



ΠΑΝΤΕΙΟΝ
ΠΑΝΤΕΙΟΝ

SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES

ΠΟΣΟΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Γιώργος Λούντζης (PhD, MSc, MEng)

Εντεταλμένος Διδάσκων (ΕΣΠΑ)
2025 – 2026

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

1. ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
2. ΔΕΥΤΕΡΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ
3. ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΓΙΑ ΤΟΠΙΚΑ ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ
4. ΑΝΑΓΚΑΙΕΣ ΚΑΙ ΕΠΑΡΚΕΙΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ
5. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Έστω,

$$P = k - aQ^2 + \beta Q \text{ με } \kappa, \alpha, \beta > 0$$

Τα συνολικά έσοδα (TR) της επιχείρησης θα είναι $TR = Q * P$

$$\rightarrow TR = Q(k - aQ^2 + \beta Q) = kQ - aQ^3 + \beta Q^2$$

$$\text{Το οριακό έσοδο (MR)} \quad \rightarrow \quad MR = \frac{d(TR)}{dQ} = -3aQ^2 + 2\beta Q + k$$

Όμως, το MR μεταβάλλεται συγχρόνως με τη μεταβολή του Q.

Συνεπώς, ο λόγος μεταβολής στο MR ως προς την ποσότητα Q: $\frac{d(MR)}{dQ}$

Η ποσότητα αυτή μας δίνει την κλίση της εφαπτομένης της συνάρτησης του MR για όλες τις τιμές της Q:

$$\frac{d(MR)}{dQ} = -6aQ + 2\beta$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Η σχέση $\frac{d(MR)}{dQ} = -6aQ + 2\beta$
αποτελεί την κλίση της εφαπτομένης στη συνάρτηση των οριακών εσόδων (MR).

Η σχέση $\frac{d(MR)}{dQ}$ είναι η παράγωγος της $\frac{d(TR)}{dQ}$:

$$\frac{d(MR)}{dQ} = \frac{\frac{d(d(TR))}{dQ}}{dQ} = \frac{d^2(TR)}{dQ^2}$$

που αποτελεί τη δεύτερη παράγωγο των συνολικών εσόδων (TR) ως προς το Q.
Η δεύτερη παράγωγος μπορεί να οριστεί ως εξής:

$$\frac{d^2(TR)}{dQ^2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η συνάρτηση του κόστους είναι της έξης μορφής:

$$TC = k + aQ - bQ^2 + gQ^3$$

όπου k , a , b και $g > 0$.

Το οριακό κόστος (MC) θα είναι:

$$MC = \frac{d(TC)}{dQ} = a - 2bQ + 3gQ^2$$

Η συνάρτηση του οριακού κόστους (MC) είναι καμπυλόγραμμη (συνάρτηση δευτέρου βαθμού). Συνεπώς, η κλίση της εφαπτομένης σε αυτή την περίπτωση μεταβάλλεται με την ποσότητα Q , δηλαδή:

$$\frac{d(MC)}{dQ} = \frac{d^2(TC)}{dQ^2} = -2b + 6gQ$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα A του \mathbb{R} και x_0 ένα σημείο του A , $x_0 \in A$. Τοπικό μέγιστο (τοπικό ελάχιστο) παρουσιάζει η f στο x_0 όταν και μόνον όταν

υπάρχει ανοικτό διάστημα $(\alpha, \beta) \subset A$ με $x_0 \in (\alpha, \beta)$

και

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ (} f(x) \geq f(x_0) \text{)} \forall x \in (\alpha, \beta).$$

Η ειδικότερα, όταν και μόνον όταν

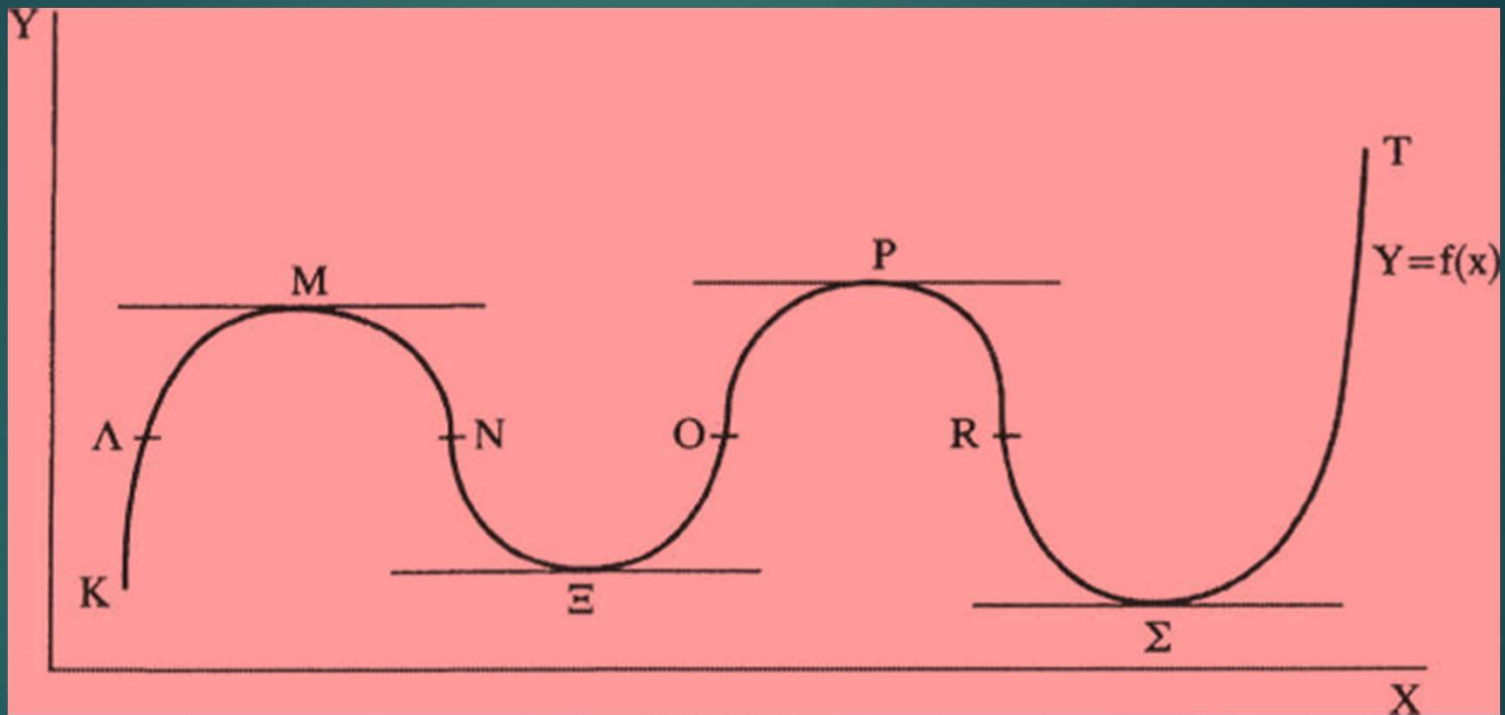
υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\forall x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ είναι $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$).

Ο πραγματικός αριθμός $f(x_0)$ ονομάζεται **τοπικό μέγιστο (τοπικό ελάχιστο)** της συνάρτησης f .

Το τοπικό μέγιστο και το τοπικό ελάχιστο αποτελούν τα **ακρότατα της συνάρτησης**.

Συνθήκες για Τοπικό Μέγιστο

ΕΝΟΤΗΤΑ 3



Συνθήκες για Τοπικό Μέγιστο

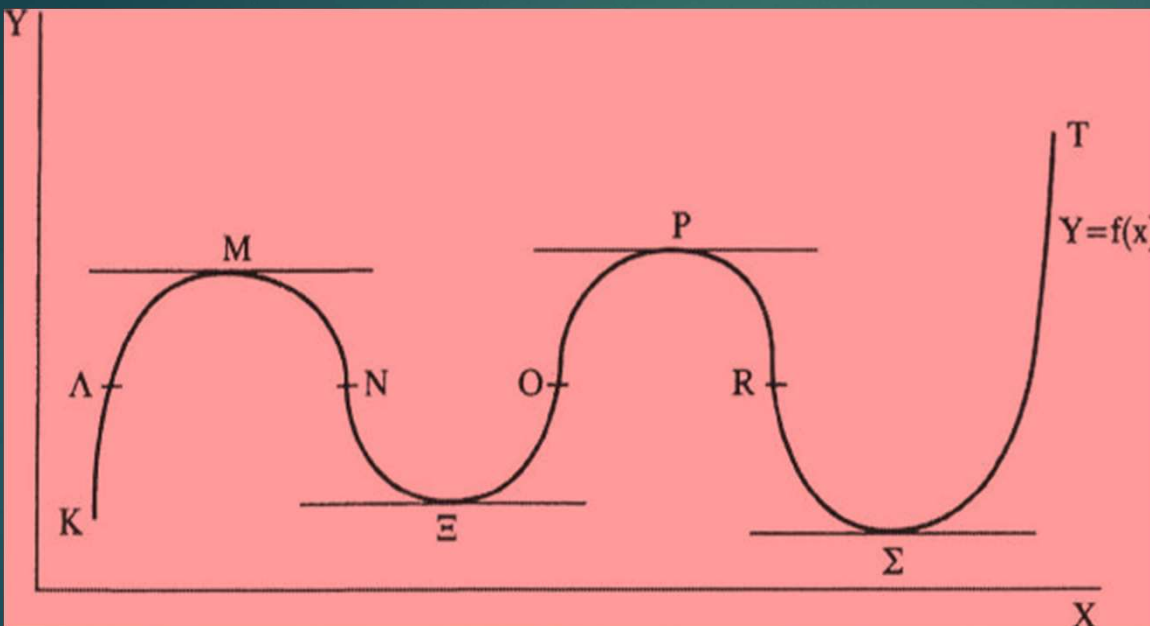
ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Η **συνθήκη πρώτου βαθμού** για ένα **τοπικό μέγιστο** απαιτεί η πρώτη παράγωγος να είναι ίση με μηδέν:

$$\frac{dY}{dX} = 0$$

Συνθήκες για Τοπικό Μέγιστο

ΕΝΟΤΗΤΑ 3



$$\frac{d\left(\frac{dY}{dX}\right)}{dX} \quad \text{ή} \quad \frac{d^2Y}{dX^2} < 0$$

