποσότητας είναι:

$$\uparrow P_e \quad \rightarrow \quad \downarrow Q_e$$

Το συνολικό ποσό φόρου είναι $T = tQ = 2 * 4,67 = 9,34$

Η πραγματική τιμή για τους πωλητές είναι:

$$P - t = P_t = 5,33 - 2 = 3,33 \text{ ευρώ.}$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

γ) Ο αντίκτυπος στο σημείο ισορροπίας μετά από μια επιδότηση του κράτους κάθε προσφερόμενης ποσότητας με 3 ευρώ. Να γίνει διαγραμματική παρουσίαση.

Η νέα συνάρτηση προσφοράς είναι

$$Q_E^S = -2 + 2(P+E) = -2 + 2(P+3)$$

$$\rightarrow Q_E^S = -2 + 2P + 6$$

$$\rightarrow Q_E^S = 4 + 2P$$

Βρίσκω τα Q_e'' και P_e''

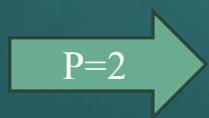
$$Q_E^S = Q^D \rightarrow 4 + 2P = 10 - P$$

$$\rightarrow -6 = -3P$$

$$\rightarrow P_e'' = 2 \quad (\text{νέα τιμή ισορροπίας μετά την επιδότηση})$$

$$Q_E^S = -6 + 2P$$

$$Q^D = 10 - P$$



$$Q_E^S = 4 + 2 \cdot 2 = 4 + 4 = 8$$

$$Q^D = 10 - P = 10 - 2 = 8$$

$$\text{Άρα, } Q_e'' = 8 \quad (\text{νέα ποσότητα ισορροπίας})$$

Ο αντίκτυπος της επιδότησης των 3 ευρώ: $\downarrow P_e'' \rightarrow \uparrow Q_e''$

ΛΥΣΗ

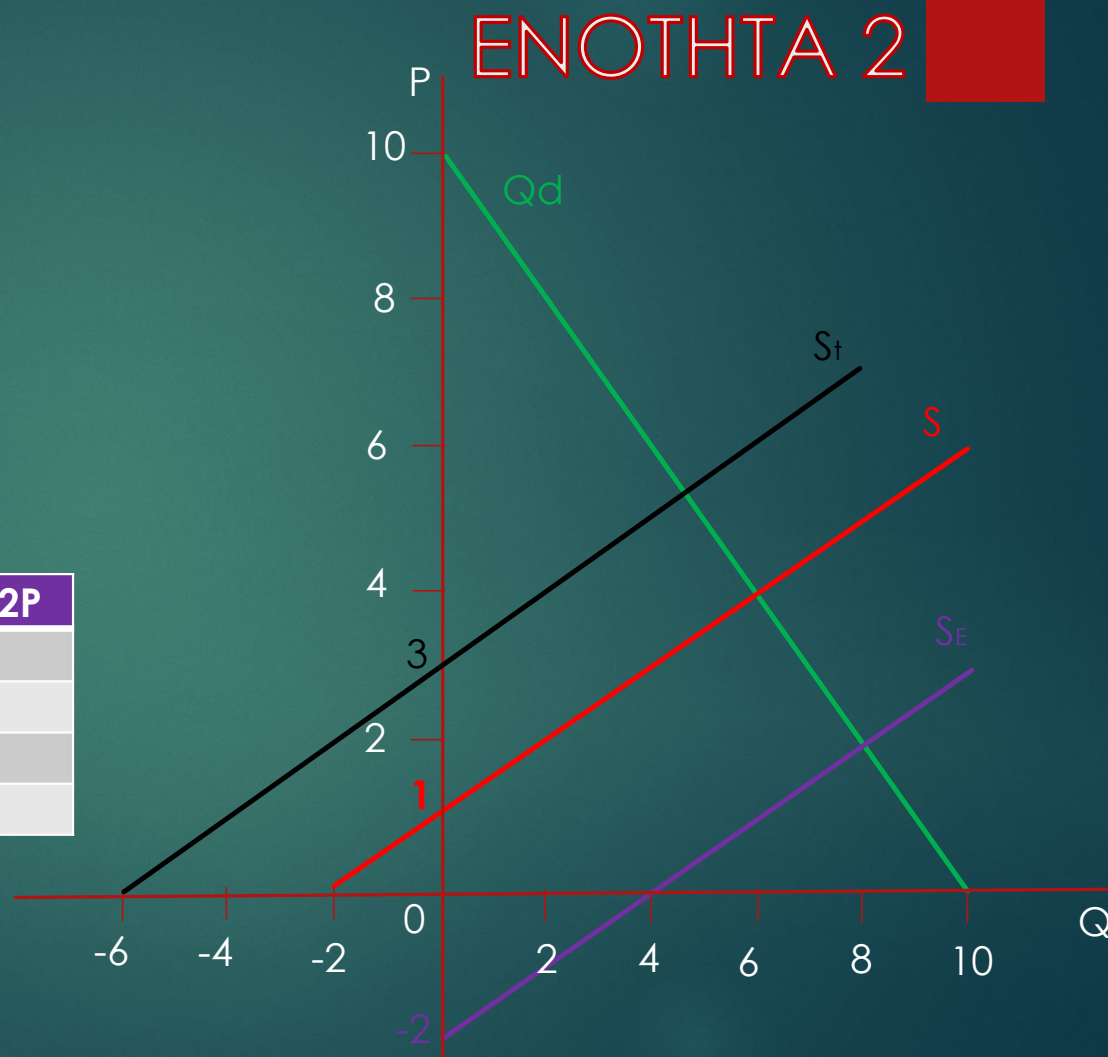
Διαγραμματικά

Καμπύλη ζήτησης Q_d

Τιμή P	$Q_d=10-P$
0	10
10	0

Καμπύλες προσφοράς S , S_t , S_E

Τιμή P	$S=-2+2P$	$S_t=-6+2P$	$S_E=4+2P$
0	-2	-6	4
1	0	-10	0
3	4	0	10
18	34	30	40



ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΑΣΚΗΣΗ

Η αγοραία καμπύλη ζήτησης για ένα προϊόν είναι:

$$Q^d = 500 - 5P$$

Γνωρίζουμε ότι το προϊόν παράγεται από 10 ομοειδείς επιχειρήσεις, οι οποίες λειτουργούν κάτω από συνθήκες τέλει ανταγωνισμού και η καμπύλη του οριακού κόστους (MC) για κάθε επιχείρηση είναι της μορφής:

$$MC = 5 + 0.6Q$$

Να προσδιοριστεί η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας. Να γίνει διαγραμματική παρουσίαση.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

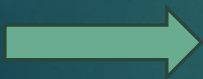
ΛΥΣΗ

Τέλειος ανταγωνισμός για μία επιχείρηση σημαίνει:

$$MC = MR = P$$

Η καμπύλη MC δείχνει εκτός από το οριακό κόστος παραγωγής στα διάφορα επίπεδα παραγωγής, αλλά και την παραγόμενη από την επιχείρηση ποσότητα (Q) για κάθε τιμή (P) υπό συνθήκες ισορροπίας. Η $Q = f(P)$ είναι η καμπύλη προσφοράς:

$$MC = P \rightarrow P = 5 + 0.6Q_S \rightarrow P - 5 = 0.6Q_S \rightarrow Q_S = -\frac{5}{0,6} + \frac{1}{0,6} P$$



$$Q^s_{ΕΠΙΧ} = -8,33 + 1,67P$$

(συνάρτηση προσφοράς της επιχείρησης)

