PANTEION
SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES

# ΠΟΣΟΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

**Γιώργος Λούντζης** (PhD, MSc, MEng)

**Εντεταλμένος Διδάσκων (ΕΣΠΑ)**
**2025 – 2026**

## ΕΝΟΤΗΤΑ 2

# ΕΝΟΤΗΤΑ 2

1. ΜΙΚΡΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ
2. ΜΙΚΡΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΜΕ ΦΟΡΟΛΟΓΙΑ
3. ΜΙΚΡΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΣΕ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ ΜΕ ΔΥΟ ΤΟΜΕΙΣ
4. ΜΙΚΡΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΣΕ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ ΜΕ ΔΥΟ ΤΟΜΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΑΛΛΑΓΕΣ ΜΕ ΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Προσδιορισμός τιμής ισσορροπίας Pe ώστε

$$Q^s = Q^d = Q^e$$

$Q^s$ η ποσότητα που προσφέρεται σε τέλειο ανταγωνισμό

$Q^d$ η ζητούμενη ποσότητα

Αν $Q^s = -\alpha + \beta P$ και $Q^d = \gamma - \delta P$

τότε

$$\left.\begin{array}{l} Q^s = -\alpha + \beta P \\ Q^d = \gamma - \delta P \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} Q^e = -\alpha + \beta P \\ Q^e = \gamma - \delta P \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} -\alpha = Q^e - \beta P \\ \gamma = Q^e + \delta P \end{array}$$

# Κανόνας του Grammer

$-a = 1 \cdot Q^e - \beta \cdot P$

$\gamma = 1 \cdot Q^e + \delta \cdot P$

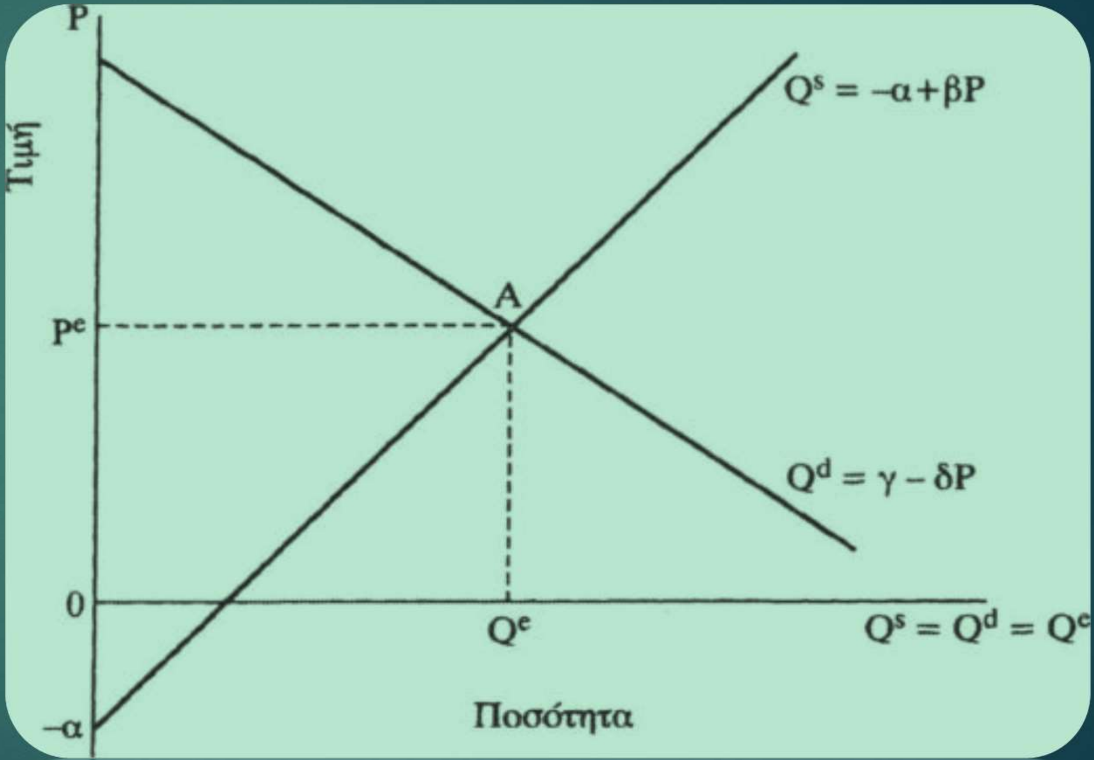
$$Q^e = \frac{\begin{vmatrix} -a & -\beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\beta \\ 1 & \delta \end{vmatrix}} = \frac{-\alpha\delta+\beta\gamma}{\delta+\beta}$$

$$P^e = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a \\ 1 & \gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\beta \\ 1 & \delta \end{vmatrix}} = \frac{\gamma+\alpha}{\delta+\beta}$$

# ΕΝΟΤΗΤΑ 2

## Διαγραμματικά

Σημείο Ισορροπίας
A (Qe, Pe)



## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ –ΑΣΚΗΣΗ

Ένας παραγωγός πετρελαίου προτίθεται να προσφέρει στην αγορά ποσότητα $Q^s$ σύμφωνα με την παρακάτω συνάρτηση $Q^s = -72 + 34P$.

Έχει επίσης εκτιμηθεί ότι η συνάρτηση ζήτησης στην αγορά είναι

$Q^d = 400 - 2P$, όπου $Q^d$ είναι η ζητούμενη ποσότητα σε επίπεδο τιμών P.

Ζητείται:

α) Η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας στην αγορά,
β) Εάν η συνάρτηση προσφοράς αλλάξει και γίνει $Q^s = -90 + 15P$, ποια θα είναι η νέα τιμή ισορροπίας;

ΛΥΣΗ

α) Η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας στην αγορά

Για τον υπολογισμό της τιμής ισορροπίας πρέπει

$Q^s = Q^d$ → $-72 + 34P = 400 - 2P$ → $36P = 472$

→ $P = 13{,}11$ (τιμή ισορροπίας)

Οπότε,

$Q^s = -72 + (34 * 13{,}11)$ → $Q^s = 373{,}77$

$Q^d = 400 - (2 * 13{,}11) = 400 - 26{,}22$ → $Q^d = 373{,}77$

Άρα, η ποσότητα ισορροπίας είναι $Q = 373{,}77$

ΛΥΣΗ

β) Εάν η συνάρτηση προσφοράς αλλάξει και γίνει $Q^s = -90 + 15P$, ποια θα είναι η νέα τιμή ισορροπίας;

Με την αλλαγή της συνάρτησης προσφοράς, θα έχω νέο σημείο ισορροπίας:

$$Q^s = Q^d$$

Όπου $Q^s = -90 + 15P$ και $Q^d = 400 - 2P$

$Q^s = Q^d \rightarrow -90 + 15P = 400 - 2P \rightarrow 17P = 490$

$\rightarrow$ **P = 28,82** (νέα τιμή ισορροπίας).

Οπότε $Q^s = -90 + (15 * 28{,}82) \rightarrow Q^s = 342{,}35$

$Q^d = 400 - 2 \cdot 28{,}82 \rightarrow Q^d = 342{,}35$

Συνεπώς, η νέα ποσότητα ισορροπίας είναι **$Q^d = 342{,}35$**

**…με φορολογία**

# ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Η τιμή του αγαθού μετά τη φορολογία γίνεται $P = P - t$

Άρα, οι συναρτήσεις της προσφοράς και της ζήτησης γίνονται:

$$Q^s = -\alpha + \beta(P - t) \rightarrow Q^s - \beta P = -\alpha - \beta t$$

$$Q^d = \gamma - \delta P \rightarrow Q^d + \delta P = \gamma$$

Για $Q^s = Q^d = Q^e$

$$\left.\begin{aligned} Q^e - \beta P &= -\alpha - \beta t \\ Q^e + \delta P &= \gamma \end{aligned}\right\}$$

κανόνας Gramer

$$Q^e = \frac{\begin{vmatrix} -a-\beta t & -\beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\beta \\ 1 & \delta \end{vmatrix}} = \frac{-\alpha\delta - t\beta\delta + \beta}{\delta + \beta}$$

$$P^e = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a-\beta t \\ 1 & \gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\beta \\ 1 & \delta \end{vmatrix}} = \frac{\gamma + \alpha + tb}{\delta + \beta}$$

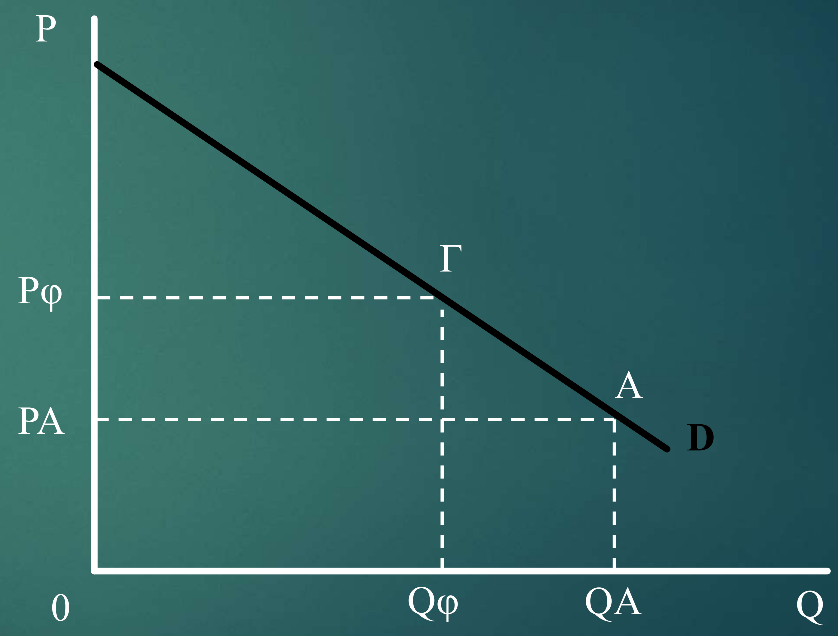
**…με φορολογία**



Διαγραμματικά

Πριν τη φορολογία
Σημείο Α (QA,PA)

Μετά τη φορολογία
Σημείο Γ (Qφ,Pφ)



**…με φορολογία**



## ΑΣΚΗΣΗ

Η συνάρτηση ζητούμενης ποσότητας ενός αγαθού Χ: $Q^d = 60 - 3P$

Η συνάρτηση προσφερόμενης ποσότητας και τιμής: $Q^s = -16 + 2P$

Ζητείται:

α) Η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας. Να γίνει διαγραμματική παρουσίαση.

β) Η επιβολή ενός φόρου 3 ευρώ ανά μονάδα προσφερόμενης ποσότητας, τι μεταβολές θα προκαλέσει πάνω στην τιμή και στην ποσότητα ισορροπίας; (Δείξτε τις μεταβολές και διαγραμματικά.)

γ) Ποιον τελικά θα επιβαρύνει ο φόρος;

**…με φορολογία**

# ΕΝΟΤΗΤΑ 2

## ΛΥΣΗ

α) Να βρεθεί τιμή και η ποσότητα ισορροπίας.