Συνθήκες για Τοπικό Μέγιστο

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

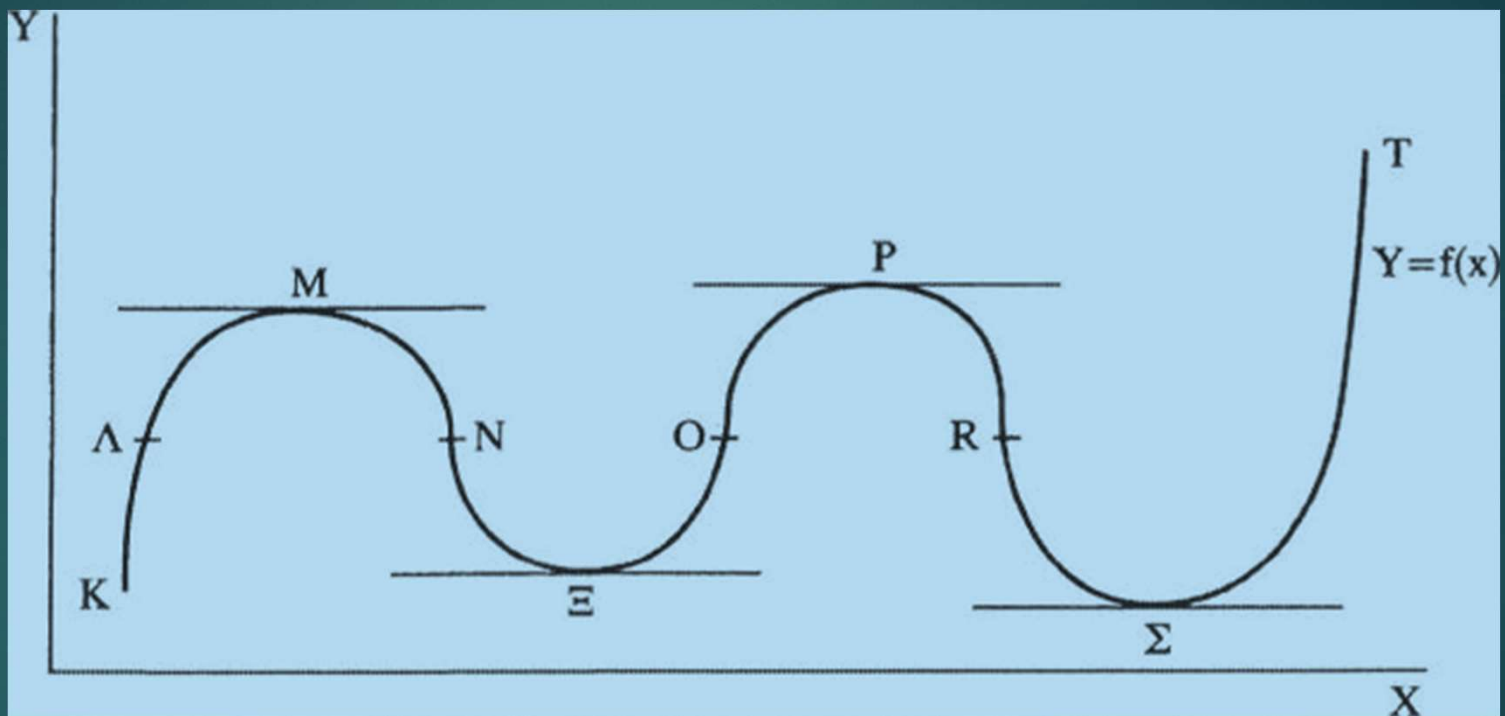
Η **συνθήκη δεύτερου βαθμού** για ένα **τοπικό μέγιστο** απαιτεί η δεύτερη παράγωγος να είναι αρνητική:

$$\frac{d\left(\frac{Y}{X}\right)}{dx} < 0 \text{ ή}$$

$$\frac{d^2Y}{dX^2} < 0$$

Συνθήκες για Τοπικό Ελάχιστο

ΕΝΟΤΗΤΑ 3



Συνθήκες για Τοπικό Ελάχιστο

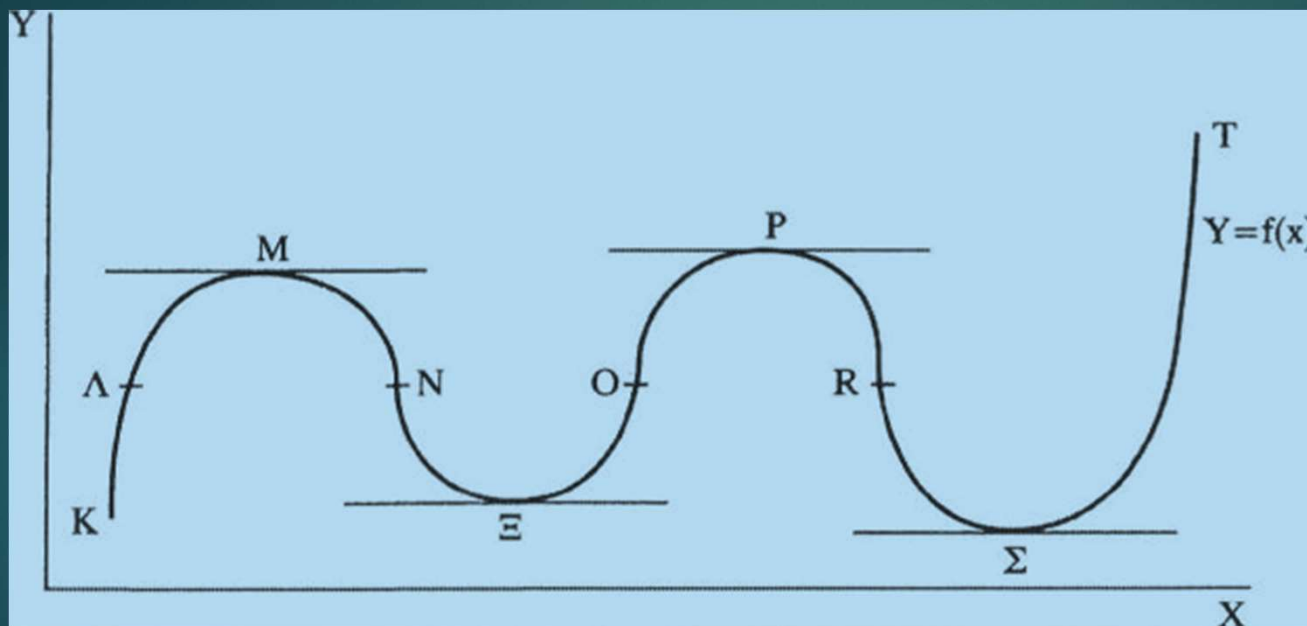
ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Η συνθήκη πρώτου βαθμού για ένα τοπικό ελάχιστο απαιτεί η πρώτη παράγωγος να είναι ίση με μηδέν:

$$\frac{dY}{dX} = 0$$

Συνθήκες για Τοπικό Ελάχιστο

ΕΝΟΤΗΤΑ 3



$$\frac{d\left(\frac{dY}{dX}\right)}{dX} \quad \text{ή} \quad \frac{d^2Y}{dX^2} > 0$$