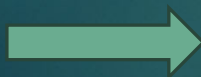
ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

Η καμπύλη προσφοράς του κλάδου είναι πανομοιότυπο προς το σχήμα της καμπύλης προσφοράς της επιχείρησης γιατί το προϊόν παράγεται από ομοειδείς επιχειρήσεις, οπότε:

$$Q^S_{\kappa\lambda} = Q^S_{\text{ΕΠΙΧ}} * 10$$

$$\rightarrow Q^S_{\kappa\lambda} = (-8,33 + 1,67P) * 10$$



$$Q^s_{\kappa\lambda} = -83,3 + 16,67P$$

(συνάρτηση προσφοράς του κλάδου)

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

Ισορροπία στον κλάδο

$$Q^S_{\kappa\lambda} = Q^d$$

$$-83,33 + 16,67P = 500 - 5P \rightarrow 21,67P = 583,33$$

$$\rightarrow P_e = 26,92 \quad (\text{τιμή ισορροπίας})$$

Οπότε,

$$Q^d = 500 - 5P = 500 - 5 \cdot 26,92 \rightarrow Q = 365,4$$

$$Q^S_{\kappa\lambda} = -83,33 + 16,67 \cdot 26,92 \rightarrow Q^S_{\kappa\lambda} = 365,4$$

$$\rightarrow Q_e = 365,4$$

(ποσότητα ισορροπίας)

ΛΥΣΗ

Διαγραμματικά

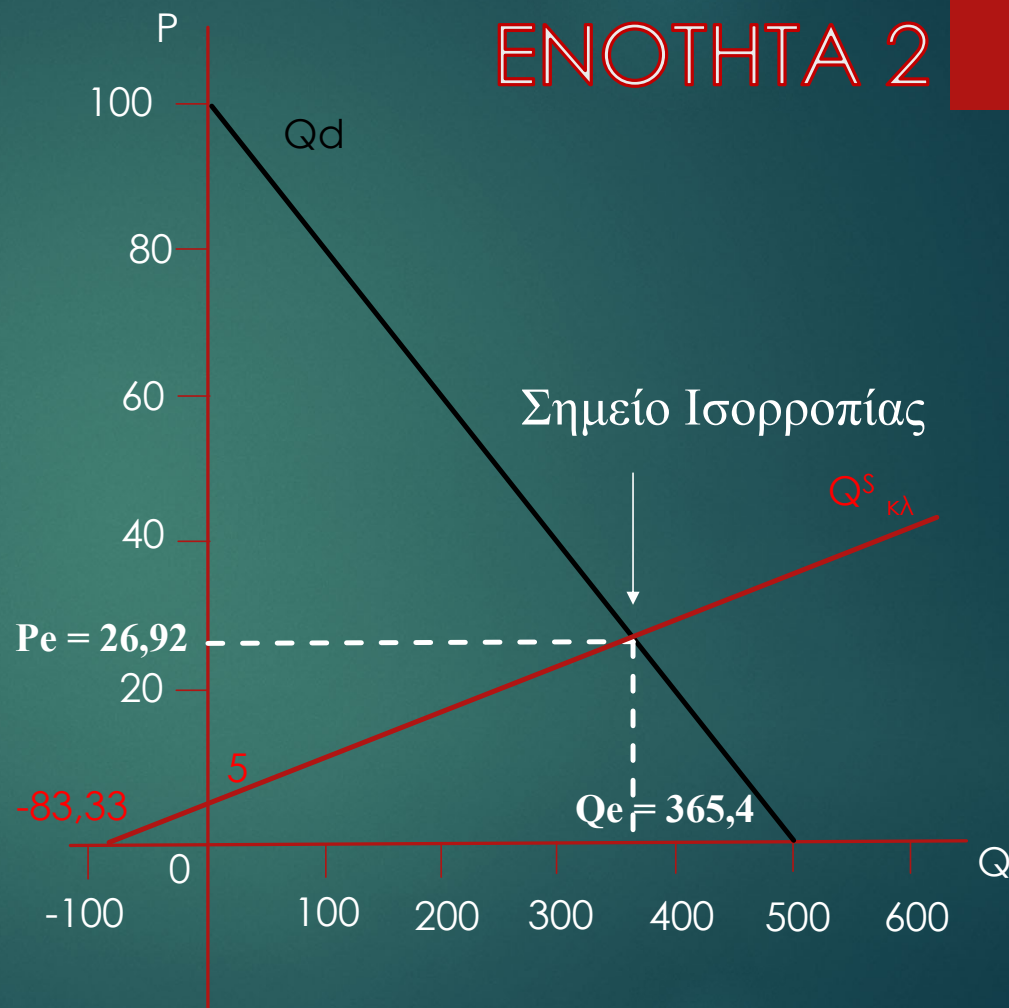
Καμπύλη ζήτησης Q_d

Τιμή P	$Q_d = 500 - 5P$
0	500
100	0

Καμπύλη προσφοράς $Q^s_{κλ}$

Τιμή P	$Q^s_{κλ} = -83,33 + 16,67P$
0	-83,33
5	0

ΕΝΟΤΗΤΑ 2



ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω ότι έχουμε τα εξής δεδομένα μιας υποθετικής οικονομίας:

$$S = -200 + 0,4Y_d \text{ (αποταμίευση)}$$

$$M_t = 0,3Y \text{ (ζήτηση χρήματος για συναλλαγές)}$$

$$I = 400 - 4.000r \text{ (επενδύσεις)}$$

$$M_{SP} = 1.000 - 4.000r \text{ (ζήτηση χρήματος για κερδοσκοπία)}$$

$$G = 400 \text{ (δημόσιες δαπάνες)}$$

$$M_s = 800 \text{ (προσφορά χρήματος)}$$

$$T = 100 \text{ (φόροι)}$$

Ζητείται:

α) Να προσδιοριστεί η συνάρτηση IS και LM και να κατασκευαστεί το διάγραμμα γενικής ισορροπίας της οικονομίας,

β) Τι μεταβολές θα προκληθούν πάνω στο εισόδημα και στο επιτόκιο ισορροπίας της οικονομίας, όταν η συνάρτηση της συνολικής προσφοράς γίνει $M_s = 900$. Οι μεταβολές να παρασταθούν διαγραμματικά.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση IS καθορίζεται από την ακόλουθη συνθήκη ισορροπίας

$$I + G = S + T$$

$$400 - 4.000r + 400 = -200 + 0,4Y_d + 100 \rightarrow$$

$$(Y_d = Y - T)$$

$$800 - 4000r = -100 + 0,4 * (Y - T) \rightarrow$$

$$800 + 100 - 4.000r = 0,4Y - 0,4T \rightarrow$$

$$T=100$$

$$900 - 4.000r = 0,4Y - 0,4*100 \rightarrow 900 - 4.000r = 0,4Y - 40 \rightarrow$$

$$4.000r = -0,4Y + 940 \rightarrow r = \frac{940}{4000} - \frac{0,4}{4000} Y \rightarrow$$

$$r = 0,235 - 0,0001Y \quad (\text{Συνάρτηση IS})$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση LM καθορίζεται από την ακόλουθη συνθήκη ισορροπίας