Πρέπει $Q^e = Q^d = Q^s$

$Q^d = Q^s \rightarrow 60\text{-}3P = -16+2P \rightarrow 76 = 5P \rightarrow$ $Pe = 15{,}2$ (τιμή ισορροπίας)

Συνεπώς, $Q^d = 60 - 3 \cdot 15{,}2 \rightarrow Q^d = 14{,}4$

$Q^s = -16 + 2 \cdot 15{,}2 = -16 + 30{,}4 \rightarrow Q^s = 14{,}4$

Άρα η ποσότητα ισσοροπίας $Q^e = 14{,}4$

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES
SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

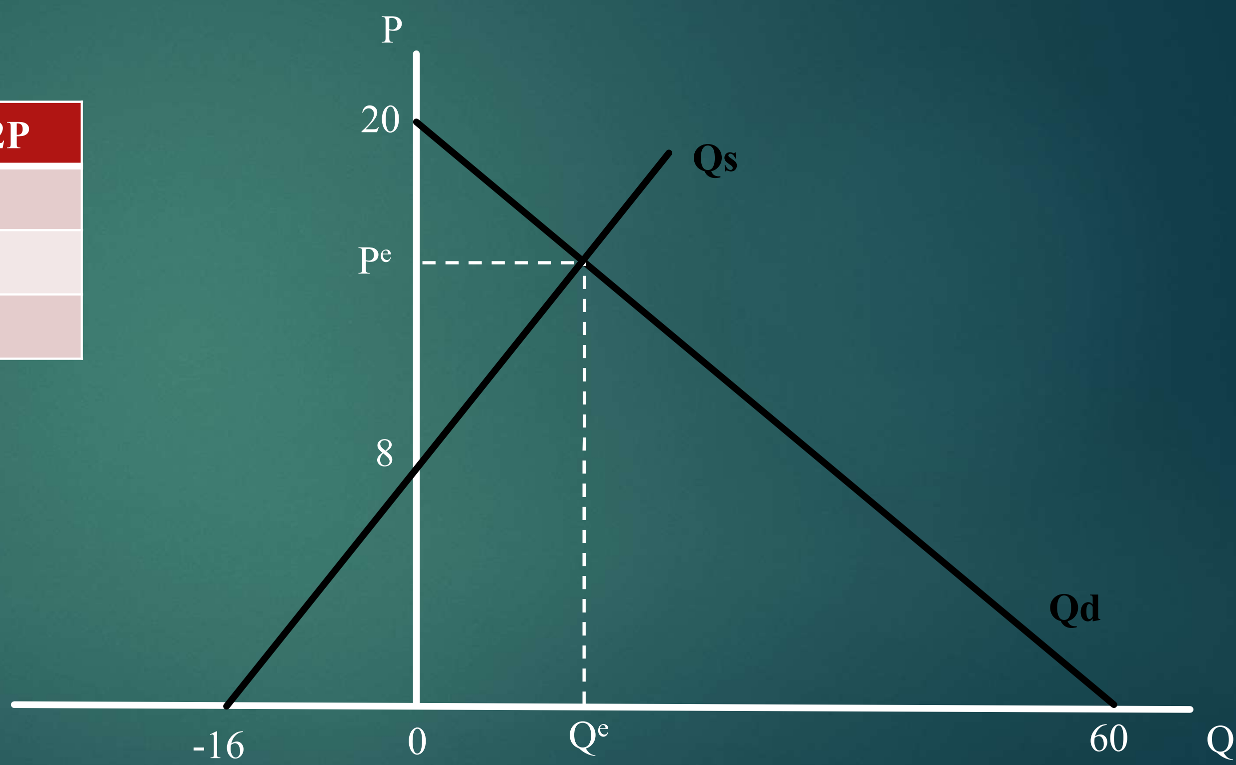


**…με φορολογία**

ΛΥΣΗ

| P | $Q^d = 60 - 3P$ | $Q^s = -16 + 2P$ |
|---|---|---|
| 0 | 60 | -16 |
| 20 | 0 | 24 |
| 8 | 36 | 0 |

Σημείο ισορροπίας
(Qe,Pe) = (14,4 , 15,2)



**…με φορολογία**



ΛΥΣΗ

β) Η επιβολή ενός φόρου 3 ευρώ ανά μονάδα προσφερόμενης ποσότητας, τι μεταβολές θα προκαλέσει πάνω στην τιμή και στην ποσότητα ισορροπίας;

Η συνάρτηση προσφοράς γίνεται: $Q_t^s$= -16+2· $(P-3)$ → $Q_t^s$= -22+2P

γιατί P*= P-3€

Άρα το νέο σημείο ισορροπίας είναι $Q_t^s = Q^d = Q^{e\prime}$

60 - 3P = -22 + 2P → 82 = 5P → $P^{e\prime}$ = 16,4 (η νέα τιμή ισορροπίας)

Συνεπώς, $Q^d$ = 60 - 3·16,4 → $Q^d$ = 10,8

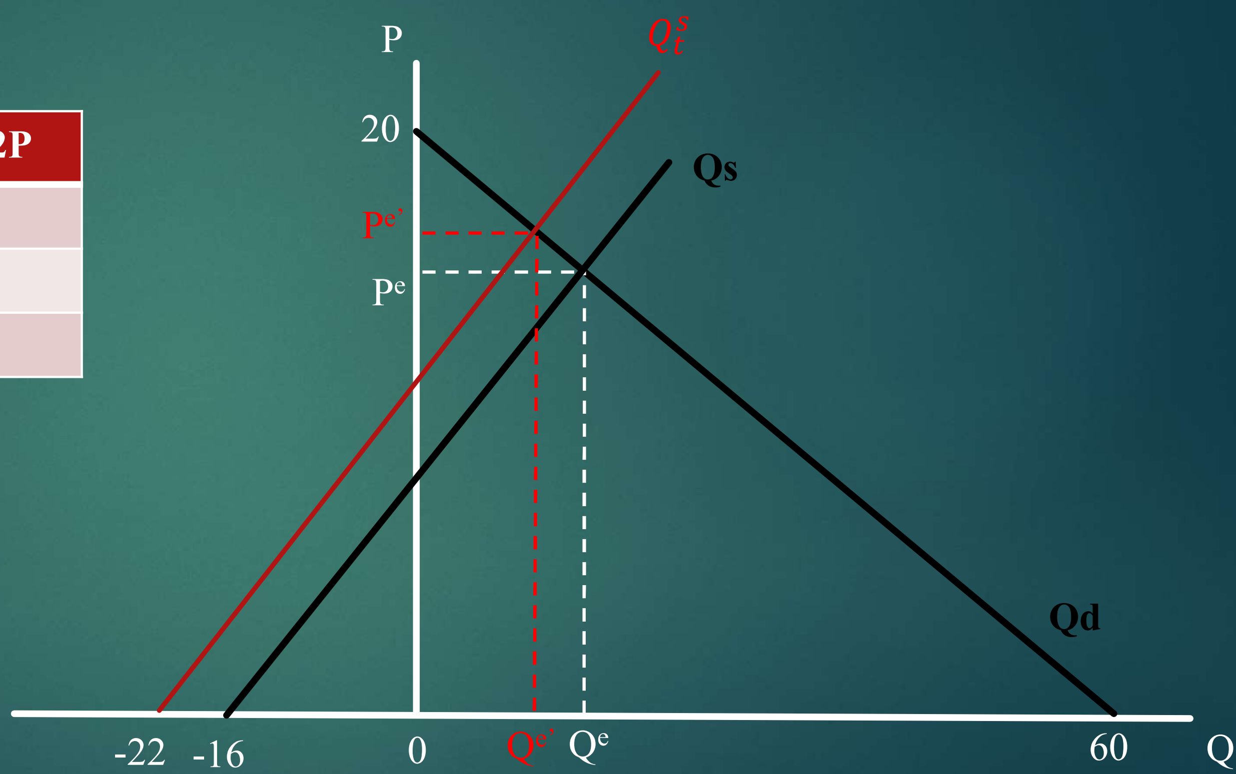
$Q_t^s$ = -22 + 2·16,4 → $Q_t^s$ = 10,8

**…με φορολογία**

ΛΥΣΗ

| P | $Q^d = 60 - 3P$ | $Q_t^s = -22 + 2P$ |
|---|---|---|
| 0 | 60 | -22 |
| 20 | 0 | 18 |
| 11 | 27 | 0 |

Νέο Σημείο ισορροπίας
(Qe’,Pe’) = (10,8 , 16,4)



ΛΥΣΗ

γ) Ποιον τελικά θα επιβαρύνει ο φόρος;

Για τον καταναλωτή, η P = 15,2€ σε $P_t$= 16,4 αυξήθηκε $P_t$ - P = 16,4 - 15,2 = 1,2€

Άρα, το ποσοστό του φόρου που επιβαρύνεται ο καταναλωτής για τον φόρο των 3€:

$$\left(\frac{1,2}{3}\right) * 100 = 40\% \text{ του φόρου}$$

Για τον παραγωγό, η P = 15,2€ μειώθηκε σε $P_t$ = P - t = 16,4 - 3 = 13,4€
δηλαδή κατά 1,8€ (η νέα τιμή ισορροπίας μείον φόρος)

Άρα, το ποσοστό του φόρου που επιβαρύνεται ο παραγωγός για τον φόρο των 3€:

$$\left(\frac{1,8}{3}\right) * 100 = 60\% \text{ του φόρου}$$

**Μακροοικονομικό υπόδειγμα ισορροπίας οικονομίας με δύο τομείς**

Έστω ότι έχω δύο τομείς → Αγορά Προϊόντος, Αγορά Χρήματος

| | | |
|---|---|---|
| Συνολική κατανάλωση | $C = \alpha + \beta Y$ | $(\alpha > 0,\ 0 < \beta < 1)$ |
| Σύνολο ιδιωτικής επένδυσης | $I = \gamma + \delta r$ | $(\gamma > 0,\ \delta < 0)$ |
| Θ.Ι. της αγοράς προϊόντος | $Y = C + I$ | |

r: επιτόκιο
Y: εισόδημα οικονομίας

| | | |
|---|---|---|
| Ζήτηση χρήματος | $M_D = \lambda Y + \sigma + \mu r$ | $(\lambda, \sigma > 0,\ \mu < 0)$ |
| Προσφορά χρήματος | $Ms = M_0$ | |
| Θ.Ι. της αγοράς χρήματος | $M_D = M_S$ | |

## Μακροοικονομικό υπόδειγμα ισορροπίας οικονομίας με δύο τομείς

***Συνθήκη ισορροπίας στην αγορά προϊόντος***

$Y = C+I$ → $C = \alpha+\beta Y$, $I = \gamma+\delta r$

→ $Y = \alpha+\beta Y+\gamma+\delta r$

→ $\mathbf{Y-\beta Y = \alpha+\gamma+\delta r}$

***Συνθήκη ισορροπίας στην αγορά χρήματος***

$M_D = M_s$ → $M_D = \lambda Y+\sigma+\mu r$, $Ms = M_0$

→ $M_0 = \lambda Y+\sigma+\mu r$

→ $\mu r = M_0-\lambda Y-\sigma$

# ΕΝΟΤΗΤΑ 2

**Μακροοικονομικό υπόδειγμα ισορροπίας οικονομίας με δύο τομείς**

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{Y-\beta Y = \alpha+\gamma+\delta r} \\ \mu r = M_0-\lambda Y-\sigma \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} Y-\beta Y-\delta r = \alpha+\gamma \\ \mu r = M_0-\lambda Y-\sigma \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} (1-\beta)Y-\delta r = \alpha+\gamma \\ \lambda Y+\mu r = M_0-\sigma \end{array}\right\}$$

κανόνας Gramer

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha+\gamma & -\delta \\ M0-\sigma & \mu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-\beta & -\delta \\ \lambda & \mu \end{vmatrix}} = \frac{(\alpha+\gamma)\mu-(-\delta)(M0-\sigma)}{\mu(1-\beta)-(-\delta)\lambda}$$

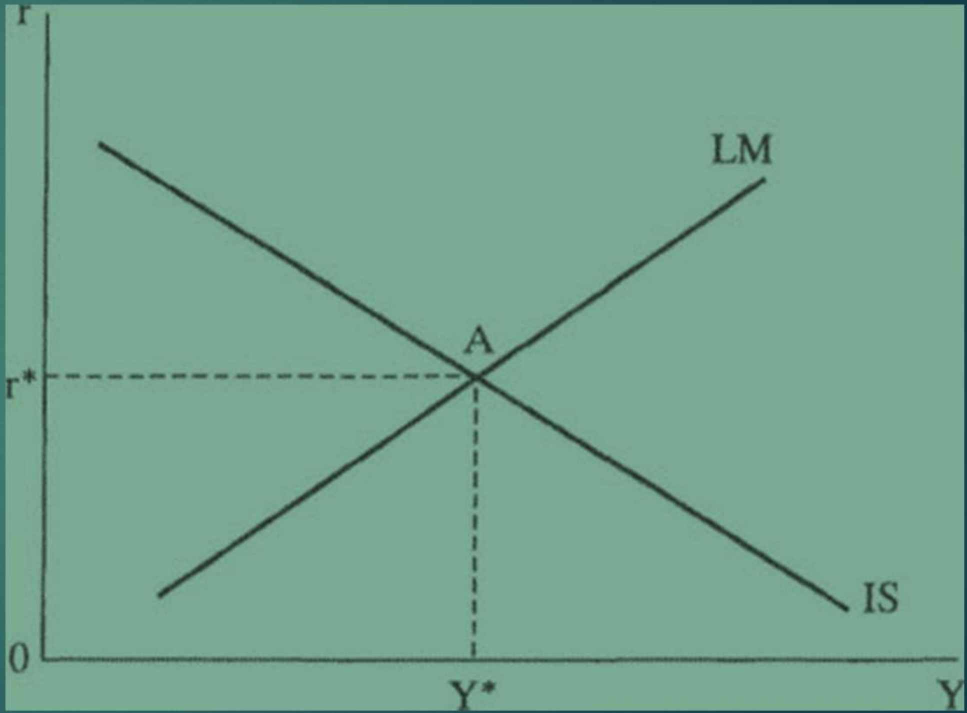
$$r = \frac{\begin{vmatrix} 1-\beta & \alpha+\gamma \\ \lambda & M0-\sigma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-\beta & -\delta \\ \lambda & \mu \end{vmatrix}} = \frac{(1-\beta)(M0-\sigma)-\lambda(\alpha+\gamma)}{\mu(1-\beta)-(-\delta)\lambda}$$