Συνθήκες για Τοπικό Ελάχιστο

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Η συνθήκη δεύτερου βαθμού για ένα τοπικό ελάχιστο απαιτεί η δεύτερη παράγωγος να είναι θετική:

$$\frac{d\left(\frac{Y}{X}\right)}{dx} > 0 \text{ ή}$$

$$\frac{d^2Y}{dX^2} > 0$$

Συνθήκες για Ακρότατα

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Τοπικό Μέγιστο έχω όταν

$$\frac{dY}{dX} = 0$$

ΑΝΑΓΚΑΙΑ ΣΥΝΘΗΚΗ

$$\frac{d^2Y}{dX^2} < 0$$

ΕΠΑΡΚΗΣ ΣΥΝΘΗΚΗ

Τοπικό Ελάχιστο έχω όταν

$$\frac{dY}{dX} = 0$$

ΑΝΑΓΚΑΙΑ ΣΥΝΘΗΚΗ

$$\frac{d^2Y}{dX^2} > 0$$

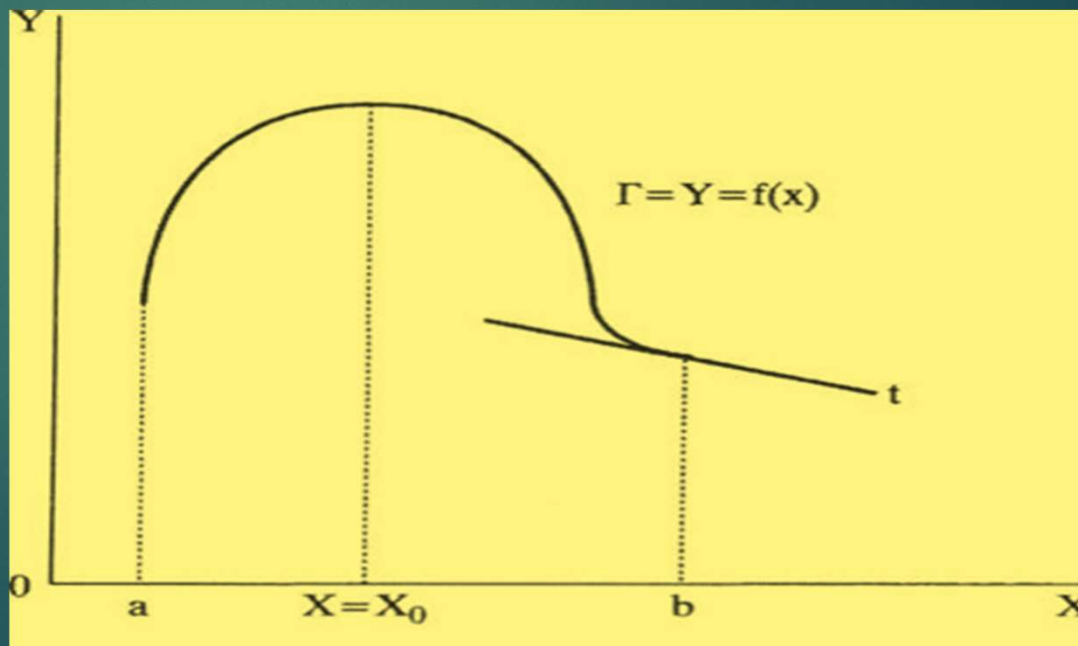
ΕΠΑΡΚΗΣ ΣΥΝΘΗΚΗ

Συνθήκες για Ακρότατα

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Τα παραπάνω ισχύουν όταν το X_0 ΔΕΝ συμπίπτει με τα άκρα της συνάρτησης.



ΕΝΟΤΗΤΑ 3

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΕΣΟΔΩΝ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Έστω η συνάρτηση ζήτησης μιας επιχείρησης έχει τη μορφή: $P = k - a \cdot Q$
Τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης είναι: $TR = P \cdot Q$

$$TR = (k - a \cdot Q) \cdot Q = k \cdot Q - a \cdot Q^2$$

Θα έχω τοπικό μέγιστο, όταν

$$\frac{d(TR)}{dQ} = 0 \quad \text{Αναγκαία συνθήκη.}$$

$$\frac{d^2(TR)}{dQ^2} < 0 \quad \text{Επαρκής συνθήκη.}$$

ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΕΣΟΔΩΝ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

$$TR = k \cdot Q - a \cdot Q^2$$

Συνεπώς, $\frac{d(TR)}{dQ} = (k \cdot Q - a \cdot Q^2) = k - 2aQ = 0$

$$\rightarrow Q = \frac{k}{2a}$$

και

$$\frac{d^2(TR)}{dQ^2} = \frac{d^2(k \cdot Q - a \cdot Q^2)}{dQ^2} = -2a < 0$$

Άρα, η (TR) παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο στο $Q = \frac{k}{2a}$

ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΕΣΟΔΩΝ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Διαγραμματικά

Εφόσον (TR) είναι μέγιστο, όταν το $Q = \frac{k}{2a}$,

η ελαστικότητα της ζήτησης θα είναι:

$$E_d = \left(\frac{P}{Q} \right) \left(\frac{dQ}{dP} \right)$$

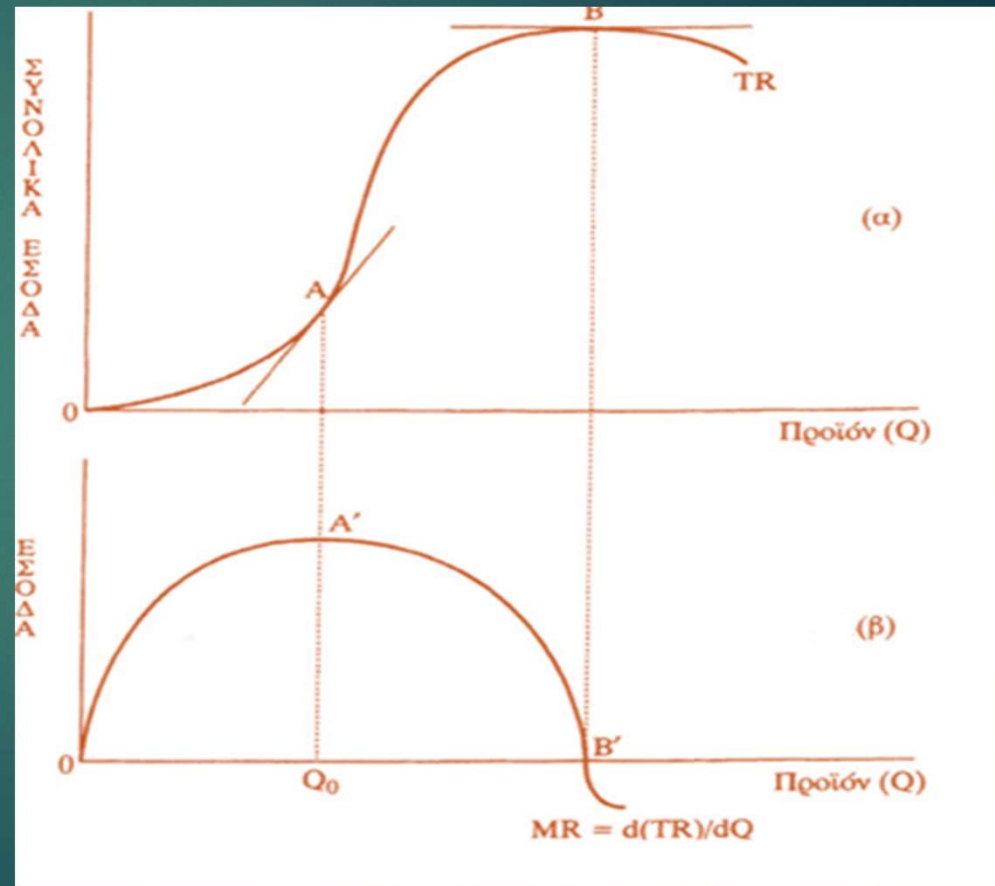
$$P = k - aQ$$

$$\frac{dQ}{dP} = -\frac{1}{a}$$

$$E_d = \left[\frac{k - aQ}{Q} \right] * \left(-\frac{1}{a} \right)$$

$$Q = \frac{k}{2a}$$

$$E_d = \frac{k - a * \frac{k}{2a}}{\frac{k}{2a}} * \left(-\frac{1}{a} \right) = -1$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω ότι τα συνολικά έσοδα μιας επιχείρησης δίνονται από την παρακάτω συνάρτηση:

$$TR = 45Q - \frac{Q^2}{2}$$

Για τοπικό μέγιστο θα πρέπει η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης των συνολικών εσόδων να είναι ίση με μηδέν:

$$\frac{d(TR)}{dQ} = 45 - Q = 0 \quad \text{Αναγκαία συνθήκη}$$

$$\text{Άρα,} \quad 45 - Q = 0 \quad \rightarrow \quad Q = 45$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η συνθήκη δεύτερης τάξης για την ύπαρξη ενός τοπικού μέγιστου απαιτεί η δεύτερη παράγωγος να είναι μικρότερη του μηδενός.

$$\frac{d^2(TR)}{dQ^2} < 0 \text{ Επαρκής συνθήκη}$$

Πράγματι,

$$\frac{d^2(TR)}{dQ^2} = \frac{d^2\left(45Q - \frac{Q^2}{2}\right)}{dQ^2} = -1 < 0$$