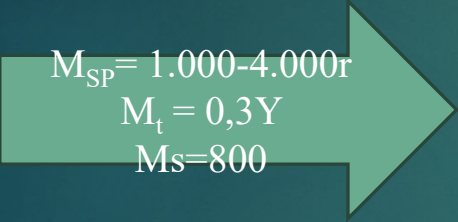
$$M_s = M_d$$

$$M_s = M_{SP} + M_t \rightarrow$$

$$800 = 1.000 - 4.000r + 0,3Y \rightarrow$$

$$4.000r = 200 + 0,3 Y \rightarrow r = \frac{200}{4000} + \frac{0,3}{4000} Y \rightarrow$$

$$r = 0,05 + 0,000075Y \text{ (Συνάρτηση LM)}$$


$$\begin{aligned} M_{SP} &= 1.000 - 4.000r \\ M_t &= 0,3Y \\ M_s &= 800 \end{aligned}$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

Το σημείο γενικής ισορροπίας της οικονομίας από τις εξισώσεις:

$$r = -0,0001 Y + 0,235 \text{ Συνάρτηση (IS)}$$

$$r = 0,000075Y + 0,05 \text{ Συνάρτηση (LM)}$$

$$-0,0001 Y + 0,235 = 0,000075Y + 0,05 \rightarrow$$

$$0,000175Y = 0,185 \rightarrow$$

$$Y = 1.057,14 \text{ (Εισόδημα ισορροπίας)}$$

$$r = -0,0001 Y + 0,235 \rightarrow$$

$$r = 0,1293 \text{ (Επιτόκιο ισορροπίας)}$$

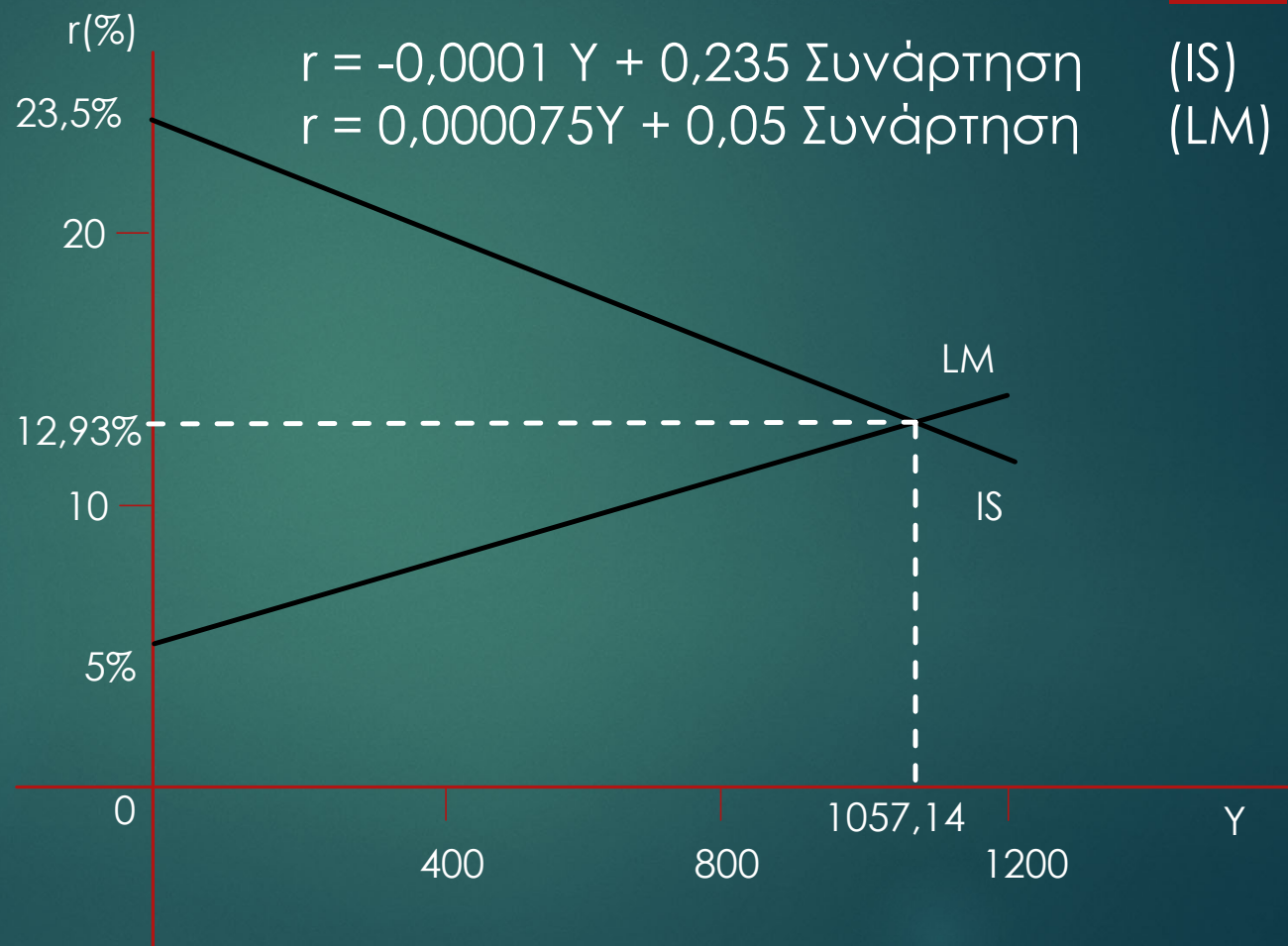
ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

Διαγραμματικά

$Y = 1.057,14$
(Εισόδημα ισορροπίας)

$r = 0,1293$
(Επιτόκιο ισορροπίας)



ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

β) Τι μεταβολές θα προκληθούν πάνω στο εισόδημα και στο επιτόκιο ισορροπίας της οικονομίας, όταν η συνάρτηση της συνολικής προσφοράς γίνει $M_s = 900$. Οι μεταβολές να παρασταθούν διαγραμματικά.