**Μακροοικονομικό υπόδειγμα ισορροπίας οικονομίας με δύο τομείς**

Διαγραμματικά

Συνθήκη ισορροπίας αγοράς προϊόντος
$Y\text{-}\beta Y = \alpha+\gamma+\delta r$ (IS)

Συνθήκη ισορροπίας αγοράς χρήματος
$\mu r = M_0\text{-}\lambda Y\text{-}\sigma$ (LM)



## Μακροοικονομικό υπόδειγμα ισορροπίας οικονομίας με δύο τομείς… με συναλλαγές με το εξωτερικό

***Συνθήκη ισορροπίας στην αγορά προϊόντος***

$Y = C+I+X-M$

$C = \alpha+\beta Y$
$I = \gamma+\delta r$
$M = A+mY$

$X = Xo$ εξαγωγές

$M = A+mY$ εισαγωγές

→ $Y = \alpha+\beta Y+\gamma+\delta r+Xo-A-mY$

→ $Y-\beta Y+mY-\delta r = \alpha+\gamma+Xo-A$

→ $(1-\beta+m)Y-\delta r = \boldsymbol{\alpha+\gamma}+Xo\boldsymbol{-A}$

***Συνθήκη ισορροπίας στην αγορά χρήματος (όπως πριν)***

$\mu r = M_0-\lambda Y-\sigma$

# ΕΝΟΤΗΤΑ 2

**Μακροοικονομικό υπόδειγμα ισορροπίας οικονομίας με δύο τομείς… με συναλλαγές με το εξωτερικό**

$$\left.\begin{array}{l}(1-\beta+m)Y-\delta r = \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}+Xo-\mathbf{A} \\ \mu r = M_0-\lambda Y-\sigma\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}(1-\beta+m)Y-\delta r = \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}+Xo-\mathbf{A} \\ \lambda Y+\mu r = M_0-\sigma\end{array}\right\}$$

κανόνας Gramer

$$Y=\frac{\begin{vmatrix}\alpha+\gamma+X0-A & -\delta \\ M0-\sigma & \mu\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1-\beta+m & -\delta \\ \lambda & \mu\end{vmatrix}}=\frac{(\alpha+\gamma+X_0-A)\mu-(-\delta)(M_0-\sigma)}{\mu(1-\beta+m)-(-\delta)\lambda}$$

$$r=\frac{\begin{vmatrix}1-\beta+m & \alpha+\gamma+X0-A \\ \lambda & M0-\sigma\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1-\beta+m & -\delta \\ \lambda & \mu\end{vmatrix}}=\frac{(1-\beta+m)(M_0-\sigma)-\lambda(\alpha+\gamma+X_0-A)}{\mu(1-\beta)-(-\delta)\lambda}$$

# ΕΝΟΤΗΤΑ 2

**Μακροοικονομικό υπόδειγμα ισορροπίας οικονομίας με δύο τομείς… με συναλλαγές με το εξωτερικό**

Διαγραμματικά

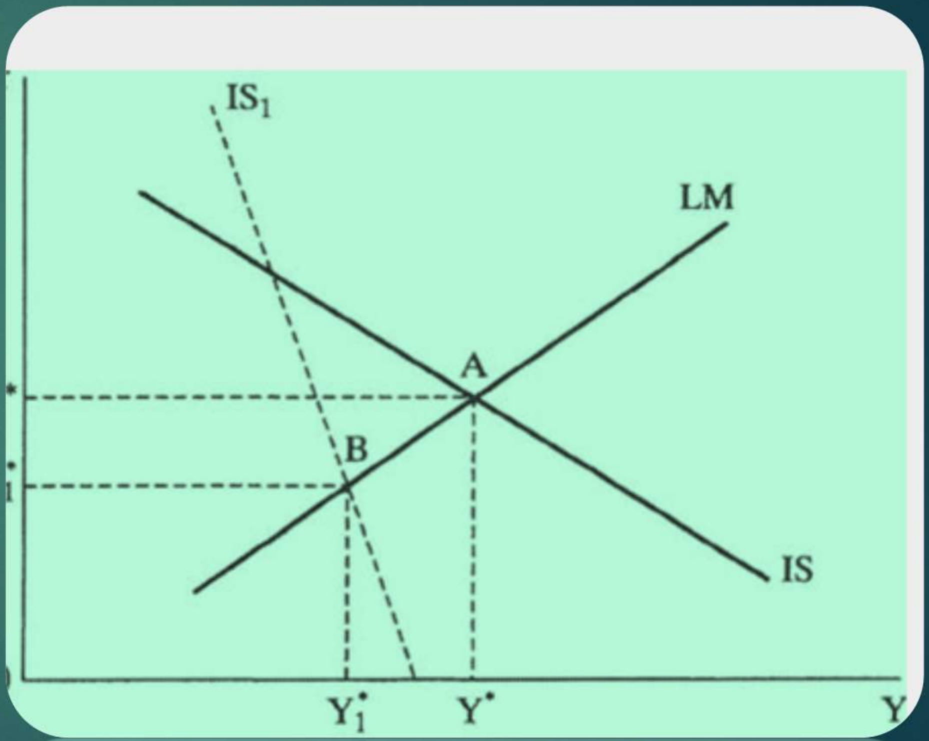
Συνθήκη ισορροπίας αγοράς προϊόντος

$Y-\beta Y = \alpha+\gamma+\delta r$ (IS)

$Y-\beta Y+mY-\delta r = \alpha+\gamma+Xo-A$ (IS1)*

Συνθήκη ισορροπίας αγοράς χρήματος

$\mu r = M_0-\lambda Y-\sigma$ (LM)




*συναλλαγές με το εξωτερικό

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES
SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

# ΕΝΟΤΗΤΑ 2

**Πρότυπο αγοράς δύο προϊόντων Χ και Ψ**

$$\left.\begin{aligned} Q_{dx} &= \alpha+\beta P_x+\gamma P_\psi \\ Q_{d\psi} &= \delta+\varepsilon P_x+\zeta P_\psi \end{aligned}\right\}$$ Συναρτήσεις ζήτησης των δύο προϊόντων

$$\left.\begin{aligned} Q_{s\chi} &= \eta+\theta P_\chi+\iota P_\psi \\ Q_{s\psi} &= \kappa+\lambda P_\chi+\mu P_\psi \end{aligned}\right\}$$ Συναρτήσεις προσφοράς των δύο προϊόντων

$$\left.\begin{aligned} Q_{dx} &= Qs_x \\ Q_{d\psi} &= Q_{s\psi} \end{aligned}\right\}$$ Συνθήκες Ισορροπίας με δύο προϊόντα. Ρχ και Ρψ είναι οι τιμές των δύο αγαθών και τα α – μ

**Πρότυπο αγοράς δύο προϊόντων Χ και Ψ**

Για να βρούμε την τιμή P και την ποσότητα Q ισορροπίας για δύο αγαθά, θα πρέπει να λυθεί το σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

$$Q_{dx} = \alpha+\beta P_x+\gamma P_\psi$$

$$Q_{d\psi} = \delta+\varepsilon P_x+\zeta P_\psi$$

$$Q_{s\chi} = \eta+\theta P_\chi+\iota P_\psi$$

$$Q_{s\psi} = \kappa+\lambda P_\chi+\mu P_\psi$$

$$Q_{dx} = Qs_x$$

$$Q_{d\psi} = Q_{s\psi}$$

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES
SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT



**Πρότυπο αγοράς δύο προϊόντων Χ και Ψ**

$$\left.\begin{aligned} \begin{Vmatrix} Qdx \\ Qd\psi \end{Vmatrix} &= \begin{Vmatrix} \alpha \\ \delta \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \beta & \gamma \\ \varepsilon & \zeta \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} Px \\ P\psi \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} Qsx \\ Qs\psi \end{Vmatrix} &= \begin{Vmatrix} \eta \\ \kappa \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \theta & \iota \\ \lambda & \mu \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} Px \\ P\psi \end{Vmatrix} \end{aligned}\right\} \begin{Vmatrix} Qdx \\ Qd\psi \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Qsx \\ Qs\psi \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} \alpha \\ \delta \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \beta & \gamma \\ \varepsilon & \zeta \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} Px \\ P\psi \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \eta \\ \kappa \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \theta & \iota \\ \lambda & \mu \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} Px \\ P\psi \end{Vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Vmatrix} \beta & \gamma \\ \varepsilon & \zeta \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} Px \\ P\psi \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} \theta & \iota \\ \lambda & \mu \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} Px \\ P\psi \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \eta \\ \kappa \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} \alpha \\ \delta \end{Vmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{Vmatrix} \beta & \gamma \\ \varepsilon & \zeta \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} \theta & \iota \\ \lambda & \mu \end{Vmatrix} \right\} \begin{Vmatrix} Px \\ P\psi \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \eta - \alpha \\ \kappa - \delta \end{Vmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{Vmatrix} \beta - \theta & \gamma - \iota \\ \varepsilon - \lambda & \zeta - \mu \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} Px \\ P\psi \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \eta - \alpha \\ \kappa - \delta \end{Vmatrix}} \qquad (A \circ P = B)$$

**Πρότυπο αγοράς δύο προϊόντων Χ και Ψ**

κανόνας Gramer

$$P_\chi = \frac{\begin{vmatrix} \eta-\alpha & \gamma-\iota \\ \kappa-\delta & \zeta-\mu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta-\theta & \gamma-\iota \\ \varepsilon-\lambda & \zeta-\mu \end{vmatrix}} = \frac{(\eta-\alpha)(\zeta-\mu)-(\gamma-\iota)(\kappa-\delta)}{(\beta-\theta)(\zeta-\mu)-(\gamma-\iota)(\varepsilon-\lambda)}$$

$$P_\psi = \frac{\begin{vmatrix} \beta-\theta & \eta-\alpha \\ \varepsilon-\lambda & \kappa-\delta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta-\theta & \gamma-\iota \\ \varepsilon-\lambda & \zeta-\mu \end{vmatrix}} = \frac{(\beta-\theta)(\kappa-\delta)-(\eta-\alpha)(\varepsilon-\lambda)}{(\beta-\theta)(\zeta-\mu)-(\gamma-\iota)(\varepsilon-\lambda)}$$