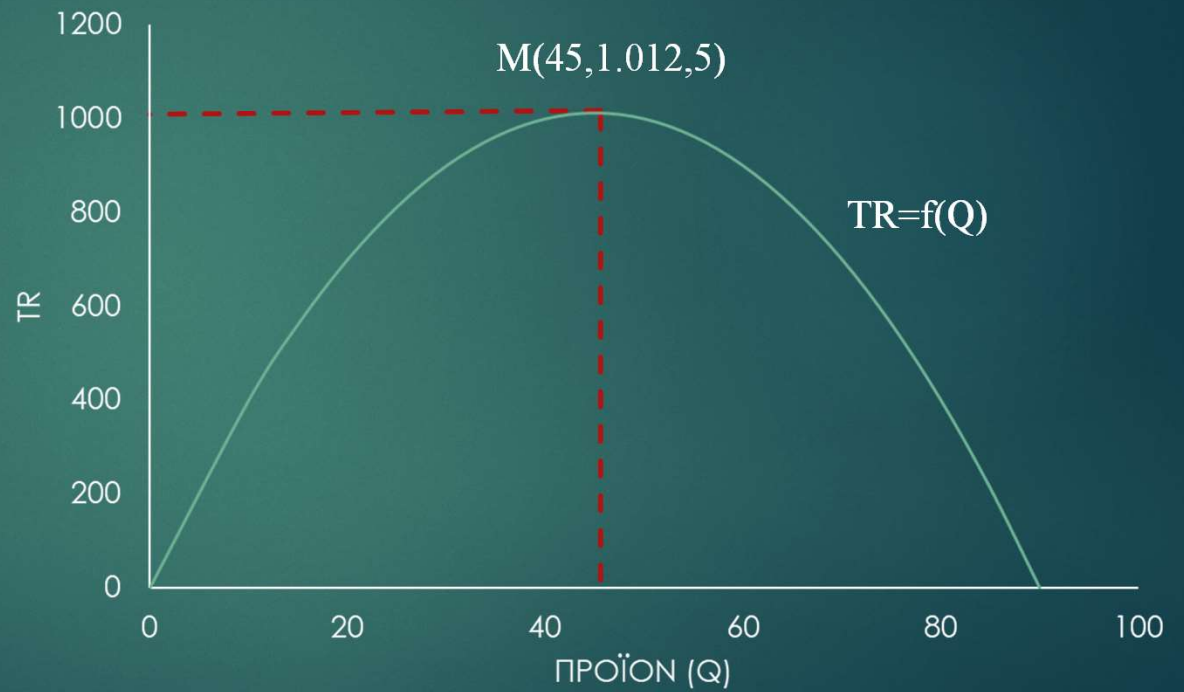
$$\text{Για } Q = 45 \quad \rightarrow \quad TR = 45(45) - \frac{45^2}{2} = 1.012,5$$

Η επιχείρηση μεγιστοποιεί τα έσοδά της, όταν παράγει 45 μονάδες προϊόντος

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Q	TR= 45Q - Q ² /2
0	0
10	400
15	562.5
20	700
25	812.5
30	900
35	962.5
40	1000
45	1012.5
50	1000
55	962.5
60	900
65	812.5
70	700
75	562.5
80	400
85	212.5
90	0



ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΜΕΣΟ ΚΟΣΤΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Έστω η συνάρτηση κόστους μιας επιχείρησης είναι:

$$TC = k + aQ + bQ^2$$

όπου, k , a , και $b > 0$

$$AC = \frac{TC}{Q}$$

$$AC = \frac{k + aQ + bQ^2}{Q} = \frac{k}{Q} + a + b \cdot Q$$



Εύρεση ελάχιστου:

$$\frac{d(AC)}{dQ} = 0$$

Αναγκαία συνθήκη

$$\frac{d^2(AC)}{dQ^2} > 0$$

Επαρκής συνθήκη

ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΜΕΣΟ ΚΟΣΤΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

$$\frac{d(AC)}{dQ} = \frac{d\left(\frac{k}{Q} + a + b \cdot Q\right)}{dQ} = \frac{d(k \cdot Q^{-1} + a + b \cdot Q)}{dQ} = -k \cdot Q^{-2} + b = 0$$

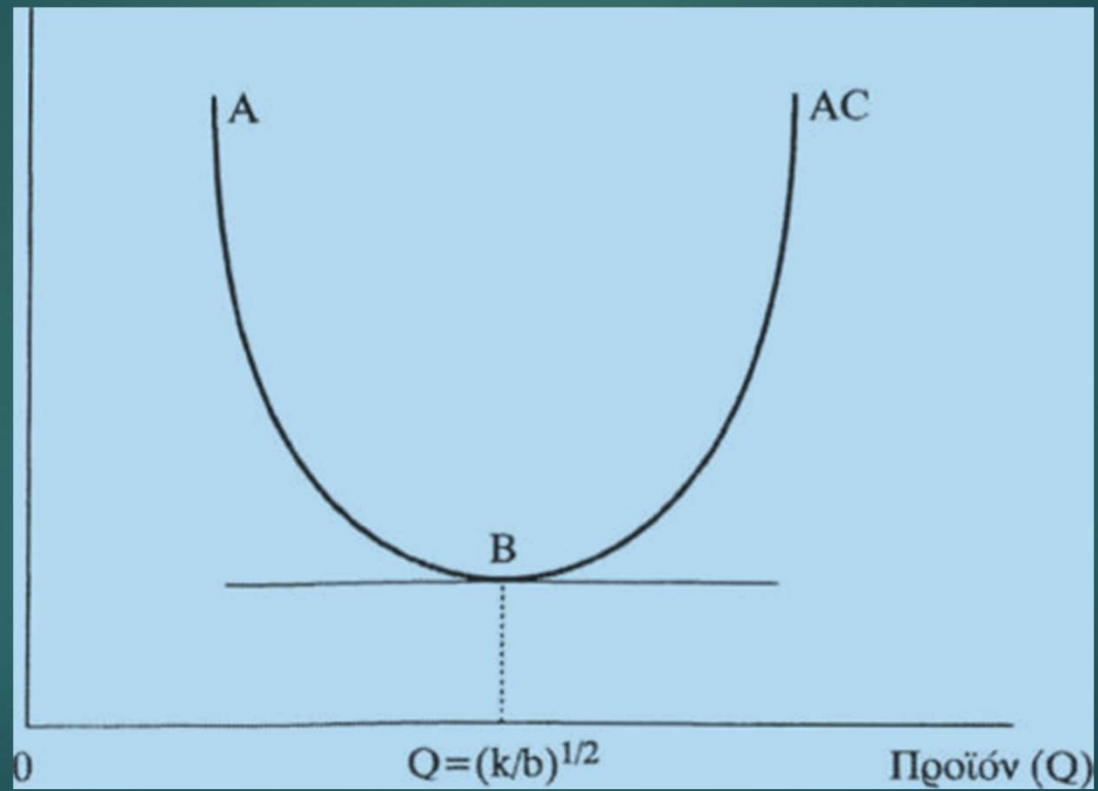
$$\longrightarrow \frac{k}{Q^2} = b \quad \longrightarrow \quad Q^2 = \frac{k}{b} \quad \longrightarrow \quad Q = \left(\frac{k}{b}\right)^{1/2}$$

$$\frac{d^2(AC)}{dQ^2} = \frac{d(-k \cdot Q^{-2} + b)}{dQ} = -(-2 \cdot k \cdot Q^{-3}) = \frac{2k}{Q^3} > 0 \text{ για κάθε } Q > 0$$

Άρα, το μέσο κόστος (AC) αποκτά τη μικρότερη τιμή, όταν $Q = \left(\frac{k}{b}\right)^{1/2}$

ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΜΕΣΟ ΚΟΣΤΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η συνάρτηση του συνολικού κόστους μιας επιχείρησης έχει την ακόλουθη μορφή:

$$TC = 3Q^2 - 16Q + 57$$

Η επιχείρηση θα ελαχιστοποιεί το κόστος παραγωγής, όταν:

$$\frac{d(TC)}{dQ} = 0 \quad \text{Αναγκαία συνθήκη}$$

$$\text{Άρα,} \quad \frac{d(TC)}{dQ} = \frac{d(3Q^2 - 16Q + 57)}{dQ} = 6 \cdot Q - 16 = 0 \quad \longrightarrow \quad Q = \frac{8}{3} = 2,67$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η συνθήκη δεύτερης τάξης για την ύπαρξη ενός τοπικού ελάχιστου απαιτεί η δεύτερη παράγωγος να είναι μεγαλύτερη του μηδενός.

$$\frac{d^2(TC)}{dQ^2} > 0 \text{ Επαρκής συνθήκη}$$

Πράγματι,

$$\frac{d^2(TC)}{dQ^2} = \frac{d(6Q - 16)}{dQ} = 6 > 0$$

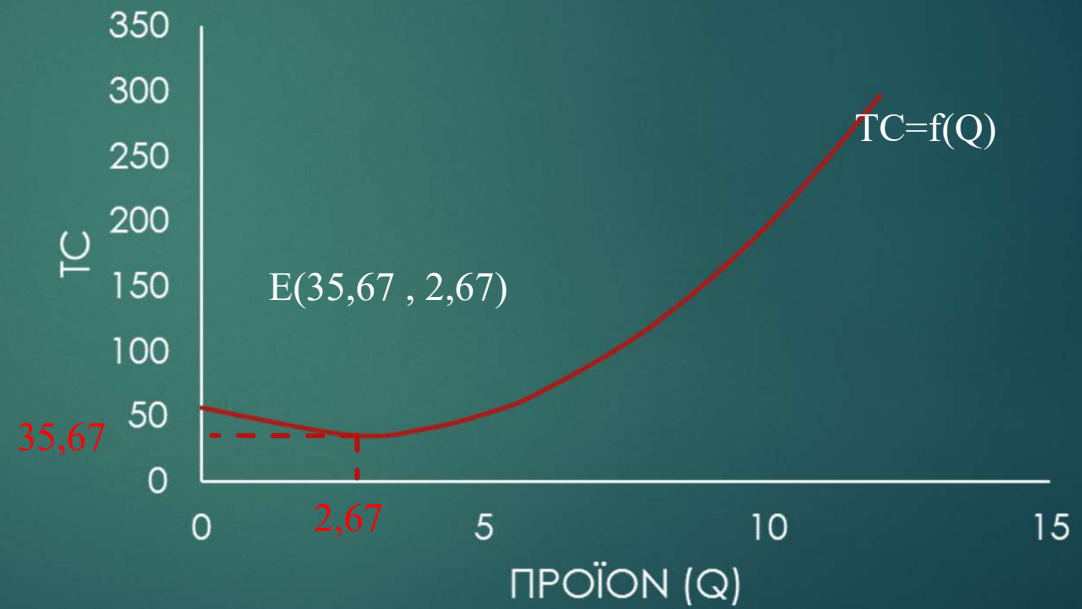
$$\text{Για } Q = \frac{8}{3} \rightarrow TC = 3 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 - 16 \cdot \left(\frac{8}{3}\right) + 57 = \frac{64 - 128}{3} + 57 = \frac{-64}{3} + 57 = 35,67$$