Αν $M_s = 900$, τότε:

$$M_s = M_d = M_{SP} + M_t \rightarrow$$

$$900 = 1.000 - 4.000r + 0,3Y \rightarrow$$

$$4.000r = 0,3Y + 100 \rightarrow$$

$$r = 0,000075Y + 0,025 \text{ (νέα συνάρτηση LM)}$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

Το νέο σημείο γενικής ισορροπίας της οικονομίας από τις εξισώσεις:

$$r = -0,0001 Y + 0,235 \text{ Συνάρτηση (IS)}$$

$$r = 0,000075Y + 0,025 \text{ Συνάρτηση (LM)}$$

$$-0,0001 Y + 0,235 = 0,000075Y + 0,025 \rightarrow$$

$$0,000175Y = 0,21 \rightarrow$$

$$Y = 1.200 \quad (\text{Νέο Εισόδημα ισορροπίας})$$

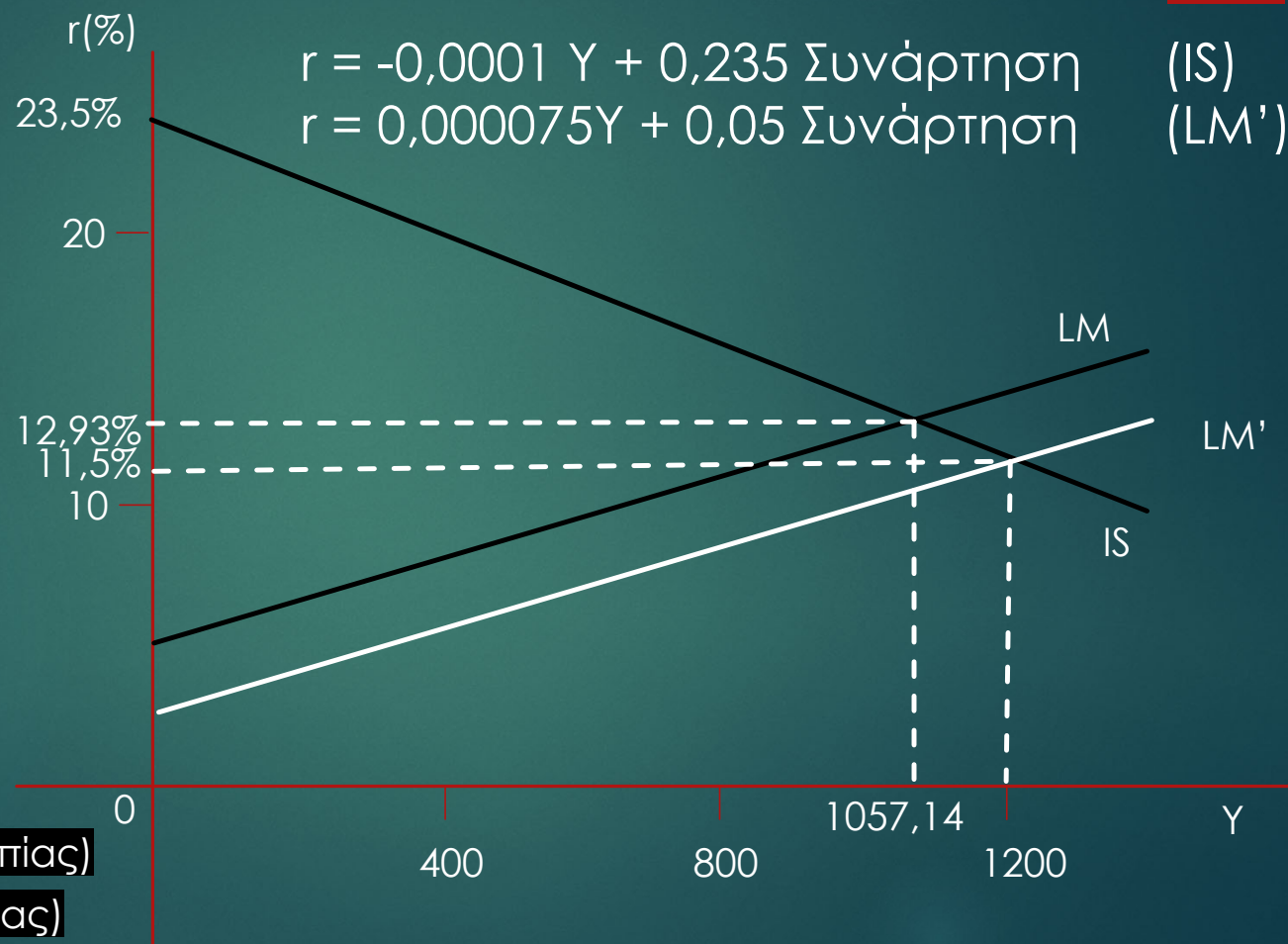
$$r = -0,0001 Y + 0,235 \rightarrow$$

$$r = 0,115 \quad (\text{Νέο Επιτόκιο ισορροπίας})$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

Διαγραμματικά



$Y' = 1.200$ (Εισόδημα ισορροπίας)

$r' = 0,115$ (Επιτόκιο ισορροπίας)

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται η συνάρτηση ζήτησης και η συνάρτηση προσφοράς:

$$Q_D = 40 - 4P$$

$$Q_S = -6 + 2P$$

Χορηγείται επιδότηση 2 νομισματικών μονάδων ανά μονάδα πωλούμενης ποσότητας.

α) Να βρεθεί η επιβάρυνση του κρατικού προϋπολογισμού από τη χορήγηση της επιδότησης.

β) Το όφελος του παραγωγού από την επιδότηση.

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

$$\begin{aligned}Q_D &= Q_S \\ \rightarrow 40 - 4 \cdot P &= -6 + 2 \cdot P \\ \rightarrow 6 \cdot P &= 46 \\ \rightarrow P^* &= 7,67 \text{ (τιμή ισορροπίας)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{και} \quad Q^* &= 40 - 4 \cdot P^* = 40 - 4 \cdot 7,67 \\ \rightarrow Q^* &= 9,32 \text{ (ποσότητα ισορροπίας)}\end{aligned}$$

Μετά την επιδότηση των 2 νομισματικών μονάδων: $Q_{SE} = -6 + 2(P+2) = -6 + 2P + 4$

$$\rightarrow Q_{SE} = 2P - 2$$

Η νέα τιμή και ποσότητα ισορροπίας:

$$\begin{aligned}Q_{SE} &= Q_D \\ \rightarrow 40 - 4 \cdot P &= 2 \cdot P - 2 \\ \rightarrow 6 \cdot P &= 42 \\ \rightarrow P_E^* &= 7 \text{ (τιμή ισορροπίας μετά την επιδότηση)}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\text{και} \quad Q_{SE}^* &= 40 - 4 \cdot P_E = 40 - 4 \cdot 7 \\ \rightarrow Q_{SE}^* &= 12 \text{ (ποσότητα ισορροπίας μετά την επιδότηση)}\end{aligned}$$

α) Το ποσό με το οποίο επιβαρύνεται ο κρατικός προϋπολογισμός είναι:

$$E = \varepsilon \cdot Q_E^* = 2 \cdot 12 = 24$$

β) Το όφελος του παραγωγού από την επιδότηση :

i) πρώτα προσδιορίζουμε τα έσοδα του παραγωγού πριν την επιδότηση:

$$R = P \cdot Q^* = 7,67 \cdot 9,32 = 71,48$$

ii) στη συνέχεια, τα έσοδα μετά την επιδότηση:

$$R_E = P_E \cdot Q_E^* = 7 \cdot 12 = 84$$

Άρα τα έσοδα του αυξάνονται : $R_E - R = 84 - 71,48 = 12,52$.