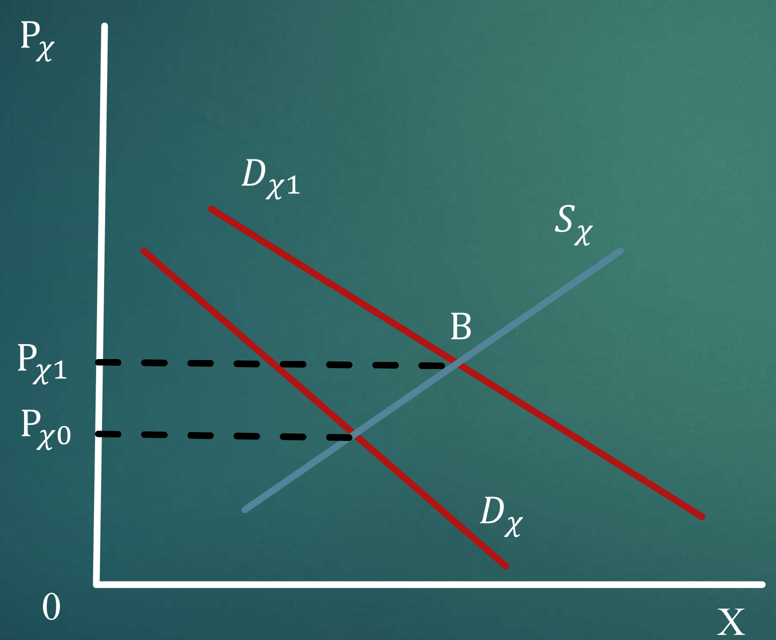
Αντικαθιστώντας στις

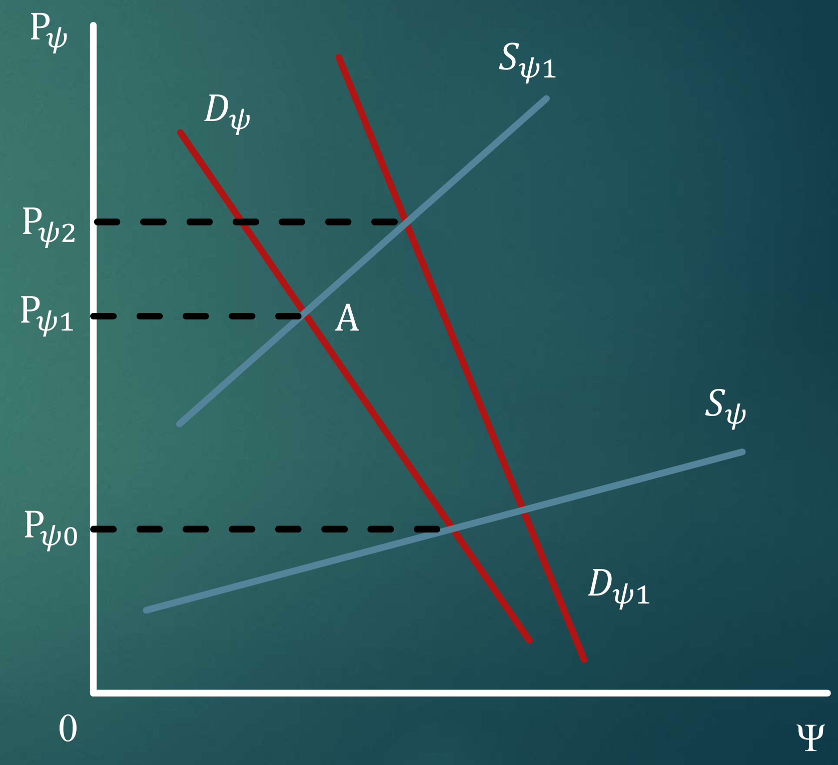
$$Q_{dx} = \alpha+\beta P_x+\gamma P_\psi$$
$$Q_{s\chi} = \eta+\theta P_\chi+\iota P_\psi$$

βρίσκουμε και τις ποσότητες ισορροπίας.

**Πρότυπο αγοράς δύο προϊόντων Χ και Ψ**

Διαγραμματικά



**Πρότυπο αγοράς δύο προϊόντων Χ και Ψ**

## ΑΣΚΗΣΗ

Έστω οι συναρτήσεις ζήτησης/προσφοράς για τα αλληλοεξαρτώμενα προϊόντα f και z:

$$Q_{df} = 8 - 2P_f + P_z \qquad Q_{sf} = -5 + 3P_f$$

$$Q_{dz} = 16 + P_f - P_z \qquad Q_{sz} = -1 + 2P_Z$$

Να εκτιμηθούν οι τιμές και οι ποσότητες ισορροπίας του προτύπου αγοράς για τα προϊόντα (f) και (z).

**Πρότυπο αγοράς δύο προϊόντων Χ και Ψ**

# ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

Για να υπάρχει ισορροπία, πρέπει:

$$Q_{df} = Q_{sf}$$
$$Q_{dz} = Q_{sz}$$

$$Q_{df} = Q_{sf} \rightarrow 8 - 2P_f + P_z = -5 + 3P_f \rightarrow 5P_f - P_z = 13$$
$$Q_{dz} = Q_{sz} \rightarrow 16 + P_f - P_z = -1 + 2P_z \rightarrow -P_f + 3P_z = 17$$

κανόνας Gramer

$$P_f = \frac{\begin{vmatrix} 13 & -1 \\ 17 & +3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & +3 \end{vmatrix}} = \frac{(13*3)-(-1*17)}{(5*3)-((-1*(-1))} = \frac{56}{14}$$

$$\rightarrow P_f = 4$$

$$P_z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & +13 \\ -1 & +17 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & +3 \end{vmatrix}} = \frac{(5*17)-(13*(-1))}{(5*3)-((-1*(-1))} = \frac{98}{14}$$

$$\rightarrow P_z = 7$$

**Πρότυπο αγοράς δύο προϊόντων Χ και Ψ**



ΛΥΣΗ

→ $P_f = 4$

→ $P_z = 7$

Οπότε οι ποσότητες ισορροπίας:

$Q_{df} = 8 - 2P_f + P_z = 8 - 2*4 + 7$ → $Q_{df} = 7$

$Q_{dz} = 16 + P_f - P_z = 16 + 4 - 7$ → $Q_{dz} = 13$

## ΑΣΚΗΣΗ

Η ζήτηση στην αγορά για ένα προϊόν δίδεται από τη συνάρτηση: $Q^d = 36-(\frac{1}{3})P$

Η συνάρτηση προσφοράς είναι: $Q^s + 9 - 0{,}5P = 0$

Ζητείται:

α) Να εκτιμηθεί η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας στην αγορά.

β) Να εκτιμηθούν οι ελαστικότητες ζήτησης και προσφοράς στην τιμή ισορροπίας.

γ) Αν η κυβέρνηση επιβάλλει φόρο t ανά μονάδα προσφερόμενης ποσότητας και αν οι παραγωγοί προσαρμόσουν τη συνάρτηση προσφοράς για να συμπεριλάβουν το φόρο, τότε:
i) Να εκτιμηθούν οι ελαστικότητες ζήτησης και προσφοράς στη νέα τιμή ισορροπίας, η οποία συμπεριλαμβάνει τους φόρους, όταν t = 10 ευρώ. Να γίνει διαγραμματική παρουσίαση,
ii) Ποιος πληρώνει το φόρο;

## ΛΥΣΗ

α) Να εκτιμηθεί η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας στην αγορά.

Πρέπει $Q^e = Q^d = Q^s$

$Q^s + 9 - 0{,}5P = 0 \rightarrow Q^s = -9 + 0{,}5P \xrightarrow{Q^d = Q^s} 36 - (\frac{1}{3})P = -9 + 0{,}5P \rightarrow 45 = 0{,}83P$

$\rightarrow$ **Pe = 54 ΤΙΜΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ**

Άρα,

$Q^d = 36 - (\frac{1}{3}) * 54 \rightarrow Q^d = 18$

$Q^s = -9 + 0{,}5 * 54 \rightarrow Q^s = 18$

Συνεπώς, **$Q^e = 18$ ΠΟΣΟΤΗΤΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ**

## ΛΥΣΗ

β) Να εκτιμηθούν οι ελαστικότητες ζήτησης και προσφοράς στην τιμή ισορροπίας.

**Ελαστικότητα ζήτησης**

Ξέρουμε ότι $E_D = \frac{\frac{\Delta Q^d}{Q^d}}{\frac{\Delta P}{P}}$ → $E_D = \frac{\Delta Q^d}{\Delta P} * \frac{P}{Q^d}$

Από $Q^d = 36 - (\frac{1}{3})P$ βρίσκω $\frac{\Delta Q^d}{\Delta P} = -\frac{1}{3}$

$$\boxed{E_D = -\frac{1}{3} * \frac{P}{Q^d}}$$

Επομένως, για P = 54 και Q = 18
(η τιμή και ποσότητα ισορροπίας)

$$E_D = -\frac{1}{3} * \frac{P}{Q^d} = -\frac{1}{3} * \frac{54}{18} \Rightarrow E_D = -1$$

ΛΥΣΗ

**Ελαστικότητα προσφοράς**

Ξέρω ότι $E_s = \dfrac{\frac{\Delta Q^S}{Q^S}}{\frac{\Delta P}{P}}$ → $E_s = \dfrac{\Delta Q^S}{\Delta P} * \dfrac{P}{Q^S}$

Από $Q^s = -9 + 0{,}5P$ βρίσκω $\dfrac{\Delta Q^S}{\Delta P} = 0{,}5$

$$E_s = 0{,}5 * \frac{P}{Q^S}$$

Επομένως, για P = 54 και Q = 18
(η τιμή και ποσότητα ισορροπίας)

$$E_s = 0{,}5 * \frac{P}{Q^S} = 0{,}5 * \frac{54}{18} \Rightarrow E_S = 1{,}5$$

# ΕΝΟΤΗΤΑ 2

## ΛΥΣΗ

β) Αν η κυβέρνηση επιβάλλει φόρο t ανά μονάδα προσφερόμενης ποσότητας και αν οι παραγωγοί προσαρμόσουν τη συνάρτηση προσφοράς για να συμπεριλάβουν το φόρο, τότε:
i) Να εκτιμηθούν οι ελαστικότητες ζήτησης και προσφοράς στη νέα τιμή ισορροπίας, η οποία συμπεριλαμβάνει τους φόρους, όταν t = 10 ευρώ.

Η νέα συνάρτηση προσφοράς: $Q^s_t = -9 + 0{,}5 * (P - t) \rightarrow Q^s_t = -9 + 0{,}5 * (P - 10)$
$\rightarrow Q^s_t = -9 + 0{,}5P - 5 \rightarrow \quad \rightarrow$ $\boxed{Q^s_t = -14 + 0{,}5P}$

Νέο σημείο ισορροπία: $Q^d = Q^s_t \rightarrow 36 - (\frac{1}{3})P = -14 + 0{,}5P \rightarrow 50 = 0{,}83P$
$\rightarrow$ **Pe' = 60 ΝΕΑ ΤΙΜΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ**

Συνεπώς, η νέα ποσότητα ισορροπίας: $Q^d = 36 - (1/3) * 60 \rightarrow Q^d = 16$
$Q^s_t = -14 + 0{,}5 * 60 \rightarrow Q^s_t = 16$

Άρα, **Qe' = 16 ΝΕΑ ΠΟΣΟΤΗΤΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ**

ΛΥΣΗ

**Ελαστικότητα ζήτησης**

Ξέρουμε ότι $E_D = \dfrac{\frac{\Delta Q^d}{Q^d}}{\frac{\Delta P}{P}}$ → $E_D = \dfrac{\Delta Q^d}{\Delta P} * \dfrac{P}{Q^d}$

Από $Q^d = 36 - (\frac{1}{3})P$ βρίσκω $\dfrac{\Delta Q^d}{\Delta P} = -\dfrac{1}{3}$

$$E_D = -\frac{1}{3} * \frac{P}{Q^d}$$

Επομένως, για P = 60 και Q = 16
(η τιμή και ποσότητα ισορροπίας)

$$E_D = -\frac{1}{3} * \frac{P}{Q^d} = -\frac{1}{3} * \frac{60}{16} \Rightarrow E_D = -1{,}25$$

ΛΥΣΗ

**Ελαστικότητα προσφοράς**

Ξέρω ότι $E_s = \dfrac{\frac{\Delta Q^s_t}{Q^s_t}}{\frac{\Delta P}{P}} \rightarrow E_s = \dfrac{\Delta Q^s_t}{\Delta P} * \dfrac{P}{Q^s_t}$

Από $Q^s_t = -14 + 0,5P$ βρίσκω $\dfrac{\Delta Q^s_t}{\Delta P} = 0,5$

$$E_s = 0,5 * \frac{P}{Q^s t}$$

Η τιμή για τον παραγωγό που προσφέρει το προϊόν δεν είναι η τιμή ισορροπίας που πληρώνει ο καταναλωτής ανά μονάδα προϊόντος, αλλά είναι η τιμή αυτή μείον το φόρο t= 10 ανά ευρώ μονάδα προσφερόμενης ποσότητας, δηλαδή είναι:

$$Pe'\text{-}t = 60 - 10 = 50 = P_t$$

Επομένως, για P = 50 και Q = 16
(η τιμή και ποσότητα ισορροπίας) $\Rightarrow E_s = 0,5 * \dfrac{P}{Q^s t} = 0,5 * \dfrac{50}{16} \Rightarrow E_s = 1,5625$

## ΛΥΣΗ

ii) Ποιος πληρώνει το φόρο;

Για τον καταναλωτή:

Από $P = 54$ αυξήθηκε σε $P_t = 60$ $\rightarrow$ $P_t - P = 60 - 54 =$ 6 ευρώ

Επειδή το ύψος του συνολικού ανά μονάδα προσφερόμενης ποσότητας φόρου είναι 10 ευρώ, τότε $(6/10) * 100 = 60\%$ του φόρου.