Η επιχείρηση ελαχιστοποιεί το κόστος της, όταν παράγει 35,67 μονάδες προϊόντος

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Q	$TC = 3Q^2 - 16Q + 57$
0	57
2.67	35.67
4	41
5	52
6	69
8	121
10	197
12	297



ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΕΡΔΩΝ ΜΟΝΟΠΩΛΙΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Κέρδος (Π) μιας μονοπωλιακής επιχείρησης

$$\Pi = TR - TC$$

όπου TR: συνολικά έσοδα

TC: συνολικό κόστος

Έστω ότι η συνάρτηση του συνολικού κόστους:

$$TC = k + a \cdot Q + b \cdot Q^2$$

, με $k, a, b, \delta, \gamma > 0$

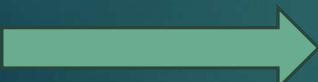
και η συνάρτηση ζήτησης:

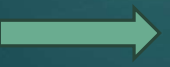
$$P = \delta - \gamma \cdot Q$$

Τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης θα είναι:

$$TR = P \cdot Q$$

$$TR = Q(\delta - \gamma Q) = \delta \cdot Q - \gamma \cdot Q^2$$


$$\Pi = TR - TC = \delta \cdot Q - \gamma \cdot Q^2 - (k + a \cdot Q + b \cdot Q^2) = \delta \cdot Q - \gamma \cdot Q^2 - k - a \cdot Q - b \cdot Q^2$$


$$\Pi = - (b + \gamma) \cdot Q^2 + (\delta - a) \cdot Q - k$$

ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΕΡΔΩΝ ΜΟΝΟΠΩΛΙΟΥ

$$\Pi = - (b+\gamma) \cdot Q^2 + (\delta-\alpha) \cdot Q - k$$

Μέγιστο κέρδος, όταν:

$$\frac{d\Pi}{dQ} = 0 \quad \text{Αναγκαία συνθήκη}$$

$$\frac{d^2\Pi}{dQ^2} < 0 \quad \text{Επαρκής συνθήκη}$$

$$\frac{d\Pi}{dQ} = \frac{d(- (b+\gamma) \cdot Q^2 + (\delta-\alpha) \cdot Q - k)}{dQ} = - 2 \cdot (b+\gamma) \cdot Q + (\delta-\alpha) = 0$$


$$\longrightarrow 2 \cdot (b+\gamma) \cdot Q = (\delta-\alpha) \quad \longrightarrow Q = \frac{\delta-\alpha}{2(b+\gamma)}$$

ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΕΡΔΩΝ ΜΟΝΟΠΩΛΙΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

$$\Pi = - (b+\gamma) \cdot Q^2 + (\delta-\alpha) \cdot Q - k$$

$$\frac{d^2 \Pi}{dQ^2} = \frac{d^2(- (b+\gamma) \cdot Q^2 + (\delta-\alpha) \cdot Q - k)}{dQ^2} = \frac{d\{- 2 \cdot (b+\gamma) \cdot Q + (\delta-\alpha)\}}{dQ} = - 2 \cdot (b+\gamma)$$


$$\frac{d^2 \Pi}{dQ^2} = - 2 \cdot (b+\gamma) < 0$$


Η μονοπωλιακή επιχείρηση μεγιστοποιεί το κέρδος για $Q = \frac{\delta-\alpha}{2(b+\gamma)}$

ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΕΡΔΩΝ ΜΟΝΟΠΩΛΙΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

$$\Pi = - (b+\gamma) \cdot Q^2 + (\delta-\alpha) \cdot Q - k$$

$$\frac{d^2 \Pi}{dQ^2} = \frac{d^2(- (b+\gamma) \cdot Q^2 + (\delta-\alpha) \cdot Q - k)}{dQ^2} = \frac{d\{- 2 \cdot (b+\gamma) \cdot Q + (\delta-\alpha)\}}{dQ} = - 2 \cdot (b+\gamma)$$


$$\frac{d^2 \Pi}{dQ^2} = - 2 \cdot (b+\gamma) < 0$$

Η μονοπωλιακή επιχείρηση μεγιστοποιεί το κέρδος για $Q = \frac{\delta-\alpha}{2(b+\gamma)}$

ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΕΡΔΩΝ ΜΟΝΟΠΩΛΙΟΥ

Εναλλακτικά,

$$TC = k + a \cdot Q + b \cdot Q^2$$

$$TR = \delta \cdot Q - \gamma \cdot Q^2$$

Μεγιστοποίηση κερδών του μονοπωλητή όταν:

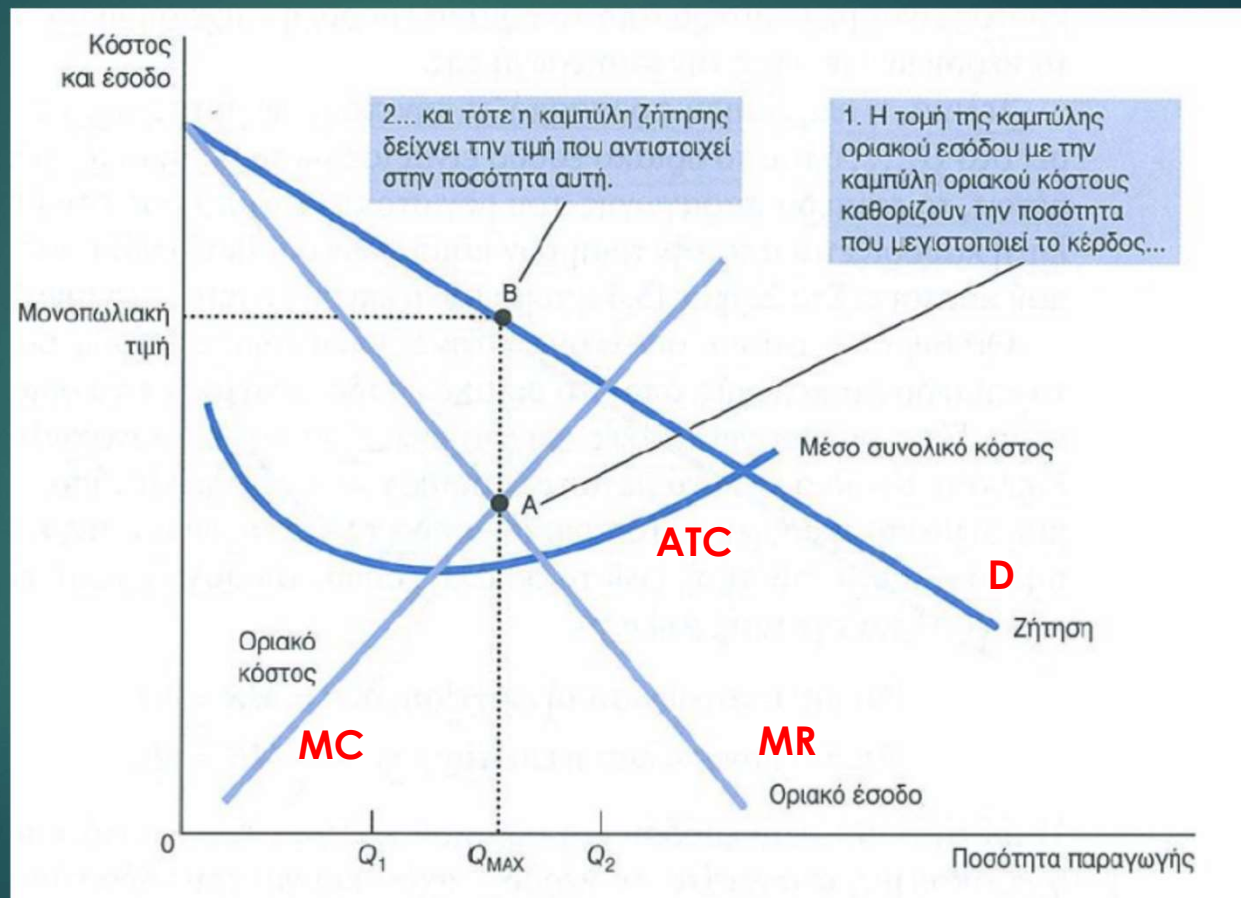
$$MR = MC$$

$$\left. \begin{aligned} MR &= \frac{d(TR)}{dQ} = \frac{d(\delta \cdot Q - \gamma \cdot Q^2)}{dQ} = -2\gamma Q + \delta \\ MC &= \frac{d(TC)}{dQ} = \frac{d(k + a \cdot Q + b \cdot Q^2)}{dQ} = 2bQ + a \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -2\gamma Q + \delta &= 2bQ + a \quad \longrightarrow \quad \delta - a = 2bQ + 2\gamma Q \\ & \longrightarrow \quad Q = \frac{\delta - a}{2(b + \gamma)} \end{aligned}$$

ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΕΡΔΩΝ ΜΟΝΟΠΩΛΙΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

