ΠΑΝΤΕΙΟΝ
PANTEION

SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES

ΠΟΣΟΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Γιώργος Λούντζης (PhD, MSc, MEng)

Εντεταλμένος Διδάσκων (ΕΣΠΑ)
2025 – 2026

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

1. ΜΕΡΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

2. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΡΩΤΗΣ ΚΑΙ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΜΕΡΙΚΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

3. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

4. ΟΛΙΚΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ//ΟΛΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

Έστω $Y = f(X_1, X_2,\ldots\ldots.X_n)$ μια συνάρτηση προσδιορισμένη σε ένα χώρο C του R^n και $P(\underline{X_1, X_2, \ldots, X_n})$, ένα σημείο του C. Εάν υποθέσουμε τώρα ότι n -1 τιμές, δηλαδή X_2, $X_3, \ldots, X_n$ είναι δεδομένες σταθερές, η Y θα γίνει συνάρτηση μιας μόνο μεταβλητής της X_1, έτσι που, εάν αυτή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη για $X_1 = \underline{X_1}$, το

$$\mathrm{Lim}_{\Delta X1\to 0} = \frac{f(\underline{X_1}+\Delta X_1 + \underline{X_2,\ldots X_n}) - f(\underline{X_1, X_2,\ldots X_n})}{h(X_1+\Delta X_1 - h(X_1))}$$

λέγεται «πρώτη μερική παράγωγος» της Y ως προς την X_1 στο σημείο P και θα συμβολίζεται με

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x1}\right)_P, \ (fx_1)_p \text{ κλπ.}$$

και θα δείχνει την επίδραση της μεταβλητής X_1 στο Y.

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

... η διαδικασία που μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε την επίδραση της μεταβλητής X, στην Y, κρατώντας σταθερές τις X_2, X_3,..., X_n ονομάζεται μερική παραγώγιση.

Αν έχω τη συνάρτηση

$$Y = f(X_1\ X_2,..., X_n)$$

τότε ο λόγος $\frac{\partial y}{\partial x1}$, είναι η μερική παράγωγος της μεταβλητής Y ως προς τη μεταβλητή X, και γράφεται συνήθως ως $\mathbf{f_{x1}}$

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

Οι δεύτερες μερικοί παράγωγοι μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών $f(X_1, X_2)$ γράφονται

$$F_{x1x1}=\frac{\partial^2 f}{\partial x1^2}$$

$$F_{x2x2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x2^2}$$

$$\left.\begin{aligned} F_{x1x2}&=\frac{\partial^2 f}{\partial x1\partial x2} \\ F_{x2x1}&=\frac{\partial^2 f}{\partial x2\partial x1} \end{aligned}\right\}$$

Σταυροειδής μερική παράγωγος

Εάν οι f_{x1x2}, f_{x2x1}, είναι συνεχείς στο P εσωτερικό του C, θα είναι ίσες, δηλαδή $f_{x1x2}=f_{x2x1}$ (Θεώρημα του Schwartz).

Εκτίμηση των μερικών παραγώγων

Έστω η συνάρτηση χρησιμότητας $Y = X^{\alpha} + XZ^{\beta}$

όπου Y η χρησιμότητα που απολαμβάνει ο καταναλωτής από την κατανάλωση των αγαθών X και Z.

Μερική παραγωγός της Y ως προς τη X: $f_{\chi} = \alpha X^{\alpha-1}+Z^{\beta}$

Μερική παραγωγός της Y ως προς τη Z: $F_{z}=\beta XZ^{\beta-1}$

Οι δεύτερες μερικές παράγωγοι:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \alpha(\alpha - 1)X^{\alpha-2}$$

$$f_{zz} = \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \beta(\beta - 1)XZ^{\beta-2}$$

$$f_{xz} = \frac{\partial y}{\partial x \partial z} = \beta Z^{\beta-1}$$

$$f_{zx} = \frac{\partial y}{\partial z \partial x} = \beta Z^{\beta-1}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$Y = f(X, Z) = 5X^4+3Z^2-7$$