Για τον παραγωγό:

Από $P = 54$ μειώθηκες σε $P_t = (P-t) = P - 10 = 60 - 10 = 50$ $\rightarrow$ $P - P_t =$ 4 ευρώ

Επειδή το ύψος του συνολικού ανά μονάδα προσφερόμενης ποσότητας φόρου είναι 10 ευρώ, τότε $(4/10) * 100 = 40\%$ του φόρου.

Διαγραμματικά

Καμπύλη ζήτησης Qd

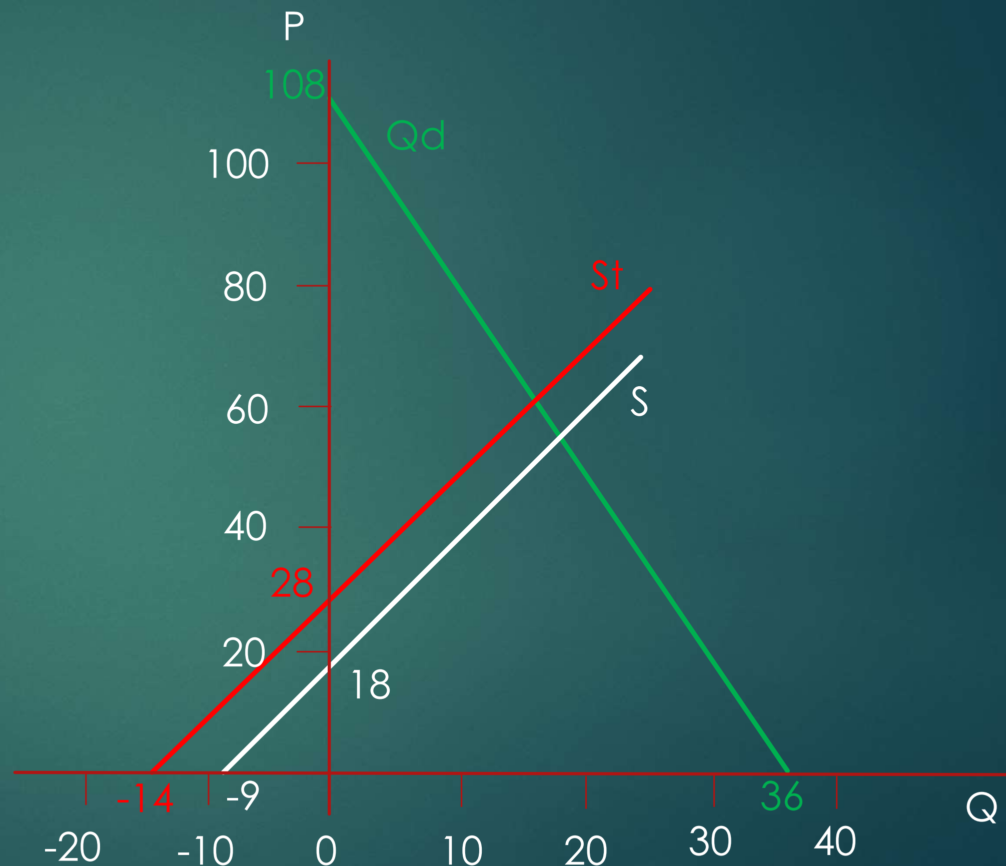
| Τιμή P | Qd=36-(1/3)P |
|---|---|
| 0 | 36 |
| 108 | 0 |

Καμπύλη προσφοράς S (ΠΡΟ ΦΟΡΟΥ)

| Τιμή P | S=-9+0.5P |
|---|---|
| 0 | -9 |
| 18 | 0 |

Καμπύλη προσφοράς St (ΜΕ ΦΟΡΟ)

| Τιμή P | St=-14+0.5P |
|---|---|
| 0 | -14 |
| 28 | 0 |



# ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται το πιο κάτω υπόδειγμα ισορροπίας στην αγορά ενός προϊόντος:

$$Q^s = -2 + 2P$$
$$Q^d = 10 - P$$

Ζητούνται:

α) Η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας.

β) Ο αντίκτυπος της επιβολής φόρου 2 ευρώ ανά μονάδα προσφερόμενης ποσότητας, το συνολικό ποσό του φόρου και η πραγματική τιμή για τους πωλητές.

γ) Ο αντίκτυπος στο σημείο ισορροπίας μετά από μια επιδότηση του κράτους κάθε προσφερόμενης ποσότητας με 3 ευρώ. Να γίνει διαγραμματική παρουσίαση.

## ΛΥΣΗ

α) Η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας.

$Q^s = -2 + 2P$
$Q^d = 10 - P$

$$Q^s = Q^d$$

$$\rightarrow -2 + 2P = 10 - P$$

$$\rightarrow -12 = -3P$$

$$\rightarrow Pe=4 \quad \text{(τιμή ισορροπίας)}$$

$Q^s = -2 + 2P$
$Q^d = 10 - P$

$\xrightarrow{P=4}$

$Q^s = -2 + 2*4= -2+8 = 6$
$Q^d = 10 – P= 10 – 4 = 6$

Άρα, Qe = 6 (ποσότητα ισσοροπίας)

## ΛΥΣΗ

β) Ο αντίκτυπος της επιβολής φόρου 2 ευρώ ανά μονάδα προσφερόμενης ποσότητας, το συνολικό ποσό του φόρου και η πραγματική τιμή για τους πωλητές.

Η νέα συνάρτηση προσφοράς είναι $Q_t^s = -2 + 2(P-t) = -2 + 2(P-2)$

$\rightarrow Q_t^s = -2+2P-4$

$\rightarrow Q_t^s = -6+2P$

Βρίσκω τα Qe' και Pe' $\quad Q_t^s = Q^d \rightarrow -6 + 2P = 10 - P$

$\rightarrow -16 = -3P$

$\rightarrow Pe' = \frac{16}{3} = 5{,}33$ (νέα τιμή ισορροπίας)

$Q_t^s = -6 + 2P$
$Q^d = 10 - P$

P=5,33 →

$Q_t^s = -6 + 2*5{,}33 = -6+10{,}66=4{,}67$
$Q^d = 10 – P= 10 – 5{,}33 = 4{,}67$

Άρα, $Qe' = 4{,}67$ (νέα ποσότητα ισσοροπίας)

## ΛΥΣΗ

β) Ο αντίκτυπος της επιβολής φόρου 2 ευρώ ανά μονάδα προσφερόμενης ποσότητας, το συνολικό ποσό του φόρου και η πραγματική τιμή για τους πωλητές.

Ο αντίκτυπος της επιβολής φόρου 2 ευρώ ανά μονάδα προσφερόμενης ποσότητας είναι:

$$\uparrow Pe \quad \rightarrow \quad \downarrow Qe$$

Το συνολικό ποσό φόρου είναι T = tQ = 2*4,67 = 9,34

Η πραγματική τιμή για τους πωλητές είναι:

$$P - t = P_t = 5{,}33 - 2 = 3{,}33 \text{ ευρώ.}$$

## ΛΥΣΗ

γ) Ο αντίκτυπος στο σημείο ισορροπίας μετά από μια επιδότηση του κράτους κάθε προσφερόμενης ποσότητας με 3 ευρώ. Να γίνει διαγραμματική παρουσίαση.

Η νέα συνάρτηση προσφοράς είναι $Q_E^s = -2 + 2(P+E) = -2 + 2(P+3)$

$\rightarrow Q_E^s = -2+2P+6$

$\rightarrow Q_E^s = 4+2P$

Βρίσκω τα Qe'' και Pe'' $Q_E^s = Q^d \rightarrow 4 + 2P = 10 - P$

$\rightarrow -6 = -3P$

$\rightarrow Pe'' = 2$ (νέα τιμή ισορροπίας μετά την επιδότηση)

$Q_E^s = -6 + 2P$
$Q^d = 10 - P$

$\xrightarrow{P=2}$

$Q_E^s = 4 + 2*2 = 4+4 = 8$
$Q^d = 10 - P = 10 - 2 = 8$ Άρα, Qe'' = 8 (νέα ποσότητα ισσοροπίας)

Ο αντίκτυπος της επιδότησης των 3 ευρώ: ↓ *Pe''* → ↑ *Qe''*

## ΛΥΣΗ

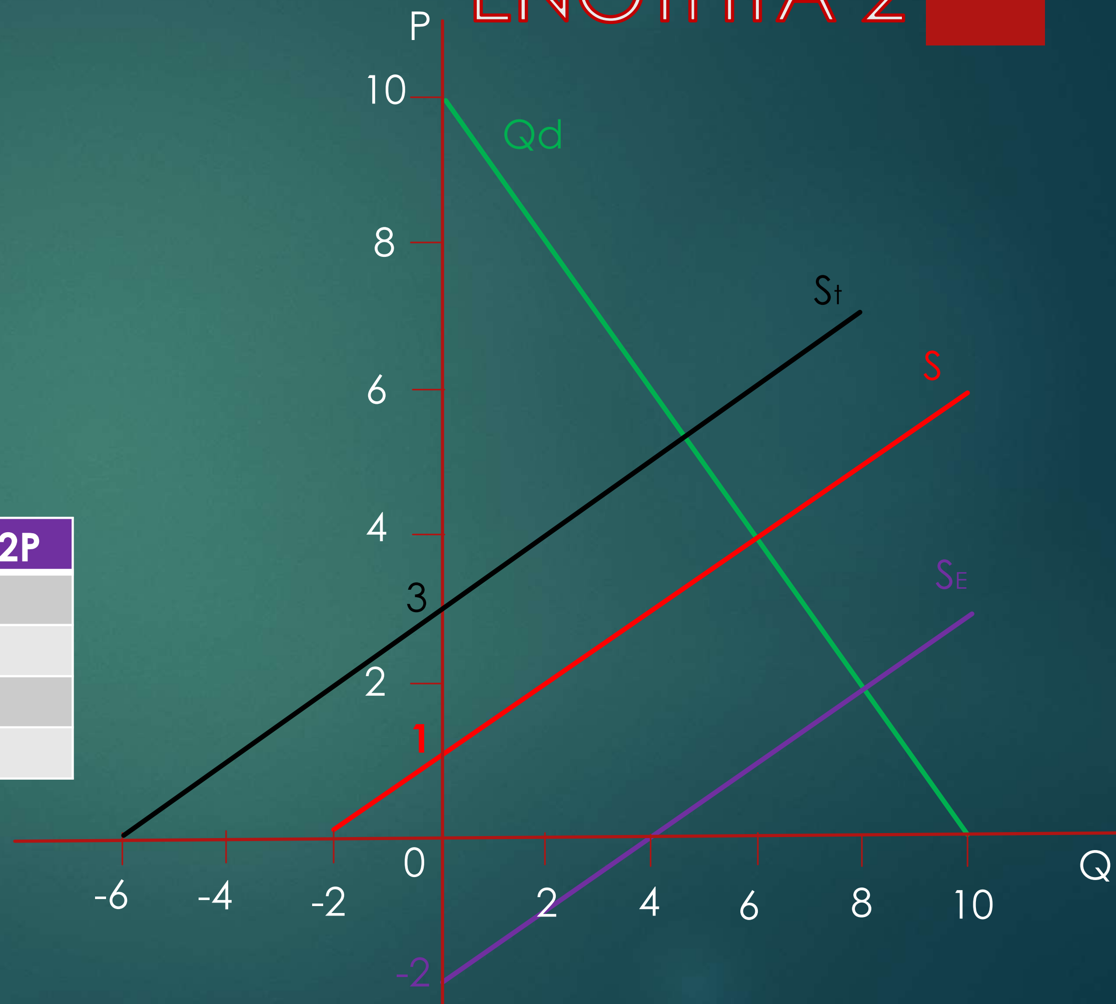
Διαγραμματικά

Καμπύλη ζήτησης Qd

| Τιμή P | Qd=10-P |
|---|---|
| 0 | 10 |
| 10 | 0 |

Καμπύλες προσφοράς S, St, SE

| Τιμή P | S=-2+2P | St=-6+2P | SE=4+2P |
|---|---|---|---|
| 0 | -2 | -6 | 4 |
| 1 | 0 | -10 | 0 |
| 3 | 4 | 0 | 10 |
| 18 | 34 | 30 | 40 |



# ΑΣΚΗΣΗ

Η αγοραία καμπύλη ζήτησης για ένα προϊόν είναι:

$$Q^d = 500 - 5P$$

Γνωρίζουμε ότι το προϊόν παράγεται από 10 ομοειδείς επιχειρήσεις, οι οποίες λειτουργούν κάτω από συνθήκες τέλειου ανταγωνισμού και η καμπύλη του οριακού κόστους (MC) για κάθε επιχείρηση είναι της μορφής:

$$MC = 5 + 0.6Q$$

Να προσδιοριστεί η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας. Να γίνει διαγραμματική παρουσίαση.