Επομένως, το τελικό όφελος του παραγωγού από την επιδότηση είναι:

$$TR = 24 + 12,52 = 36,52.$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Μη Γραμμικές Συναρτήσεις

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Έστω η γραμμική συνάρτηση ζήτησης: $Q_d = \frac{1}{a}(k - P)$, με $k, a > 0$

$$\rightarrow P = k - a \cdot Q$$

Η συνάρτηση των συνολικών εσόδων (TR): $TR = P \cdot Q$

$$\rightarrow TR = (k - a \cdot Q) \cdot Q$$

$$\rightarrow TR = kQ - aQ^2$$

...εξίσωση δευτέρου βαθμού της οποίας η γραφική παράσταση είναι μη-γραμμική.

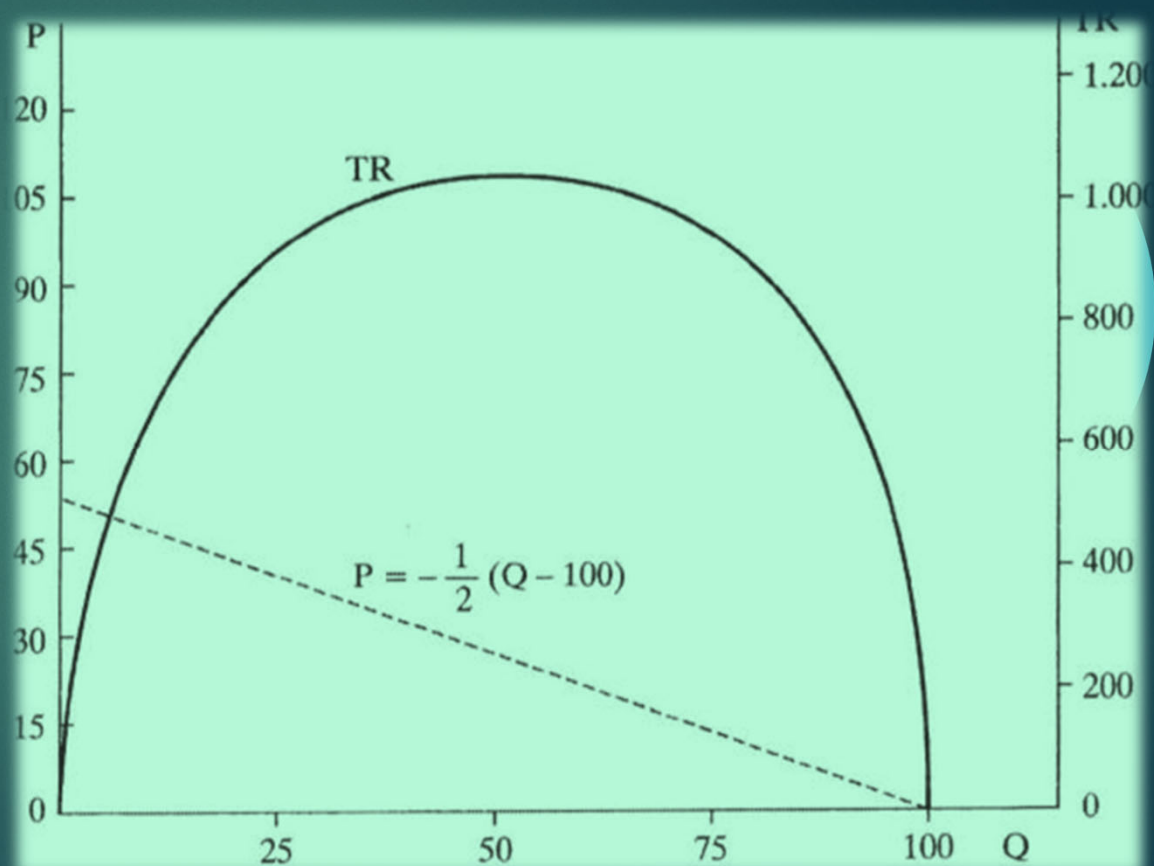
Μη Γραμμικές Συναρτήσεις

Γραφική παράσταση:

Για $k = 50$ και $\alpha = \frac{1}{2}$,
 $\rightarrow P = -0,5(Q - 100)$

Q	P	TR
0	50	0
10	45	450
25	37,5	937,5
30	35	1.050
40	30	1.200
50	25	1.250
60	20	1.200
70	15	1.050
75	12,5	937,5
90	5	450
100	0	0

ΕΝΟΤΗΤΑ 2



Μη Γραμμικές Συναρτήσεις

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Έστω η συνάρτηση του συνολικού κόστους (TC):

$$TC = F + bQ$$

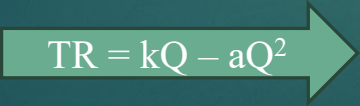
όπου:

F: Το πάγιο κεφάλαιο.

b: Το μεταβλητό κεφάλαιο ανά μονάδα προϊόντος.

Τότε τα κέρδη (Π) της επιχείρησης θα είναι:

$$\Pi = TR - TC$$


$$TR = kQ - aQ^2$$

$$\Pi = TR - TC = kQ - aQ^2 - F - bQ$$

$$\rightarrow \Pi = -aQ^2 + (k - b)Q - F$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Μη Γραμμικές Συναρτήσεις

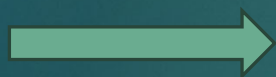
Επίλυση 2-βαθμιας εξίσωσης

Έστω η συνάρτηση κέρδους όπως υπολογίστηκε:

$$\Pi = -aQ^2 + (k - b)Q - F$$

Θέτω $\Pi = 0 \rightarrow -aQ^2 + (k - b)Q - F = 0$ (τριώνυμο)

$$Q = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{όπου: } \alpha = -a, \quad \beta = k - b, \quad \gamma = -F$$



$$Q_{1,2} = \frac{-(k-b) \pm \sqrt{[(k-b)^2 - 4(-a)(-F)]}}{2(-a)}$$

- Αν $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$  2 πραγματικές ρίζες
- Αν $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$  1 διπλή πραγματική ρίζα
- Αν $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$  2 μιγαδικές ρίζες

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Μη Γραμμικές Συναρτήσεις

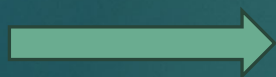
Επίλυση 2-βαθμιας εξίσωσης

Έστω η συνάρτηση κέρδους όπως υπολογίστηκε:

$$\Pi = -aQ^2 + (k - b)Q - F$$

Θέτω $\Pi = 0 \rightarrow -aQ^2 + (k - b)Q - F = 0$ (τριώνυμο)

$$Q = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{όπου: } \alpha = -a, \quad \beta = k - b, \quad \gamma = -F$$



$$Q_{1,2} = \frac{-(k-b) \pm \sqrt{[(k-b)^2 - 4(-a)(-F)]}}{2(-a)}$$

- Αν $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$  2 πραγματικές ρίζες
- Αν $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$  1 διπλή πραγματική ρίζα
- Αν $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$  2 μιγαδικές ρίζες