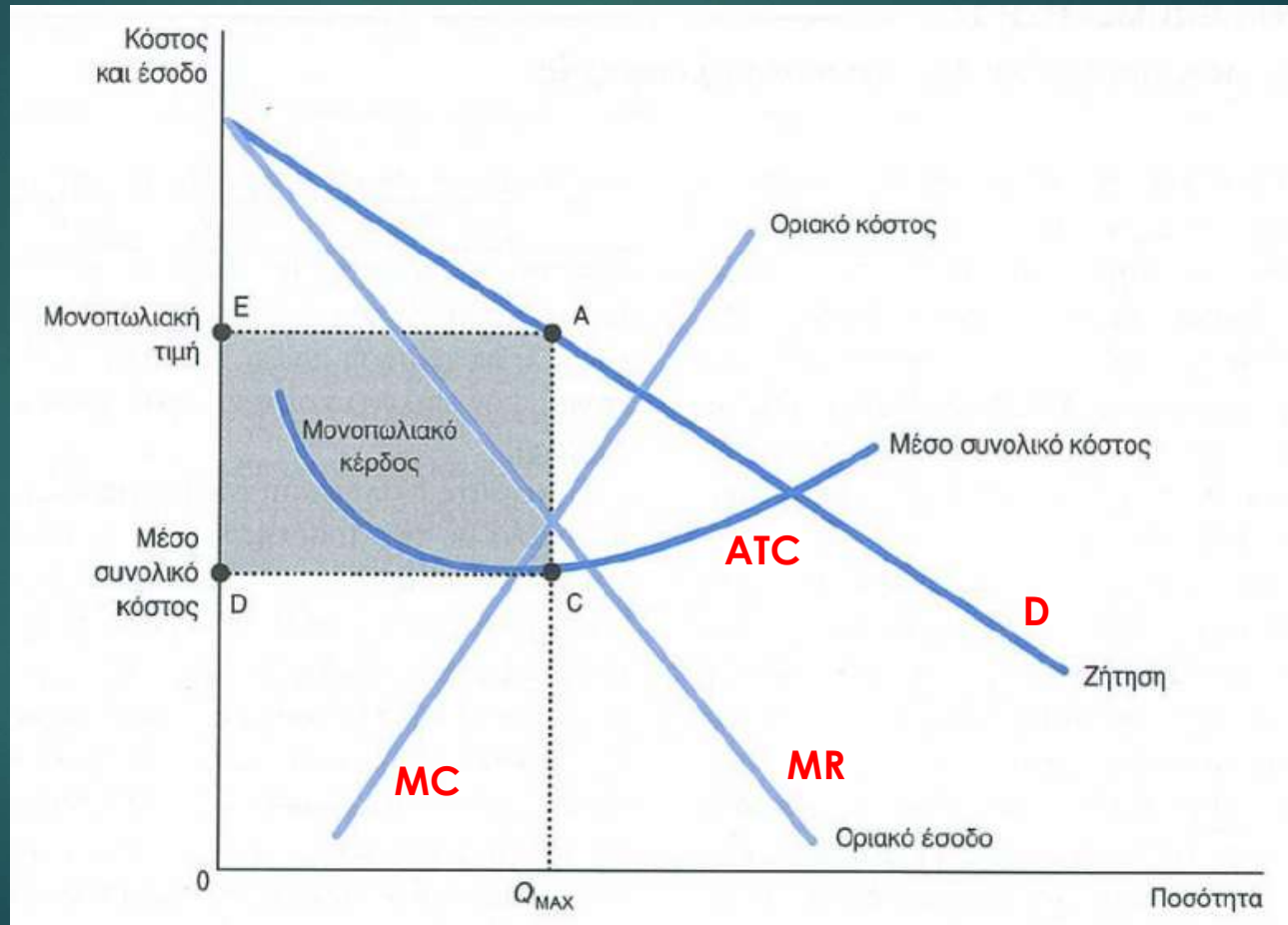
Διαγραμματικά



ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΕΡΔΩΝ ΜΟΝΟΠΩΛΙΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Διαγραμματικά



ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΕΡΔΩΝ ΜΟΝΟΠΩΛΙΟΥ..ΜΕ ΦΟΡΟ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

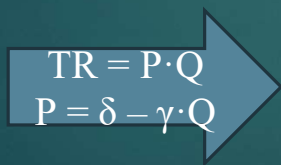
Η επιβολή ενός **εφάπαξ φόρου T**, θα μεταβάλει τη συνάρτηση του κόστους ως εξής:

$$TC = k+aQ+bQ^2+T \rightarrow TC=(k+T)+aQ+bQ^2$$

Η παραγόμενη ποσότητα Q αποκτά την ίδια τιμή

$$Q = \frac{\delta - a}{2(b + \gamma)}$$

Όμως, η νέα συνάρτηση του κέρδους: $\Pi_T = TR - TC$


$$\begin{aligned} TR &= P \cdot Q \\ P &= \delta - \gamma \cdot Q \end{aligned}$$

$$\Pi_T = \delta Q - \gamma Q^2 - [(k+T) + aQ + bQ^2]$$

ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΕΡΔΩΝ ΜΟΝΟΠΩΛΙΟΥ..ΜΕ ΦΟΡΟ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

$$\Pi = \delta \cdot Q - \gamma \cdot Q^2 - [k + a \cdot Q + b \cdot Q^2]$$

$$\Pi_T = \delta Q - \gamma Q^2 - [(k + T) + aQ + bQ^2]$$

Τι γίνεται, όμως, όταν ο φόρος (t) που επιβάλλεται, μεταβάλλεται ανάλογα με τις μεταβολές στην παραγωγή;

- Μεταβολή της παραγόμενης ποσότητας (Q)
- Μεταβολή στα κέρδη της επιχείρησης (Π)

ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΕΡΔΩΝ ΜΟΝΟΠΩΛΙΟΥ..ΜΕ ΦΟΡΟ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Έστω ότι $TC = k + a \cdot Q + b \cdot Q^2 + t \cdot Q$

Τα κέρδη της επιχείρησης $\Pi_t = \delta Q - \gamma Q^2 - [k + tQ + aQ + bQ^2]$

→

$$\Pi_t = -(\gamma + b)Q^2 + (\delta - a - t)Q - k$$

Τα κέρδη της επιχείρησης θα μεγιστοποιούνται, όταν:

$$\frac{d\Pi_t}{dQ} = 0 \quad \text{Αναγκαία συνθήκη}$$

$$\frac{d^2\Pi_t}{dQ^2} < 0 \quad \text{Επαρκής συνθήκη}$$

ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΕΡΔΩΝ ΜΟΝΟΠΩΛΙΟΥ..ΜΕ ΦΟΡΟ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

$$\frac{d\Pi t}{dQ} = \frac{d[-(\gamma+b)Q^2+(\delta-a-t)Q-k]}{dQ} = -2(\gamma+b)Q+\delta - a -t = 0 \quad \longrightarrow \quad Q = \frac{\delta-a-t}{2(\gamma+b)}$$

$$\frac{d^2\Pi t}{dQ^2} = \frac{d^2[-(\gamma+b)Q^2+(\delta-a-t)Q-k]}{dQ^2} = -2(\gamma+b) < 0$$

ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΕΣΟΔΩΝ ΤΩΝ ΦΟΡΩΝ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Τα συνολικά έσοδα από το φόρο είναι: $T = t \cdot Q$

Από προηγούμενα βρέθηκε ότι η παραγόμενη ποσότητα μετά την επιβολή του φόρου t είναι:

$$Q = \frac{(\delta - a - t)}{2(b + \gamma)}$$

Άρα,

$$T = t \cdot Q = t \cdot \frac{(\delta - a - t)}{2(b + \gamma)} \quad \longrightarrow \quad T = \frac{(\delta t - at - t^2)}{2(b + \gamma)}$$

ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΕΣΟΔΩΝ ΤΩΝ ΦΟΡΩΝ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

$$T = \frac{(\delta t - at - t^2)}{2(b+\gamma)}$$

Τα φορολογικά έσοδα μεγιστοποιούνται όταν:

$$\frac{dT}{dt} = 0 \quad \text{Αναγκαία συνθήκη}$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} < 0 \quad \text{Επαρκής συνθήκη}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT}{dt} = \frac{(\delta - a - 2t)}{2(b+\gamma)} = 0 &\rightarrow t = \frac{\delta - \alpha}{2} \\ \frac{d^2T}{dt^2} = -\frac{2}{2(b+\gamma)} = -\frac{1}{b+\gamma} < 0 \end{aligned} \right\}$$

Τα φορολογικά έσοδα της κυβέρνησης είναι μέγιστα για

$$t = \frac{\delta - \alpha}{2}$$

Οπότε, $Q = \frac{(\delta - a - t)}{2(b+\gamma)} = \frac{(\delta - a - \frac{\delta - \alpha}{2})}{2(b+\gamma)}$ \rightarrow

$$Q = \frac{(\delta - \alpha)}{4(b+\gamma)}$$

και $T = t \cdot Q = \frac{\delta - \alpha}{2} \cdot \frac{(\delta - \alpha)}{4(b+\gamma)}$ \rightarrow

$$T = \frac{(\delta - \alpha)^2}{8(b+\gamma)}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Μια οικογενειακή επιχείρηση έχει πάγιο κόστος 180 χιλ. Ευρώ ανά εβδομάδα ενώ το εβδομαδιαίο μεταβλητό κόστος δίνεται από την ακόλουθη συνάρτηση:

$$TVC = 3Q^2 - 42Q$$

όπου Q η παραγόμενη ποσότητα ανά εβδομάδα.