## ΛΥΣΗ

Τέλειος ανταγωνισμός για μία επιχείρηση σημαίνει:

$$MC = MR = P$$

Η καμπύλη MC δείχνει εκτός από το οριακό κόστος παραγωγής στα διάφορα επίπεδα παραγωγής, αλλά και την παραγόμενη από την επιχείρηση ποσότητα (Q) για κάθε τιμή (P) υπό συνθήκες ισορροπίας. Η Q = f(P) είναι η καμπύλη προσφοράς:

$$MC = P \rightarrow P = 5 + 0.6QS \rightarrow P - 5 = 0.6QS \rightarrow Qs = -\frac{5}{0,6} + \frac{1}{0,6} P$$

$$\Rightarrow \quad Q^s \text{ ΕΠΙΧ} = -8,33 + 1,67P$$

(συνάρτηση προσφοράς της επιχείρησης)

## ΛΥΣΗ

Η καμπύλη προσφοράς του κλάδου είναι πανομοιότυπο προς το σχήμα της καμπύλης προσφοράς της επιχείρησης γιατί το προϊόν παράγεται από ομοειδείς επιχειρήσεις, οπότε:

$$Q^S_{\kappa\lambda} = Q^S_{ΕΠΙΧ} * 10$$

$$\rightarrow \quad Q^S_{\kappa\lambda} = (-8{,}33 + 1{,}67P) * 10$$

$$Q^s \kappa\lambda = -83{,}3 + 16{,}67P$$

(συνάρτηση προσφοράς του κλάδου)

## ΛΥΣΗ

Ισορροπία στον κλάδο

$$Q^S_{\kappa\lambda} = Q^d$$

$$-83{,}33 + 16{,}67P = 500 - 5P \rightarrow 21{,}67P = 583{,}33$$

$$\rightarrow Pe = 26{,}92$$ (τιμή ισορροπίας)

Οπότε,

$$Q^d = 500 - 5P = 500 - 5 \cdot 26{,}92 \rightarrow Q = 365{,}4$$

$$Q^S_{\kappa\lambda} = -83{,}33 + 16{,}67 \cdot 26{,}92 \rightarrow Q^S_{\kappa\lambda} = 365{,}4$$

$$\rightarrow Qe = 365{,}4$$

(ποσότητα ισορροπίας)

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES
SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT



## ΛΥΣΗ

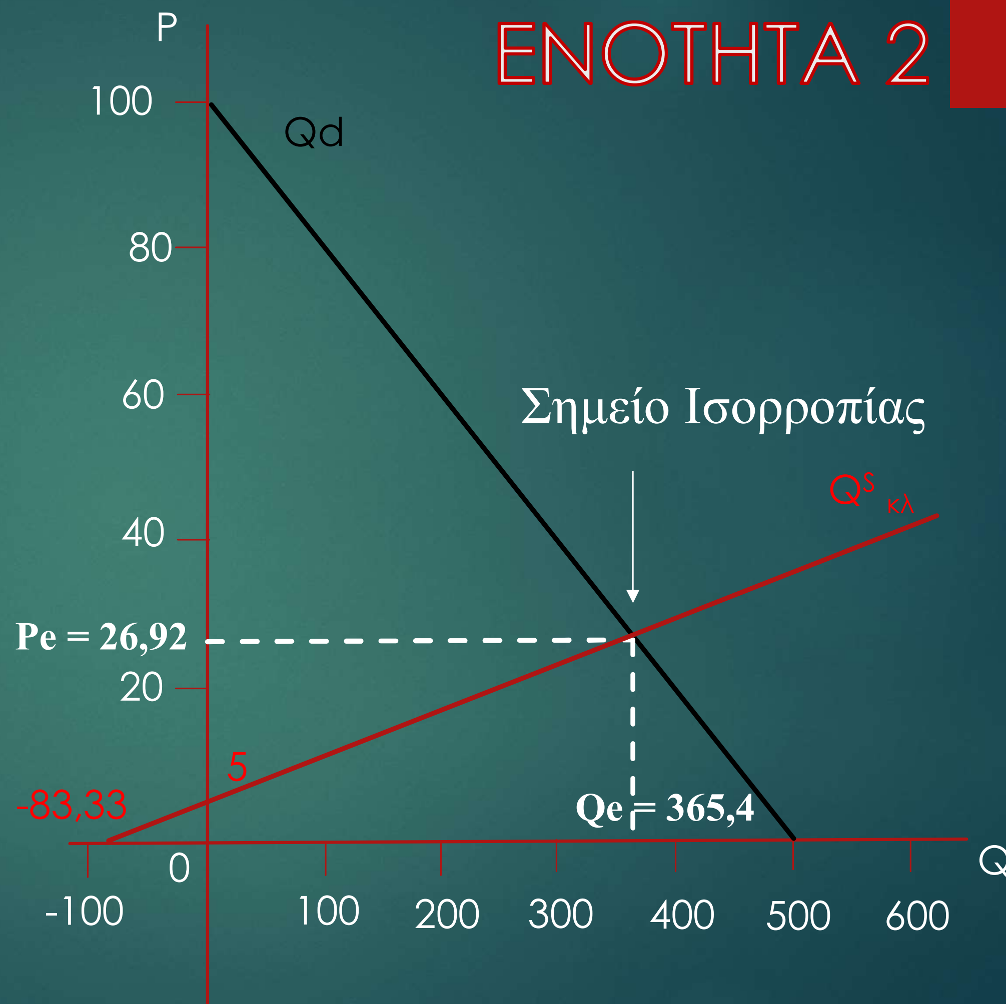
Διαγραμματικά

Καμπύλη ζήτησης Qd

| Τιμή P | Qd=500-5P |
|---|---|
| 0 | 500 |
| 100 | 0 |

Καμπύλη προσφοράς $Q^S_{\kappa\lambda}$

| Τιμή P | $Q^S_{\kappa\lambda}$ =-83,33+16,67P |
|---|---|
| 0 | -83,33 |
| 5 | 0 |



# ΑΣΚΗΣΗ

Έστω ότι έχουμε τα εξής δεδομένα μιας υποθετικής οικονομίας:

$S = -200 + 0{,}4Y_d$ (αποταμίευση)

$I = 400 - 4.000r$ (επενδύσεις)

$G = 400$ (δημόσιες δαπάνες)

$T = 100$ (φόροι)

$M_t = 0{,}3Y$ (ζήτηση χρήματος για συναλλαγές)

$M_{SP} = 1.000 - 4.000r$ (ζήτηση χρήματος για κερδοσκοπία)

$M_s = 800$ (προσφορά χρήματος)

Ζητείται:

α) Να προσδιοριστεί η συνάρτηση IS και LM και να κατασκευαστεί το διάγραμμα γενικής ισορροπίας της οικονομίας,

β) Τι μεταβολές θα προκληθούν πάνω στο εισόδημα και στο επιτόκιο ισορροπίας της οικονομίας, όταν η συνάρτηση της συνολικής προσφοράς γίνει Ms = 900. Οι μεταβολές να παρασταθούν διαγραμματικά.

## ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση IS καθορίζεται από την ακόλουθη συνθήκη ισορροπίας

$$I + G = S + T$$

$400 – 4.000r + 400 = -200 + 0,4Y_d + 100 \rightarrow$

(Yd=Y – T)

$800 – 4000r = -100 + 0,4 * (Y - T) \rightarrow$

$800 + 100 – 4.000r = 0,4Y - 0,4T \rightarrow$

T=100

$900 – 4.000r = 0,4Y - 0,4*100 \rightarrow 900 – 4.000r = 0,4Y – 40 \rightarrow$

$4.000r = -0,4Y + 940 \rightarrow r = \frac{940}{4000} - \frac{0,4}{4000}Y \rightarrow$

$r = 0,235 – 0,0001Y$ (Συνάρτηση IS)

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση LM καθορίζεται από την ακόλουθη συνθήκη ισορροπίας

$$M_s = M_d$$

$M_{SP}$= 1.000-4.000r
$M_t$ = 0,3Y
Ms=800

$$M_s = M_{SP} + M_t \rightarrow$$

$$800 = 1.000 - 4.000r + 0{,}3Y \rightarrow$$

$$4.000r = 200 + 0{,}3\,Y \rightarrow \quad r = \frac{200}{4000} + \frac{0{,}3}{4000}Y \rightarrow$$

r = 0,05 + 0,000075Y (Συνάρτηση LM)

## ΛΥΣΗ

Το σημείο γενικής ισορροπίας της οικονομίας από τις εξισώσεις:

$r = -0{,}0001\ Y + 0{,}235$ Συνάρτηση (IS)
$r = 0{,}000075Y + 0{,}05$ Συνάρτηση (LM)

$-0{,}0001\ Y + 0{,}235 = 0{,}000075Y + 0{,}05 \rightarrow$

$0{,}000175Y = 0{,}185 \rightarrow$

**$Y = 1.057{,}14$ (Εισόδημα ισορροπίας)**

$r = -0{,}0001\ Y + 0{,}235 \rightarrow$

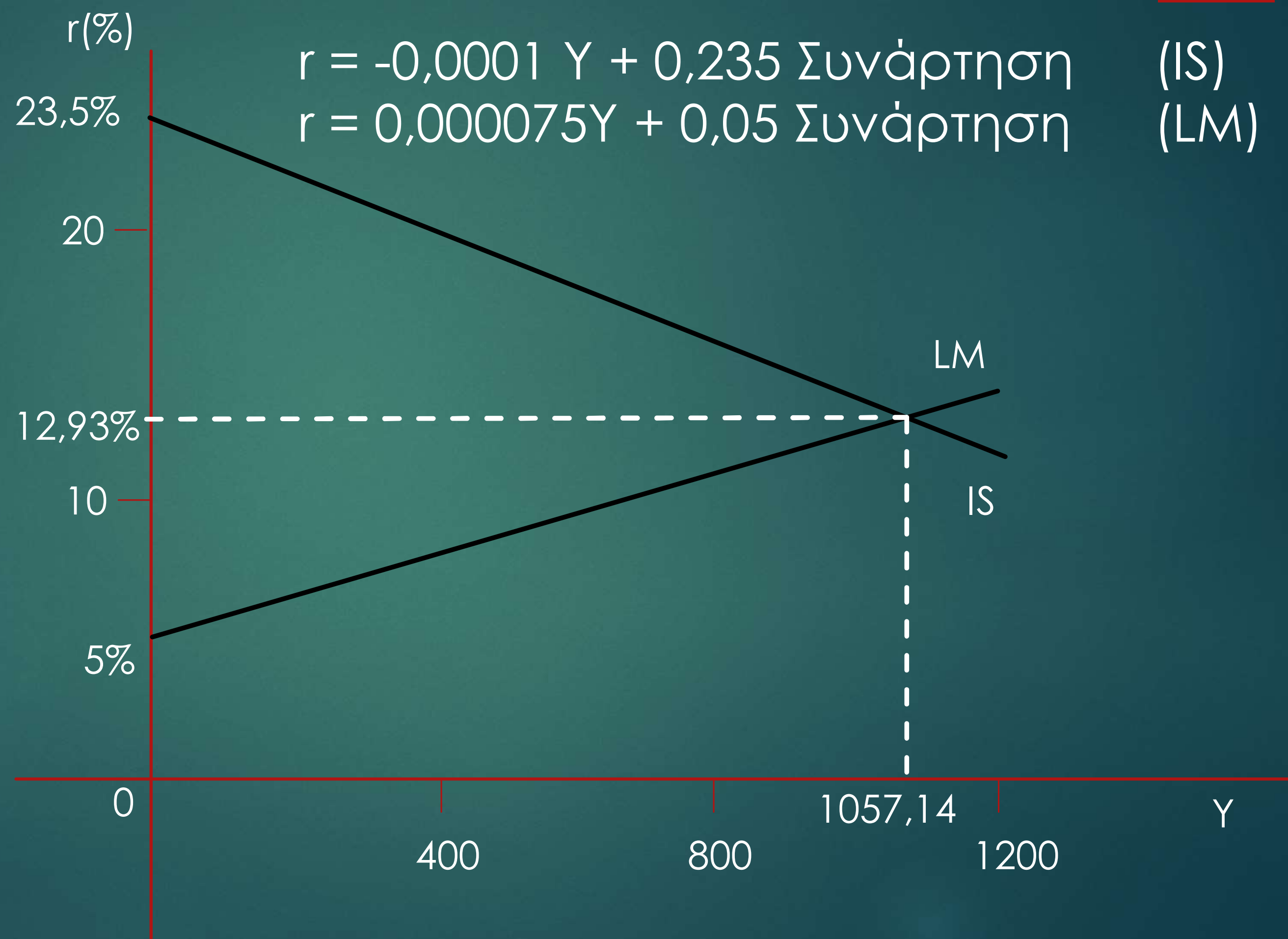
**$r = 0{,}1293$ (Επιτόκιο ισορροπίας)**

# ΕΝΟΤΗΤΑ 2

## ΛΥΣΗ

Διαγραμματικά

r = -0,0001 Y + 0,235 Συνάρτηση (IS)
r = 0,000075Y + 0,05 Συνάρτηση (LM)




Y = 1.057,14
(Εισόδημα ισορροπίας)

r = 0,1293
(Επιτόκιο ισορροπίας)

## ΛΥΣΗ

β) Τι μεταβολές θα προκληθούν πάνω στο εισόδημα και στο επιτόκιο ισορροπίας της οικονομίας, όταν η συνάρτηση της συνολικής προσφοράς γίνει Ms = 900. Οι μεταβολές να παρασταθούν διαγραμματικά.