Μη Γραμμικές Συναρτήσεις

Διαγραμματικά

$$TR = kQ - aQ^2$$

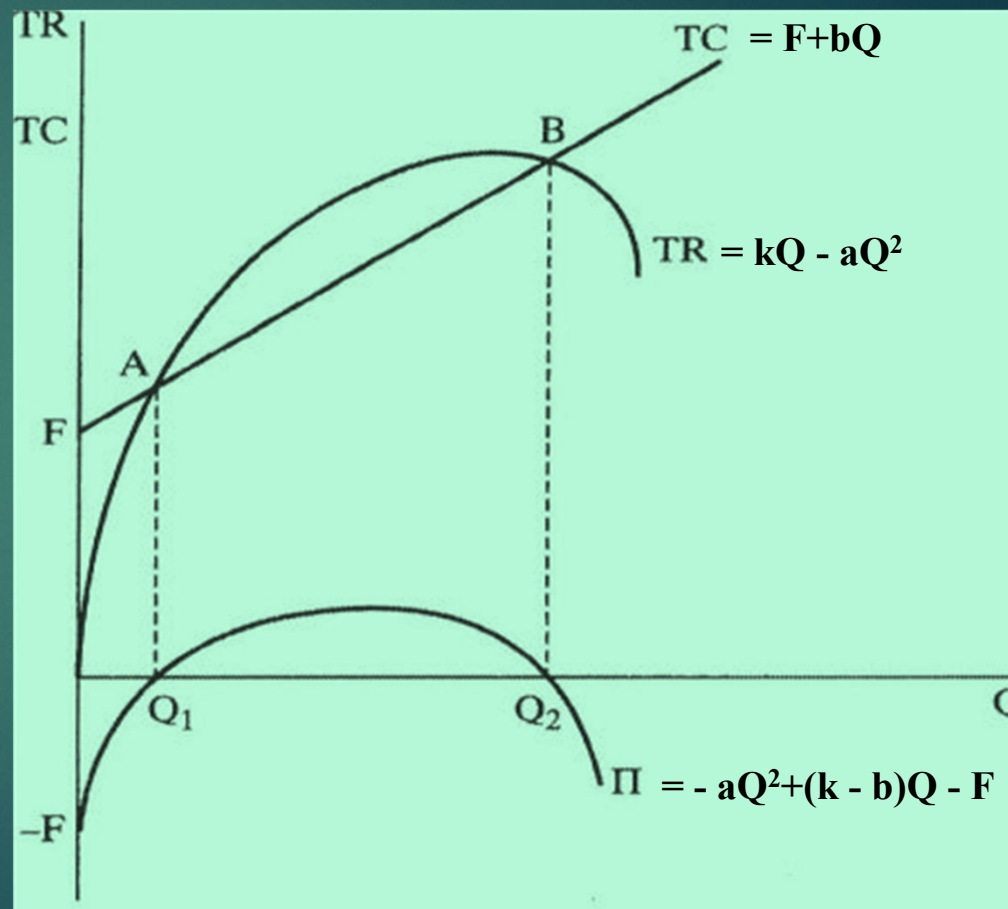
$$TC = F + bQ$$

$$\Pi = -aQ^2 + (k - b)Q - F$$

Q_1 και Q_2 :

λύσεις/ρίζες της συνάρτησης $\Pi(Q)$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2



ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω η συνάρτηση προσφοράς: $P_s = Q^2 + 4Q + 1$

και η αγοραία συνάρτηση ζήτησης είναι: $P_d = -Q^2 - Q + 4$

όπου:

P: Η τιμή αγοράς

Q: Η ποσότητα

Η συνθήκη ισορροπίας απαιτεί: $P_d = P_s$

$$\begin{aligned} &\rightarrow -Q^2 - Q + 4 = Q^2 + 4Q + 1 \\ &\rightarrow 2Q^2 + 5Q - 3 = 0 \end{aligned}$$

$$Q = \frac{-(-5) \pm \sqrt{5^2 - 4(2)(-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-(-5) \pm 7}{4}$$

$\swarrow$
 $\searrow$

$Q1 = \frac{-(-5) + 7}{4} = \frac{12}{4} = 3$
 $Q2 = \frac{-(-5) - 7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$
(απορρίπτεται)

Άρα, $P = (-0,5)^2 - 0,5 + 4 = 3,25$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΟΜΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ομογραφικές Συναρτήσεις

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Ομογραφικές είναι οι συναρτήσεις όπως: $Y = \frac{1}{X}$ με Π.Ο. το $R \neq 0$

Το $X=0$ ονομάζεται ΠΟΛΟΣ της συνάρτησης (μηδενίζει τον παρονομαστή).

Παράδειγμα ομογραφικής συνάρτησης είναι η συνάρτηση του μέσου κόστους AC :

$$AC = \frac{TC}{Q}$$

όπου:

AC : Το μέσο κόστος παραγωγής

TC : Το συνολικό κόστος

Q : Η συνολική παραγωγή.

Δηλαδή, $TC = AC \cdot Q$

Ομογραφικές Συναρτήσεις

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Έστω η συνάρτηση του συνολικού κόστους (TC): $TC = F + bQ$

Οπότε, $AC = \frac{F + (bQ)}{Q} = \frac{F}{Q} + b \rightarrow AC = F \cdot Q^{-1} + b$