Η συνάρτηση της ζήτησης για οποιαδήποτε εβδομάδα του χρόνου δίνεται από την ακόλουθη συνάρτηση:

$$P = 26 - 0,8Q$$

όπου P είναι η τιμή σε χιλιάδες ευρώ κατά 100 μονάδες παραγωγής.

ΑΣΚΗΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Ζητείται:

α) Να βρεθεί η εβδομαδιαία παραγωγή, η οποία ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος (AC) ανά εβδομάδα και στη συνέχεια να προσδιοριστεί το εβδομαδιαίο συνολικό κόστος (TC) και το μέσο κόστος (AC) σ' αυτό το επίπεδο παραγωγής.

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Το εβδομαδιαίο συνολικό κόστος ισούται με το εβδομαδιαίο μεταβλητό κόστος συν το πάγιο κόστος.

Δηλαδή,

$$TC = TVC + FC \rightarrow TC = 3Q^2 - 42Q + 180$$

Το μέσο εβδομαδιαίο κόστος είναι:

$$AC = \frac{TC}{Q} \rightarrow AC = 3Q - 42 + \frac{180}{Q}$$

Για AC_{min} θα πρέπει:

$$\frac{dAC}{dQ} = 0 \text{ Αναγκαία συνθήκη}$$

$$\frac{d^2AC}{dQ^2} > 0 \text{ Επαρκής συνθήκη}$$

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

$$\frac{dAC}{dQ} = 0 \rightarrow \frac{d\left(3Q - 42 + \frac{180}{Q}\right)}{dQ} = 0 \rightarrow 3 - \frac{180}{Q^2} = 0$$

$Q^2 = 60 \rightarrow Q = 7,745$ δεκτή
 $Q = -7,745$ απορρίπτεται

$$\frac{d^2AC}{dQ^2} > 0 \rightarrow \frac{d\left(3 - \frac{180}{Q^2}\right)}{dQ} > 0 \rightarrow -(-2 \cdot 180Q^{-3}) > 0 \text{ για } Q = 7,745 \text{ ισχύει.}$$

Επομένως, η εβδομαδιαία παραγωγή που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος AC είναι ίση με $Q = 7,745$.

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Άρα, για $Q = 7,745 \rightarrow TC = 3Q^2 - 42Q + 180$
 $TC = 3 \cdot (7,745)^2 - 42 \cdot (7,745) + 180 \rightarrow$
 $TC = 179,955 - 325,29 + 180 \rightarrow$
 $TC = 34,665$

και $AC = \frac{TC}{Q} \rightarrow AC = \frac{34,665}{7,745} \rightarrow AC = 4,475$

ΑΣΚΗΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Ζητείται:

β) Να βρεθεί η εβδομαδιαία παραγωγή και η τιμή (P) που μεγιστοποιεί τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης.

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Τα εβδομαδιαία έσοδα δίνονται από:

$$TR = P \cdot Q \quad \rightarrow \quad TR = (26 - 0,8Q) \cdot Q \quad \rightarrow \quad TR = 26Q - 0,8Q^2$$

Για να μεγιστοποιούνται τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης θα πρέπει:

$$\frac{dTR}{dQ} = 0 \quad \text{Αναγκαία συνθήκη}$$

$$\frac{d^2TR}{dQ^2} < 0 \quad \text{Επαρκής συνθήκη}$$

Άρα,

$$\frac{dTR}{dQ} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d(26Q - 0,8Q^2)}{dQ} = 0 \quad \rightarrow \quad 26 - 1,6Q = 0 \quad \rightarrow \quad Q = 16,25.$$

$$\text{και} \quad \frac{d^2TR}{dQ^2} < 0 \quad \rightarrow \quad -1,6 < 0 \quad , \text{ που ισχύει.}$$

Άρα, για $Q = 16,25$, μεγιστοποιούνται τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης.

$$\text{Και η τιμή ισούται με:} \quad P = 26 - 0,8 * 16,25 \rightarrow P = 13$$

ΑΣΚΗΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Ζητείται:

γ) Να βρεθεί η εβδομαδιαία παραγωγή και η τιμή που μεγιστοποιεί τα κέρδη της επιχείρησης. Να προσδιοριστεί επίσης το επίπεδο της παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη της επιχείρησης. Να γίνει διαγραμματική παρουσίαση του συνολικού κόστους, των συνολικών εσόδων και του κέρδους της επιχείρησης.

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Τα κέρδη δίνονται από: $\Pi = TR - TC \rightarrow \Pi = 26Q - 0,8Q^2 - 3Q^2 + 42Q - 180 \rightarrow \Pi = -3,8Q^2 + 68Q - 180$

Για Π_{\max} $\frac{d\Pi}{dQ} = 0$ Αναγκαία συνθήκη

$\frac{d^2\Pi}{dQ^2} < 0$ Επαρκής συνθήκη

Συνεπώς,

$$\frac{d\Pi}{dQ} = 0 \rightarrow -7,6Q + 68 = 0 \rightarrow Q = \frac{68}{7,6} \rightarrow Q = 8,947$$

Και $\frac{d^2\Pi}{dQ^2} < 0 \rightarrow -7,6 < 0$ ικανοποιείται η επαρκής συνθήκη.

Άρα, για να μεγιστοποιούνται τα κέρδη της επιχείρησης, θα πρέπει $Q = 8,947$.

Και η τιμή ισούται με:

$$P = 26 - 0,8 * 8,947 \rightarrow P = 18,84$$

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Συνεπώς, $Q = 8,947 \cdot 100 = 894,7$ μονάδες παραγωγής ανά εβδομάδα
και $P = 18,84$ ανά 100 μονάδες παραγωγής.

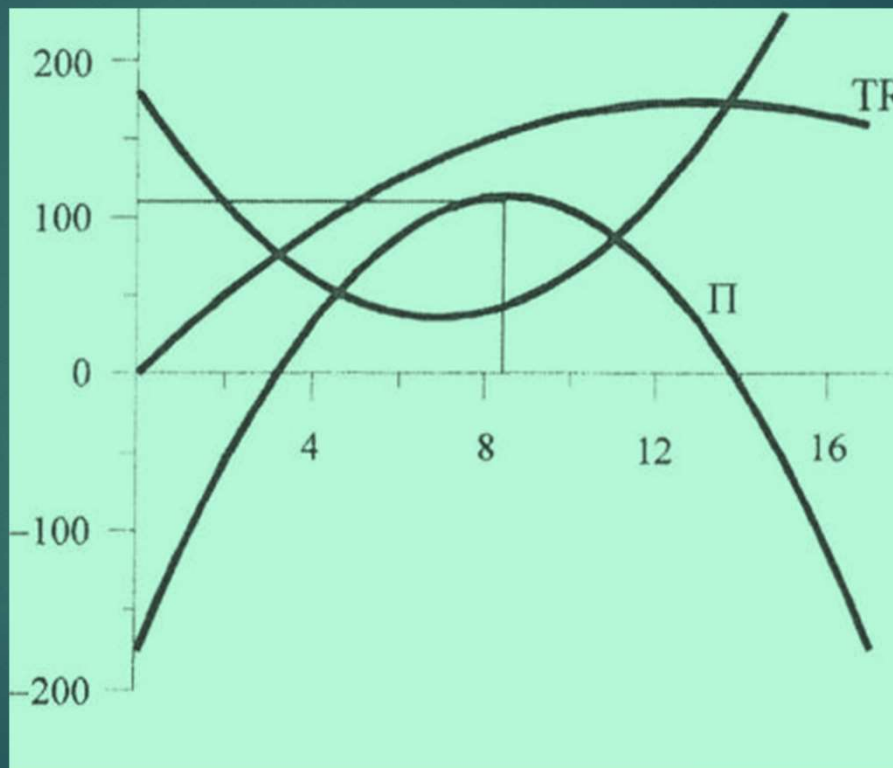
Σ' αυτό το επίπεδο παραγωγής:

$$\Pi_{\max} = -3,8 \cdot (8,947)^2 + (68 \cdot 8,947) - 180 \rightarrow \Pi_{\max} = 124,211$$

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Διαγραμματικά



ΑΣΚΗΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Ζητείται:

δ) Αν η ζήτηση της επιχείρησης πέσει κατά 20% σε οποιοδήποτε επίπεδο τιμών, να προσδιοριστεί η επίπτωση στα κέρδη της επιχείρησης. Να γίνει διαγραμματική παρουσίαση.