Αν $M_s = 900$, τότε:

$$M_s = M_d = M_{SP} + M_t \rightarrow$$

$900 = 1.000 - 4.000r + 0{,}3Y \rightarrow$

$4.000r = 0{,}3Y + 100 \rightarrow$

$r = 0{,}000075Y + 0{,}025$ (νέα συνάρτηση LM)

## ΛΥΣΗ

Το νέο σημείο γενικής ισορροπίας της οικονομίας από τις εξισώσεις:

$r = -0{,}0001\ Y + 0{,}235$ Συνάρτηση (IS)

$r = 0{,}000075Y + 0{,}025$ Συνάρτηση (LM)

$-0{,}0001\ Y + 0{,}235 = 0{,}000075Y + 0{,}025 \rightarrow$

$0{,}000175Y = 0{,}21 \rightarrow$

$Y = 1.200$ (Νέο Εισόδημα ισορροπίας)

$r = -0{,}0001\ Y + 0{,}235 \rightarrow$

$r = 0{,}115$ (Νέο Επιτόκιο ισορροπίας)

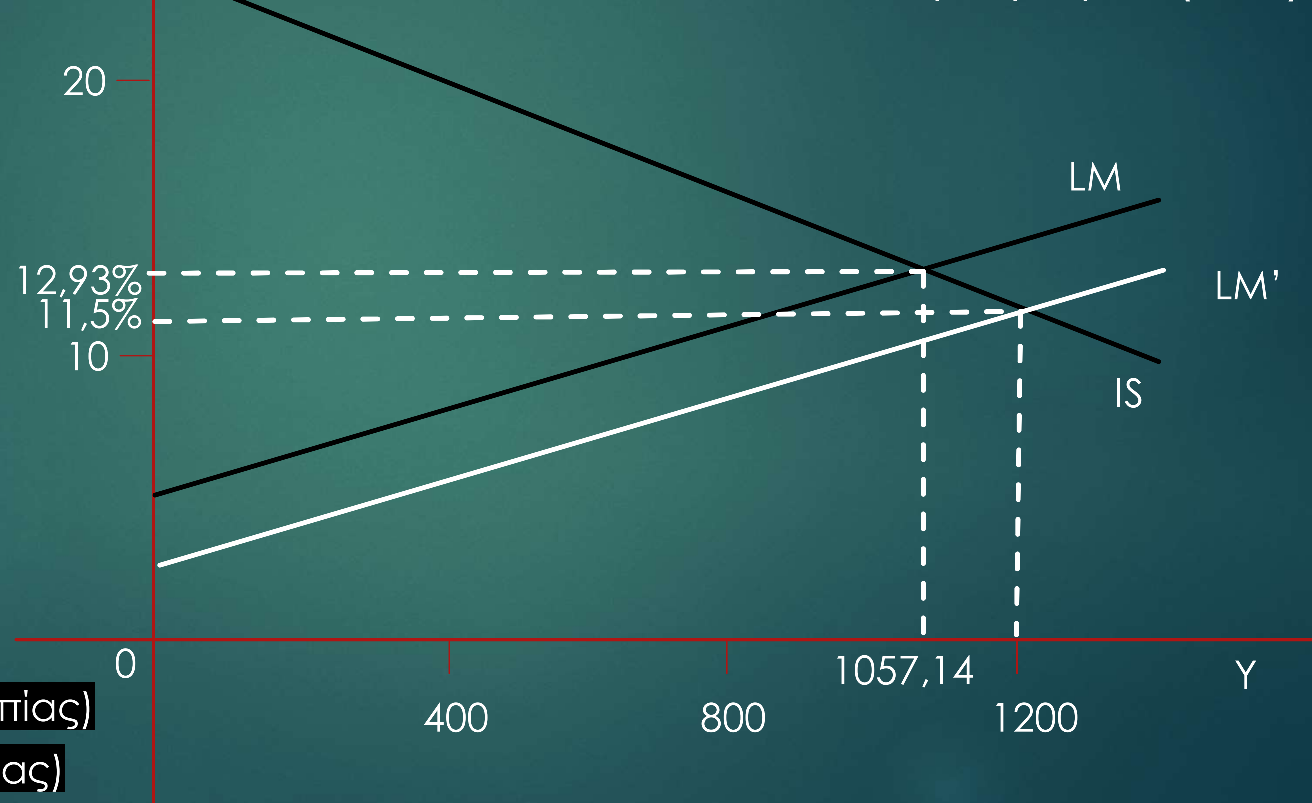
# ΕΝΟΤΗΤΑ 2

## ΛΥΣΗ

Διαγραμματικά

r = -0,0001 Y + 0,235 Συνάρτηση (IS)

r = 0,000075Y + 0,05 Συνάρτηση (LM')




Y' = 1. 200 (Εισόδημα ισορροπίας)

r' = 0,115 (Επιτόκιο ισορροπίας)

## ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται η συνάρτηση ζήτησης και η συνάρτηση προσφοράς:

$$Q_D = 40-4P$$

$$Q_S = -6+2P$$

Χορηγείται επιδότηση 2 νομισματικών μονάδων ανά μονάδα πωλούμενης ποσότητας.

α) Να βρεθεί η επιβάρυνση του κρατικού προϋπολογισμού από τη χορήγηση της επιδότησης.

β) Το όφελος του παραγωγού από την επιδότηση.

## ΛΥΣΗ

$Q_D = Q_S$

→ $40 – 4·P = -6 + 2·P$

→ $6·P = 46$

→ $P^* = 7{,}67$ (τιμή ισορροπίας)

και $Q^* = 40 – 4·P^* = 40 – 4·7{,}67$

→ $Q^* = 9{,}32$ (ποσότητα ισορροπίας)

Μετά την επιδότηση των 2 νομισματικών μονάδων: $Q_{SE} = -6+2(P+2) = -6+2P+4$

→ $Q_{SE} = 2P-2$

Η νέα τιμή και ποσότητα ισορροπίας:

$Q_{SE} = Q_D$

→ $40 – 4·P = 2·P – 2$

→ $6·P = 42$

→ $P^*_E = 7$ (τιμή ισορροπίας μετά την επιδότηση)

και $Q^{**}_E = 40 – 4·P_E = 40 – 4·7$

→ $Q^{**}_E = 12$

(ποσότητα ισορροπίας μετά την επιδότηση)

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

α) Το ποσό με το οποίο επιβαρύνεται ο κρατικός προϋπολογισμός είναι:

$$E=\varepsilon\cdot Q^*_E=2\cdot 12=24$$

β) Το όφελος του παραγωγού από την επιδότηση :

i) πρώτα προσδιορίζουμε τα έσοδα του παραγωγού πριν την επιδότηση:

$$R=P\cdot Q^*= 7{,}67\cdot 9{,}32=71{,}48$$

ii) στη συνέχεια, τα έσοδα μετά την επιδότηση:

$$R_E=P_E\cdot Q_E^*= 7\cdot 12=84$$

Άρα τα έσοδα του αυξάνονται : $R_E – R = 84 – 71{,}48 = 12{,}52$.

Επομένως, το τελικό όφελος του παραγωγού από την επιδότηση είναι:

$$TR = 24+12{,}52 = 36{,}52.$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

# ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

**Μη Γραμμικές Συναρτήσεις**

# ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Έστω η γραμμική συνάρτηση ζήτησης: $Qd = \frac{1}{a}(k\text{-}P)$, με κ,α > 0

$$\rightarrow P = k - a \cdot Q$$

Η συνάρτηση των συνολικών εσόδων (TR): $TR = P \cdot Q$

$$\rightarrow TR = (k - a \cdot Q) \cdot Q$$

$$\rightarrow \boxed{TR = kQ - aQ^2}$$

…εξίσωση δευτέρου βαθμού της οποίας η γραφική παράσταση είναι μη-γραμμική.

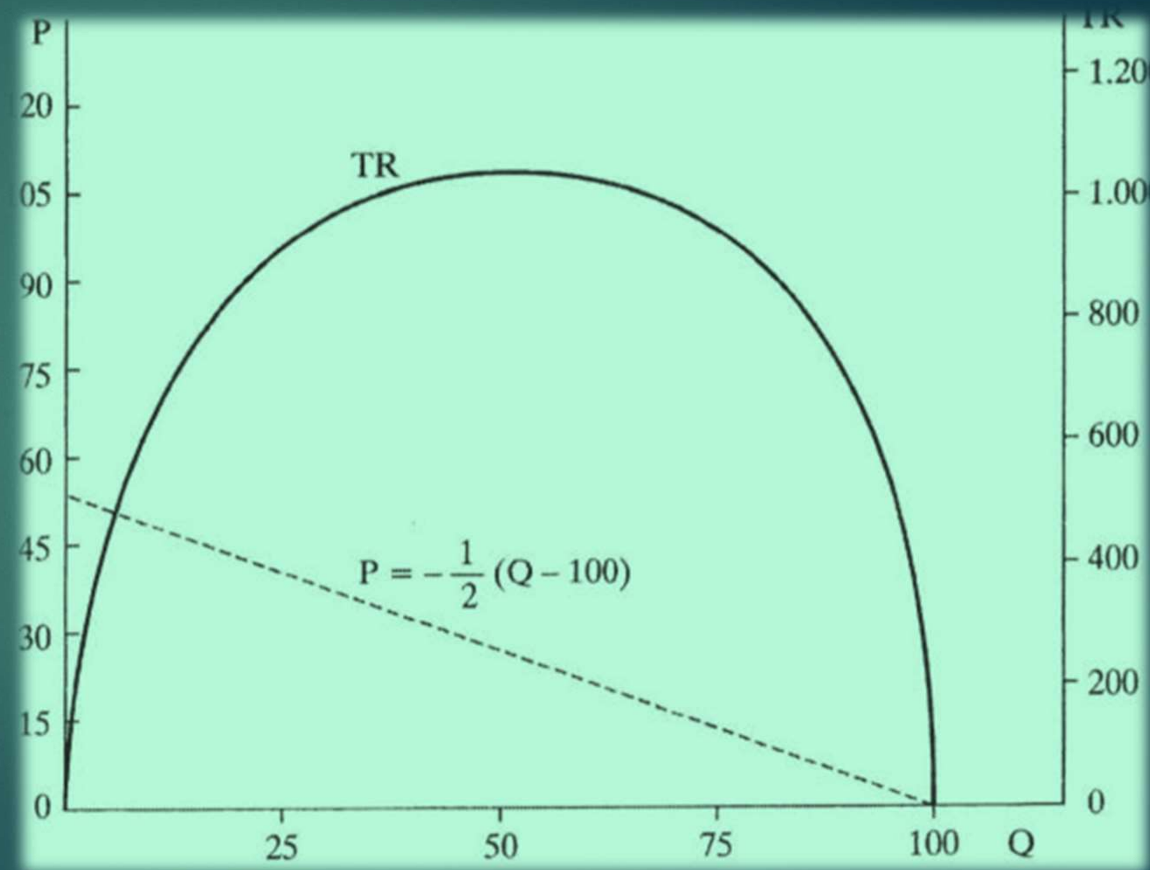
**Μη Γραμμικές Συναρτήσεις**

# ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Γραφική παράσταση:

Για k = 50 και α = ½ ,
→ $P = -0,5(Q - 100)$

| Q | P | TR |
|---|---|---|
| 0 | 50 | 0 |
| 10 | 45 | 450 |
| 25 | 37,5 | 937,5 |
| 30 | 35 | 1.050 |
| 40 | 30 | 1.200 |
| 50 | 25 | 1.250 |
| 60 | 20 | 1.200 |
| 70 | 15 | 1.050 |
| 75 | 12,5 | 937,5 |
| 90 | 5 | 450 |
| 100 | 0 | 0 |



Έστω η συνάρτηση του συνολικού κόστους (TC):

$$TC = F+bQ$$

όπου:

F: Το πάγιο κεφάλαιο.

b: Το μεταβλητό κεφάλαιο ανά μονάδα προϊόντος.