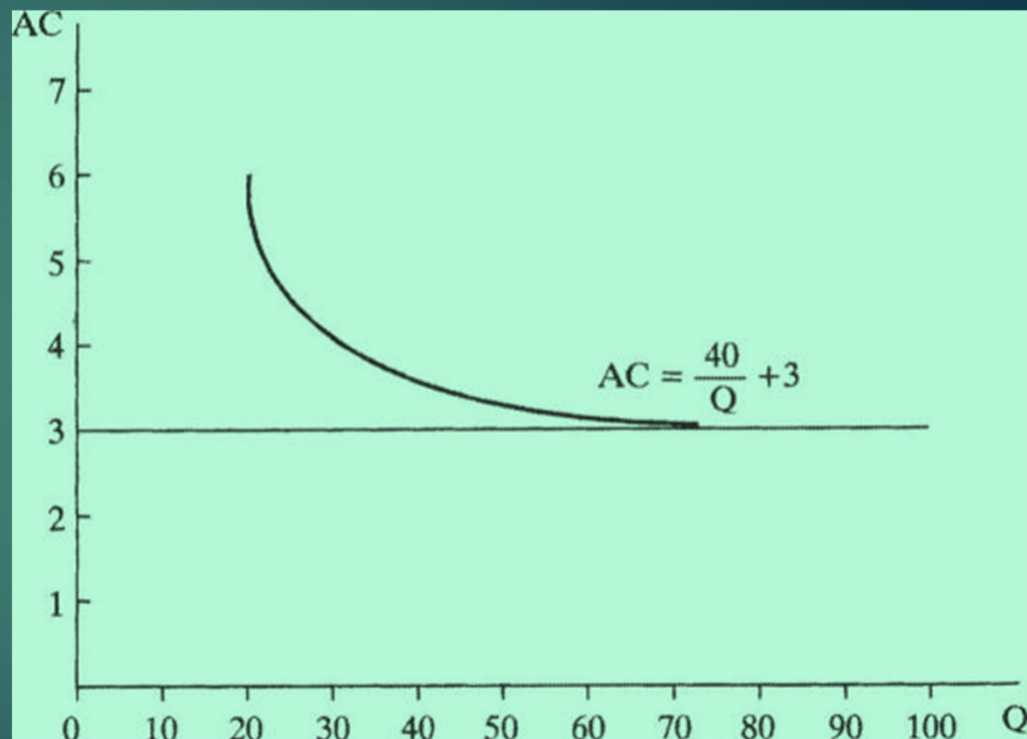
Αν $F = 40$ και $b = 3$, τότε

$$AC = 40 \cdot Q^{-1} + 3$$

Ομογραφικές Συναρτήσεις

Διαγραμματικά

Q	40/Q	3	AC = 40/Q + 3
0	∞	3	∞
1	40	3	43
5	8	3	11
10	4	3	7
20	2	3	5
40	1	3	4
80	0,5	3	3,5
160	0,25	3	3,25



Όταν $Q = 0$, το AC δεν ορίζεται και όταν $AC = 3$, το Q δεν ορίζεται

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΑΣΚΗΣΗ

Μια εταιρία ηλεκτρονικών αντιμετωπίζει την παρακάτω συνάρτηση ζήτησης:

$$P + Q_d^2 + 5Q_d - 18 = 0$$

όπου:

P: τιμή ανά μονάδα προϊόντος

Q_d : Η ζητούμενη ποσότητα.

Έχει, επίσης, εκτιμηθεί ότι η συνάρτηση προσφοράς είναι:

$$2P - 5Q_s^2 + 12Q_s = 12$$

όπου:

Q_s : Η προσφερόμενη ποσότητα.

Ζητείται:

Να εκτιμηθούν η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας στην αγορά.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

Λύνω τη συνάρτηση ζήτησης ως προς P:

$$P + Q_d^2 + 5Q_d - 18 = 0 \quad \rightarrow \quad P_d = -Q_d^2 - 5Q_d + 18$$

Όμοια για τη συνάρτηση προσφοράς:

$$2P - 5Q_s^2 + 12Q_s = 12 \quad (:2) \rightarrow \quad \frac{2P}{2} - \frac{5}{2}Q_s^2 + \frac{12}{2}Q_s = \frac{12}{2} \quad \rightarrow \quad P_s = 2,5Q_s^2 - 6Q_s + 6$$

Η αγορά βρίσκεται σε ισορροπία όταν $Q_d = Q_s (= Q)$ ή ισοδύναμα όταν $P_d = P_s (= P)$:

$$P_d = P_s$$

$$\rightarrow -Q^2 - 5Q + 18 = 2,5Q^2 - 6Q + 6 \quad \rightarrow \quad 3,5Q^2 - Q - 12 = 0$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

$$3,5Q^2 - Q - 12 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - [4 \cdot 3,5 \cdot (-12)] = 169 > 0 \rightarrow 2 \text{ πραγματικές ρίζες}$$

$$Q_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3,5 \cdot (-12)}}{2 \cdot 3,5} = 1 \pm \frac{13}{7}$$

$Q_1 = 1 + \frac{13}{7} = \frac{20}{7} = 2,8$

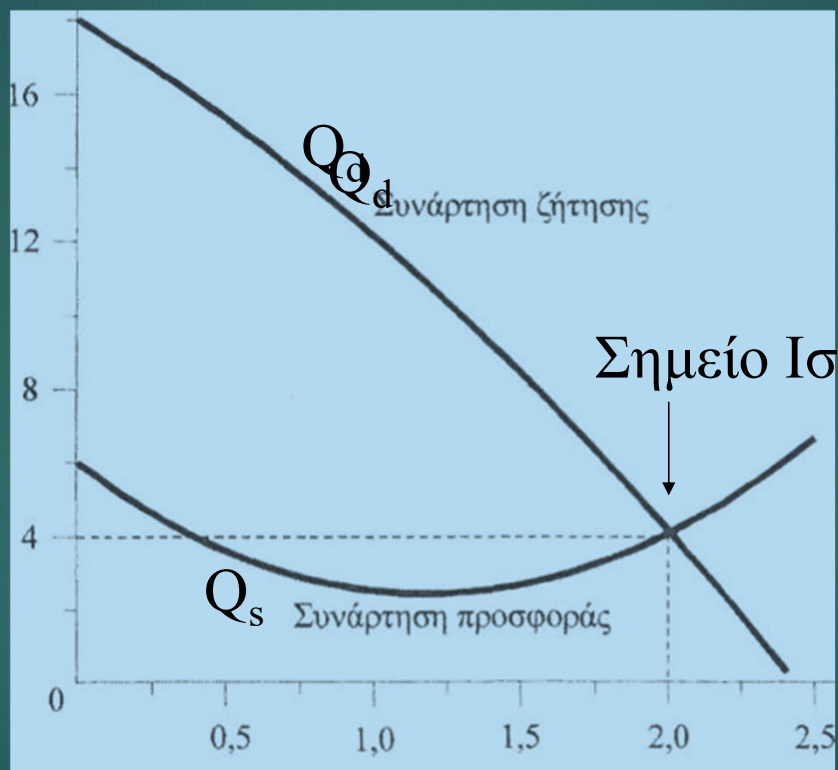
$Q_2 = 1 - \frac{13}{7} = -\frac{12}{7} = -1,7$
(απορρίπτεται)

Άρα, η ποσότητα ισορροπίας είναι $Q = 2,8$

$$\text{Από την } Pd = -Q_d^2 - 5Q_d + 18 \rightarrow (-2,8)^2 - (5 \cdot 2,8) + 18 \rightarrow P = 11,84 \text{ (τιμή ισορροπίας)}$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ



ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΑΣΚΗΣΗ

Η ζήτηση για το προϊόν μιας επιχείρησης είναι: $P = 120 - Q_d$

Ενώ η συνάρτηση του συνολικού κόστους είναι: $TC = 2Q^2 + 6Q + 216$

Να προσδιοριστεί:

α) Το νεκρό σημείο της επιχείρησης.

β) Ποιο θα είναι το κέρδος της επιχείρησης, όταν το $Q = 25$ μονάδες.

Να γίνει και διαγραμματική παρουσίαση της συνάρτησης του κέρδους.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