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Η νέα ποσότητα προϊόντος είναι:

$$Q' = 0,80 \cdot Q \rightarrow Q = Q'/0,8 \quad \text{και} \quad P = 26 - 0,8 \cdot Q'/0,8 \rightarrow P = 26 - Q'$$

Τα κέρδη:

$$\Pi = TR - TC$$

Όμως, τα συνολικά έσοδα τώρα είναι:

$$TR = P \cdot Q' \rightarrow$$

$$TR = 26Q' - Q'^2$$

Ενώ η συνάρτηση του συνολικού κόστους παραμένει η ίδια. Δηλαδή:

$$TC = 3Q'^2 - 42Q' + 180$$

Άρα,

$$\Pi = 26Q' - Q'^2 - 3Q'^2 + 42Q' - 180 \rightarrow \Pi = -4Q'^2 + 68Q' - 180$$

Για Π_{\max} :

$$\frac{d\Pi}{dQ'} = 0 \quad \text{Αναγκαία συνθήκη}$$

$$\frac{d^2\Pi}{dQ'^2} < 0 \quad \text{Επαρκής συνθήκη}$$

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

$$\frac{d\Pi}{dQ'} = 0 \quad \rightarrow \quad -8Q' + 68 = 0 \quad \rightarrow \quad Q' = \frac{68}{8} \quad \rightarrow \quad Q' = 8,5$$

$$\frac{d^2\Pi}{dQ'^2} = -8 < 0, \text{ που ισχύει}$$

Άρα Π_{\max} όταν $Q' = 8,5$ και $P = 26 - 8,5 \quad \rightarrow \quad P = 17,5$

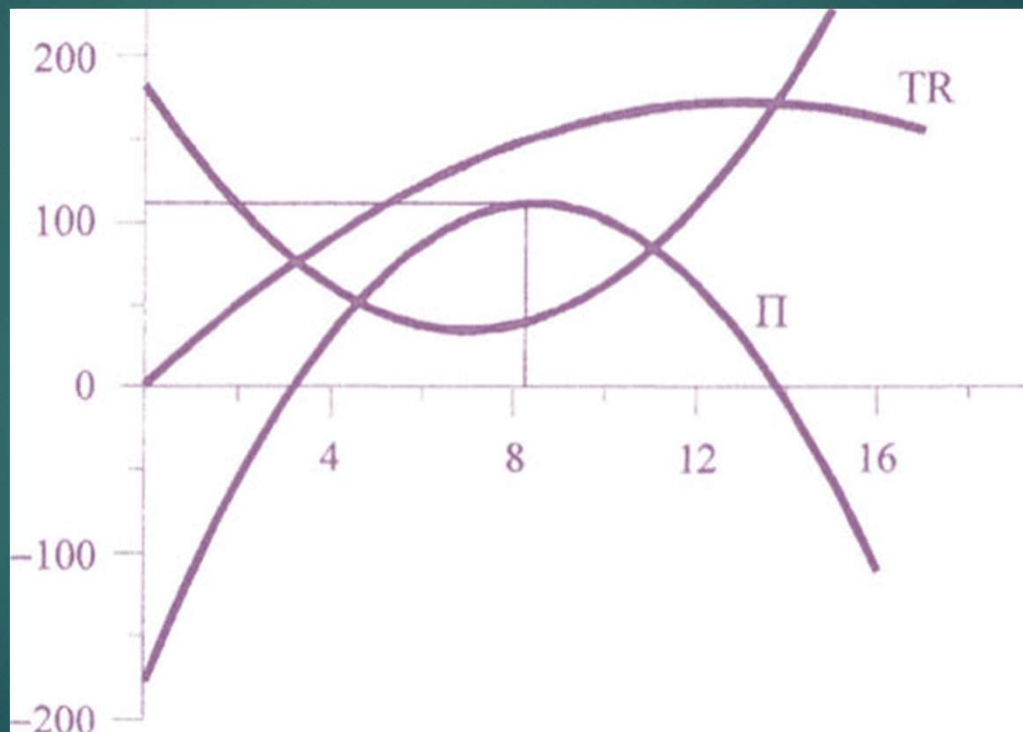
$$\Pi_{\max} = -4(8,5)^2 + (68 \cdot 8,5) - 180 \quad \rightarrow \quad \Pi_{\max} = 109$$

Συνεπώς, μειώνονται και τα κέρδη κατά $124,211 - 109 = 15,211$

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Διαγραμματικά



ΑΣΚΗΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Ζητείται:

ε) Αν ο επιχειρηματίας αποφασίσει να αλλάξει την τιμή του προϊόντος από εκείνη που μεγιστοποιεί το κέρδος στη βάση των δεδομένων του (δ) ερωτήματος, βρείτε το μέγεθος της μείωσης των κερδών συναρτήσει της μεταβολής της τιμής.

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Έστω ότι η τιμή είναι ίση με $P = 17,5$ (από το προηγούμενο ερώτημα).

Υποθέτω ότι ο επιχειρηματίας θέλει να αλλάξει την τιμή του προϊόντος κατά x (όπου $x \neq 0$).

$$P' = 17,5 + x$$

και η νέα συνάρτηση ζήτησης η: $P' = 26 - Q \rightarrow 17,5 + x = 26 - Q \rightarrow Q = 26 - 17,5 - x \rightarrow Q = 8,5 - x$

Η συνάρτηση συνολικών εσόδων και συνάρτηση συνολικού κόστους:

$$TR = P \cdot Q \rightarrow TR = (17,5 + x) \cdot (8,5 - x) \rightarrow TR = 148,75 - 9x - x^2$$

$$TC = 3Q^2 - 42Q + 180 \rightarrow TC = 3(8,5 - x)^2 - 42(8,5 - x) + 180$$

$$\rightarrow TC = 3(72,25 - 17x + x^2) - 357 + 42x + 180 \rightarrow TC = 3x^2 - 9x + 39,75$$

$$\Pi = TR - TC \rightarrow \Pi = 148,75 - 9x - x^2 - 3x^2 + 9x - 39,75 \rightarrow \Pi = -4x^2 + 109$$

Επομένως, **όταν $x = 0$, τότε $\Pi = 109$** (Π_{\max} από το δ)

ΑΣΚΗΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Ένας μονοπωλητής αντιμετωπίζει την παρακάτω συνάρτηση κόστους:

$$TC = \alpha Q^2 + \beta Q + \gamma, \quad \alpha > 0 \text{ και } \gamma > \beta$$

Η αγοραία συνάρτηση ζήτησης είναι:

$$P = \gamma - \alpha Q^2$$

Να αποδειχθεί ότι η ποσότητα που μεγιστοποιεί τα κέρδη του μονοπωλητή είναι ίση με:

$$Q = \frac{\sqrt{\alpha^2 + 3\alpha(\gamma - \beta)} - \alpha}{3\alpha}$$

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Τα συνολικά έσοδα:

$$TR = P \cdot Q \rightarrow TR = (\gamma - aQ^2) \cdot Q \rightarrow TR = \gamma Q - aQ^3$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} \Pi &= TR - TC \rightarrow \Pi = \gamma Q - aQ^3 - aQ^2 - \beta Q - \gamma \rightarrow \\ \Pi &= -aQ^3 - aQ^2 + (\gamma - \beta)Q - \gamma \end{aligned}$$

Για να μεγιστοποιούνται τα κέρδη:

$$\frac{d\Pi}{dQ} = 0 \quad \text{Αναγκαία συνθήκη}$$

$$\frac{d^2\Pi}{dQ^2} < 0 \quad \text{Επαρκής συνθήκη}$$

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

$$\frac{d\Pi}{dQ} = \frac{d(-\alpha Q^3 - \alpha Q^2 + (\gamma - \beta)Q - \gamma)}{dQ} = 0 \quad \rightarrow \quad -3\alpha Q^2 - 2\alpha Q + (\gamma - \beta) = 0$$

Διακρίνουσα: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2\alpha)^2 - 4(-3\alpha) \cdot (\gamma - \beta)$

$$= 4\alpha^2 + 12\alpha(\gamma - \beta)$$

$$= 4\alpha[\alpha + 3(\gamma - \beta)] > 0 \quad \rightarrow \quad \text{γιατί } \alpha > 0 \text{ και } \gamma > \beta$$

Άρα,

$$Q_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2\alpha \pm \sqrt{4\alpha[\alpha + 3(\gamma - \beta)]}}{2(-3\alpha)} = \frac{2\alpha \pm 2\sqrt{[\alpha^2 + 3\alpha(\gamma - \beta)]}}{-6\alpha} \quad \rightarrow \quad Q_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{[\alpha^2 + 3\alpha(\gamma - \beta)]}}{-3\alpha}$$

$$Q_1 = \frac{\alpha + \sqrt{[\alpha^2 + 3\alpha(\gamma - \beta)]}}{-3\alpha} \quad \text{Απορρίπτεται}$$

$$Q_2 = \frac{\alpha - \sqrt{[\alpha^2 + 3\alpha(\gamma - \beta)]}}{-3\alpha}$$

ΛΥΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Το Q που μεγιστοποιεί τα κέρδη του μονοπωλητή είναι η

$$Q_2 = \frac{\alpha - \sqrt{[\alpha^2 + 3\alpha(\gamma - \beta)]}}{-3\alpha}$$

$$\text{ή } Q = \frac{\sqrt{[\alpha^2 + 3\alpha(\gamma - \beta)]} - \alpha}{3\alpha}$$

Για μεγιστοποίηση των κερδών του μονοπωλητή:

$$\frac{d^2\Pi}{dQ^2} < 0 \rightarrow \frac{d^2(-\alpha Q^3 - \alpha Q^2 + (\gamma - \beta)Q - \gamma)}{dQ^2} = -6\alpha Q - 2\alpha < 0 \rightarrow -6\alpha Q < 2\alpha$$

$$\rightarrow Q > -\frac{2\alpha}{6\alpha} \quad \rightarrow \quad Q > -\frac{1}{3}$$

που ισχύει αφού η ποσότητα Q είναι θετική.

Άρα η ποσότητα που μεγιστοποιεί τα κέρδη του μονοπωλητή είναι:

$$Q = \frac{\sqrt{[\alpha^2 + 3\alpha(\gamma - \beta)]} - \alpha}{3\alpha}$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

ΤΕΛΟΣ 3^{ΗΣ} ΕΝΟΤΗΤΑΣ