Θεωρώντας τη Z σταθερή, μπορούμε να βρούμε τη μερική παράγωγο της Y ως προς τη X.

$$\frac{\partial y}{\partial x}= f_x =\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\cdot 5X^4+\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\cdot 3Z^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\cdot 7 = 20X^3+0-0 = 20X^3$$

Θεωρώντας τη X σταθερή, βρίσκουμε τη μερική παραγωγό της Y ως προς τη Z.

$$\frac{\partial Y}{\partial Z} = fz = \left(\frac{\partial}{\partial Z}\right)\cdot 5X4+\left(\frac{\partial}{\partial Z}\right)\cdot 3Z2- \left(\frac{\partial}{\partial Z}\right)\cdot 7 = 0+6Z+0 = 6Z$$

Οι δεύτερες μερικές παραγωγοί θα είναι

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 (5X^4+3Z^2-7)}{\partial x^2}= 60X^2, \qquad f_{zz} =\frac{\partial^2 (5X^4+3Z^2-7)}{\partial z^2} = 6, \quad f_{xz}= \frac{\partial^2 Y}{\partial x\partial z} = 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(X, Z) = 3XZ^2$$

Οι πρώτες μερικές παραγωγοί είναι:

$$fx = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(3XZ^2)}{\partial x} = 3Z^2$$

$$fz = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial(3XZ^2)}{\partial z} = 6XZ$$

Οι δεύτερες μερικές παραγωγοί είναι:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(3XZ^2)}{\partial x^2} = \frac{\partial(3Z^2)}{\partial x} = 0$$

$$f_{zz} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2(3XZ^2)}{\partial z^2} = \frac{\partial(3XZ)}{\partial z} = 6X$$

$$f_{xz} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial(6XZ)}{\partial x} = 6Z$$

$$f_{zx} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial(3Z^2)}{\partial z} = 6Z$$

Εφαρμογή στην οικονομική θεωρία

Τα οριακά προϊόντα της εργασίας και τον κεφαλαίου

Έστω η συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas: $Q = AL^aK^b$

a, b σταθεροί όροι
Q: Το προϊόν.

K: Το κεφάλαιο.

L: Η εργασία.

Οριακό Προϊόν Εργασίας: $MPL = f_L = AaL^{a-1}K^b$

Οριακό Προϊόν Κεφαλαίου: $MPK = f_K = AbL^aK^{b-1}$

Τα οριακά προϊόντα της εργασίας και τον κεφαλαίου

Εστω ότι a = b = 0,5

Τότε $Q = AL^{0,5}K^{0,5}$

και $MPL = f_L = 0,5 \cdot A \cdot L^{-0,5}K^{0,5}$

και $MPK = f_K = 0,5 \cdot A \cdot L^{0,5}K^{-0,5}$

Οριακή χρησιμότητα

Εστω η συνάρτηση χρησιμότητας: $U = AX^aY^b$ X, Y αγαθά

Οι μερικές παράγωγοι f_x και f_y θα δώσουν το μέγεθος της οριακής χρησιμότητας για τα αγαθά X και Y αντίστοιχα.

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

Γενικευμένη συνάρτηση κόστους του Leontief

$$C = (\Sigma_i \Sigma_j b_{ij}\sqrt{P1}\sqrt{P2}\,)\cdot h(Y) \qquad P1\geq 0,\ P2\geq 0,\ Y\geq 0$$

Για 2 εισροές: $C=(b_{11}P_1+2b_{12}\sqrt{P2}\sqrt{P1}+b_{22}P_2)h(Y)$

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial C}{\partial P1} = \frac{X_1}{Y} = b_{11}+b_{12}\left(\frac{P2}{P1}\right)^{1/2} \\ X_2 &= \frac{\partial C}{\partial P2} = \frac{X_2}{Y} = b_{22}+b_{12}\left(\frac{P1}{P2}\right)^{1/2} \end{aligned}\right\} \text{σύστημα συναρτήσεων ζήτησης συντελεστών παραγωγής}$$

C: συνολικό κόστος παραγωγής
P1: τιμή εισροής 1
P2: τιμής εισροής 2

bij: οι παράμετροι της συνάρτησης για τους οποίους ισχύει bij = bji

h(Y): είναι μια θετική μονοτονική συνάρτηση του προϊόντος Y.