α) Νεκρό σημείο $\rightarrow$ Συνολικά Εσοδα (TR) = Συνολικό Κόστος (TC)
ή όταν τα κέρδη $\Pi = 0$

$$\left. \begin{array}{l} TR = P \cdot Q \\ P = 120 - Q_d \end{array} \right\} \rightarrow TR = (120 - Q) \cdot Q \rightarrow \left. \begin{array}{l} TR = 120Q - Q^2 \\ \Pi = TR - TC \\ TC = 2Q^2 + 6Q + 216 \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow \Pi = 120Q - Q^2 - 2Q^2 - 6Q - 216 \rightarrow \Pi = -3Q^2 + 114Q - 216 = 0$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

$$\Pi = -3Q^2 + 114Q - 216 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 114^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-216) = 12.996 - 2.592 \rightarrow \Delta = 10.404 > 0$$

$$Q_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2a} = \frac{-(114) \pm \sqrt{10.404}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-114 \pm \sqrt{10.404}}{-6} = \frac{-114 \pm 102}{-6}$$

$$Q_1 = \frac{-114 + 102}{-6} = \frac{-12}{-6} = 2 \quad \text{Δεκτή}$$

$$Q_2 = \frac{-114 - 102}{-6} = \frac{-216}{-6} = 36 \quad \text{Δεκτή}$$

Οπότε,

$$Q_1 = 2 \rightarrow P_1 = 120 - Q_d = 120 - 2 = 118$$

$$Q_2 = 36 \rightarrow P_2 = 120 - Q_d = 120 - 36 = 84$$

Η επιχείρηση έχει δυο νεκρά σημεία

$N_1 (118, 2)$ και $N_2 (84, 36)$

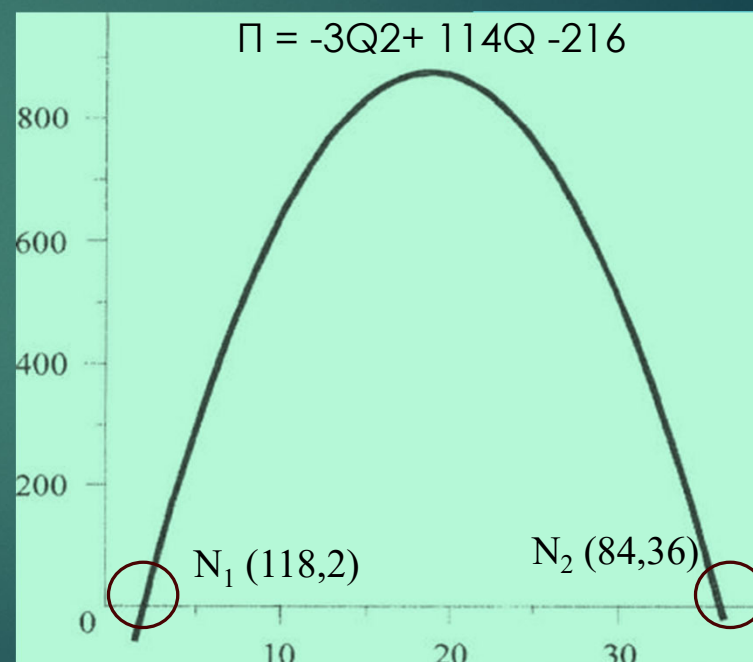
ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

β) Τα κέρδη της επιχείρησης, όταν $Q = 25$ είναι:

$$\Pi = -3Q^2 + 114Q - 216 = -3 \cdot (25)^2 + 114 \cdot (25) - 216 = -1.875 + 2.850 - 216 \rightarrow \Pi = 759$$

Q	$\Pi = -3Q^2 + 114Q - 216$
0	-216
2	0
10	624
20	864
30	504
36	0



ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΑΣΚΗΣΗ

Η συνάρτηση ζήτησης για ένα προϊόν είναι:

$$P = 20 - 0,5Q_d$$

Η συνάρτηση του μέσου κόστους AC δίδεται από;

$$AC = \frac{20}{Q} + 4$$

Να βρεθεί το νεκρό σημείο της επιχείρησης.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

α) Νεκρό σημείο $\rightarrow$ Συνολικά Εσοδα (TR) = Συνολικό Κόστος (TC)
ή όταν τα κέρδη $\Pi = 0$

$$\left. \begin{array}{l} TR = P \cdot Q \\ P = 20 - 0,5Q_d \end{array} \right\} TR = (20 - 0,5Q) \cdot Q \rightarrow TR = 20Q - 0,5Q^2$$
$$\left. \begin{array}{l} TC = AC \cdot Q \\ AC = \frac{20}{Q} + 4 \end{array} \right\} TC = \left(\frac{20}{Q} + 4\right) \cdot Q \rightarrow TC = 20 + 4Q$$

$\Pi = TR - TC$ 

$$\rightarrow \Pi = 20Q - 0,5Q^2 - 20 - 4Q \rightarrow \Pi = -0,5Q^2 + 16Q - 20 = 0$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

$$\Pi = -0,5Q^2 + 16Q - 20 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 16^2 - 4 \cdot (-0,5) \cdot (-20) = 256 - 40 = 216 > 0$$

$$Q_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-(16) \pm \sqrt{216}}{2 \cdot (-0,5)} = \frac{-16 \pm 14,69}{-1}$$

$$Q_1 = \frac{-16 + 14,69}{-1} = 1,31 \text{ Δεκτή}$$

$$Q_2 = \frac{-16 - 14,69}{-1} = 30,69 \text{ Δεκτή}$$

Οπότε,

$$Q_1 = 1,31 \rightarrow P_1 = 20 - 0,5Q_d = 20 - 0,655 = 19,35$$

$$Q_2 = 30,69 \rightarrow P_1 = 20 - 0,5Q_d = 20 - 15,345 = 4,655$$

Η επιχείρηση έχει δυο νεκρά σημεία

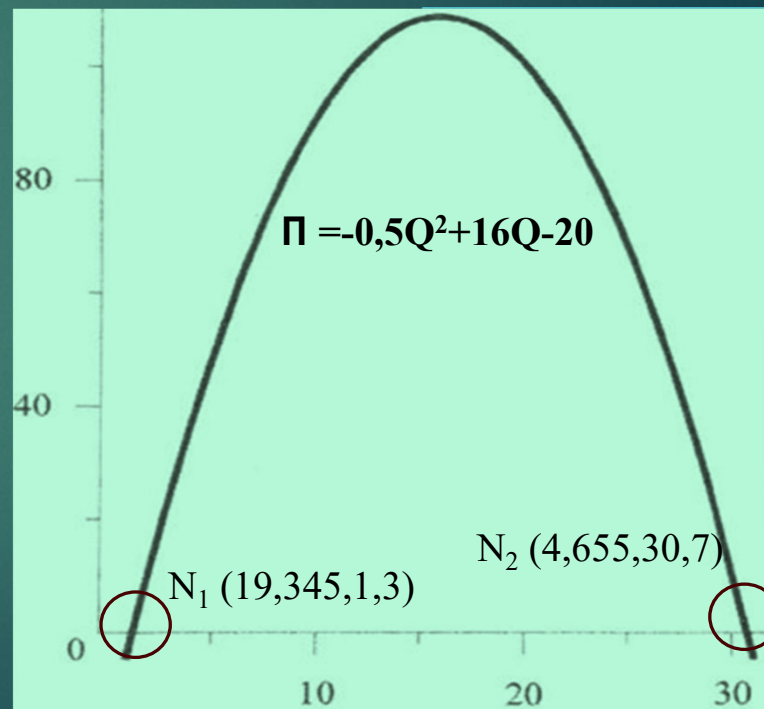
$N_1 (19,345, 1,31)$ και $N_2 (4,655, 30,69)$

ΛΥΣΗ

Διαγραμματικά

Q	$\Pi = -0,5Q^2 + 16Q - 20 = 0$
0	-20
1.3	0
10	90
20	100
30	10
30.7	0

ΕΝΟΤΗΤΑ 2



ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΤΕΛΟΣ 2^{ΗΣ} ΕΝΟΤΗΤΑΣ