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

Κλειστή οικονομία

Έστω	$C = C_0 + cY$	Συνάρτηση κατανάλωσης
	$I = I_0$	Συνάρτηση επενδύσεων
	$Y = C + I$	Συνθήκη ισορροπίας του εισοδήματος

$$Y = C_0 + cY + I_0 \rightarrow Y - cY = C_0 + I_0$$

$$\rightarrow Y(1-c) = C_0 + I_0$$

$$\rightarrow Y = \left(\frac{C_0}{1-C}\right) + \left(\frac{I_0}{1-C}\right)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial C_0} = \frac{1}{1-C}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial I_0} = \frac{1}{1-C}$$

Η έκφραση $\frac{1}{1-C}$ *αποτελεί τον πολλαπλασιαστή.*

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

…συναλλαγές με εξωτερικό

Έστω

$C = C_0 + cY$	Συνάρτηση κατανάλωσης
$I = I_0$	Συνάρτηση επενδύσεων
$G = G_0$	Δημόσιες δαπάνες
$X = X_0$	Εξαγωγές
$M = M_0 + mY$	Εισαγωγές (m: οριακή ροπή για εισαγωγές)
$Y = C + I + G + (X - M)$	Συνθήκη ισορροπίας του υποδείγματος

$Y = C_0 + cY + I_0 + G_0 + X_0 - M_0 - mY$ $\rightarrow Y - cY + mY = C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - M_0 - mY$

$\rightarrow Y(1 - c + m) = I_0 + X_0 + C_0 + G_0 - M_0$

$\rightarrow Y = \left(\frac{1}{1-C+m}\right)[I_0 + X_0 + C_0 + G_0 - M_0]$

$$\frac{\partial Y}{\partial I_0} = \frac{\partial Y}{\partial X_0} = \frac{1}{1-C+m}$$

πολλαπλασιαστής ανοιχτής οικονομίας

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES
SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

… πολλαπλασιαστής επενδύσεων σε οικονομία με δύο τομείς

Έστω	$S = -\alpha + (1 - \beta)Y$	Συνάρτηση αποτεμίευσης
	$I = I_0 - \delta_r$	Συνάρτηση επενδύσεων
	$Mt = mY$	Ζήτηση χρήματος για συναλλαγές
	$M_{sp} = M^0{}_{sp} - qr$	Ζήτηση χρήματος για κερδοσκοπία
	$M_S = M°$	Προσφορά χρήματος
	$I = S$	Συνθήκη ισορροπίας αγοράς προϊόντος

$$I_0 - \delta r = -\alpha + (1 - \beta)Y \rightarrow r = \frac{a + I_0 - (1-\beta)Y}{\delta}$$

Ισορροπία στην αγορά χρήματος $M_s° = M°sp - qr + M_t \rightarrow r = \frac{M°sp - M_s°}{q} + \frac{mY}{q}$

… πολλαπλασιαστής επενδύσεων σε οικονομία με δύο τομείς

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{a+I_0-(1-\beta)Y}{\delta} \\ r &= \frac{M°sp- M_s°}{q} + \frac{mY}{q} \end{aligned}\right\}$$

$$Ye= \frac{[(M°sp- M_s°)\delta-(I_0+\alpha)q]}{q(\beta-1)-m\delta}$$

$$re= \frac{\beta\ M°sp-\beta\ M_s°- M°sp+ M_s°-mI_0-ma}{q(\beta-1)-m\delta}$$

Άρα, ο πολλαπλασιαστής των επενδύσεων:

$$\frac{\partial Y}{\partial I_0} = \frac{-q}{q(\beta-1)-m\delta}$$

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