Τότε τα κέρδη (Π) της επιχείρησης θα είναι:

$$\Pi = TR - TC$$

$TR = kQ - aQ^2$ →

$$\Pi = TR\text{-}TC = kQ - aQ^2 - F - bQ$$

$$\rightarrow \boxed{\Pi = -aQ^2 + (k-b)Q - F}$$

**Μη Γραμμικές Συναρτήσεις**

**Επίλυση 2-βαθμιας εξίσωσης**



Έστω η συνάρτηση κέρδους όπως υπολογίστηκε: **Π= - aQ²+(k - b)Q - F**

Θέτω Π=0 → **- aQ²+(k - b)Q – F = 0 (τριώνυμο)**

$$Q = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}}{2a}$$

όπου: α = -α , β = k – b, γ = -F

$$\boxed{Q_{1,2} = \frac{-(k-b) \pm \sqrt{[(k-b)^2 - 4(-a)(-F)]}}{2(-a)}}$$

- Αν $\beta^2 - 4a\gamma > 0$ → 2 πραγματικές ρίζες
- Αν $\beta^2 - 4a\gamma = 0$ → 1 διπλή πραγματική ρίζα
- Αν $\beta^2 - 4a\gamma < 0$ → 2 μιγαδικές ρίζες

**Μη Γραμμικές Συναρτήσεις**

**Επίλυση 2-βαθμιας εξίσωσης**



Έστω η συνάρτηση κέρδους όπως υπολογίστηκε: **Π= - aQ²+(k - b)Q - F**

Θέτω Π=0 → **- aQ²+(k - b)Q – F = 0 (τριώνυμο)**

$$Q = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}}{2a}$$ όπου: α = -α , β = k – b, γ = -F

$$\boxed{Q_{1,2} = \frac{-(k-b) \pm \sqrt{[(k-b)^2 - 4(-a)(-F)]}}{2(-a)}}$$

- Αν $\beta^2 - 4a\gamma > 0$ → 2 πραγματικές ρίζες
- Αν $\beta^2 - 4a\gamma = 0$ → 1 διπλή πραγματική ρίζα
- Αν $\beta^2 - 4a\gamma < 0$ → 2 μιγαδικές ρίζες

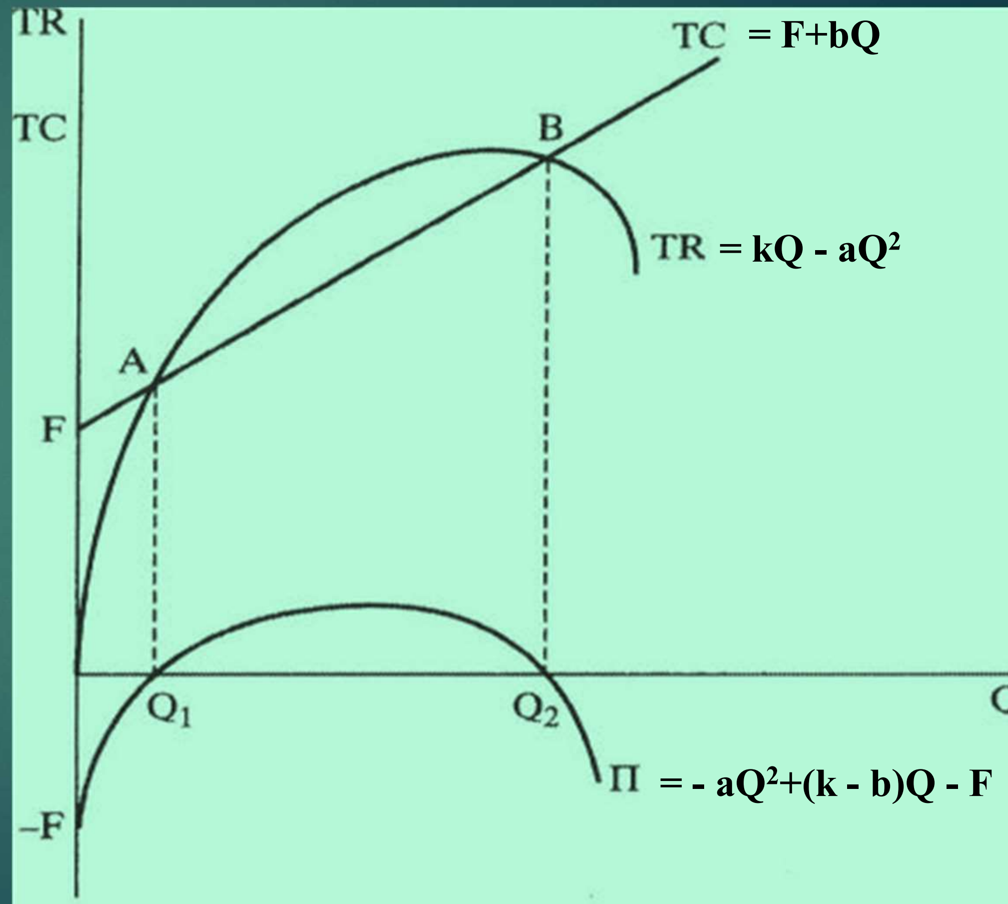
**Μη Γραμμικές Συναρτήσεις**

# ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Διαγραμματικά

**$TR = kQ - aQ^2$**
**$TC = F + bQ$**
**$\Pi = - aQ^2 + (k - b)Q - F$**

**$Q_1$ και $Q_2$:**
**λύσεις/ρίζες της συνάρτησης Π(Q)**



# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω η συνάρτηση προσφοράς: $P_s = Q^2+4Q+1$

και η αγοραία συνάρτηση ζήτησης είναι: $P_d = - Q^2 -Q+4$

όπου:

P: Η τιμή αγοράς

Q: Η ποσότητα

Η συνθήκη ισορροπίας απαιτεί : $P_d=P_s$ $\rightarrow - Q^2 -Q+4 = Q^2+4Q+1$

$\rightarrow 2Q^2 +5Q - 3 = 0$

$$Q = \frac{-(5) \pm \sqrt{5^2 - 4(2)(-3)}}{2\cdot 2} = \frac{-(5) \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-(5) \pm 7}{4}$$

$$Q1 = \frac{-(5)+7}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$Q2 = \frac{-(5)-7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

(απορρίπτεται)

Άρα, $P = (- 0{,}5)^2 -0{,}5+4 = 3{,}25$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

# ΟΜΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

**Ομογραφικές Συναρτήσεις**



Ομογραφικές είναι οι συναρτήσεις όπως: $Y=\frac{1}{X}$ με Π.Ο. το $R \neq 0$

Το X=0 ονομάζεται ΠΟΛΟΣ της συνάρτησης (μηδενίζει τον παρανομαστή).

Παράδειγμα ομογραφικής συνάρτησης είναι η συνάρτηση του μέσου κόστους AC:

$$AC = \frac{TC}{Q}$$

όπου:

AC: Το μέσο κόστος παραγωγής
TC: Το συνολικό κόστος
Q: Η συνολική παραγωγή.

Δηλαδή, $TC = AC \cdot Q$

**Ομογραφικές Συναρτήσεις**



Έστω η συνάρτηση του συνολικού κόστους (TC): $TC = F+bQ$

Οπότε, $AC= \frac{F+(bQ)}{Q} = \frac{F}{Q} + b \rightarrow AC= F\cdot Q^{-1}+b$

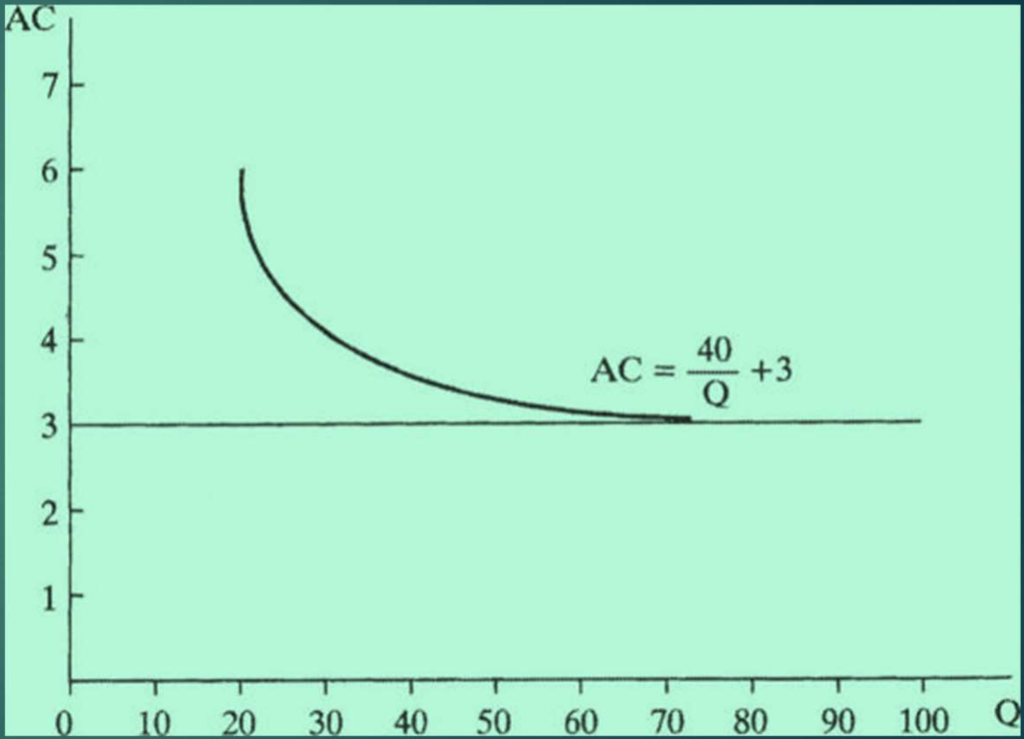
Αν F = 40 και b = 3, τότε $\boxed{AC= 40\cdot Q^{-1} + 3}$

**Ομογραφικές Συναρτήσεις**

# ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Διαγραμματικά

| Q | 40/Q | 3 | AC = 40/Q +3 |
|---|---|---|---|
| 0 | oo | 3 | ∞ |
| 1 | 40 | 3 | 43 |
| 5 | 8 | 3 | 11 |
| 10 | 4 | 3 | 7 |
| 20 | 2 | 3 | 5 |
| 40 | 1 | 3 | 4 |
| 80 | 0,5 | 3 | 3,5 |
| 160 | 0,25 | 3 | 3,25 |




***Όταν Q = 0, το AC δεν ορίζεται και όταν AC = 3, το Q δεν ορίζεται***

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES
SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT



## ΑΣΚΗΣΗ

Μια εταιρία ηλεκτρονικών αντιμετωπίζει την παρακάτω συνάρτηση ζήτησης:

$$P + Q_d^2 + 5Q_d - 18 = 0$$

όπου:

P: τιμή ανά μονάδα προϊόντος

Qd: Η ζητούμενη ποσότητα.

Έχει, επίσης, εκτιμηθεί ότι η συνάρτηση προσφοράς είναι:

$$2P - 5Q_s^2 + 12Q_S = 12$$

όπου:

Qs: Η προσφερόμενη ποσότητα.

Ζητείται:

Να εκτιμηθούν η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας στην αγορά.

## ΛΥΣΗ

Λύνω τη συνάρτηση ζήτησης ως προς P:

$$P + Q_d^2 + 5Q_d - 18 = 0 \quad \rightarrow \quad P_d = -Q_d^2 - 5Q_d + 18$$

Όμοια για τη συνάρτηση προσφοράς:

$$2P - 5\,Q_s^2 + 12Q_S = 12 \quad (:2) \rightarrow \quad \frac{2P}{2} - \frac{5}{2}Q_s^2 + \frac{12}{2}Q_s = \frac{12}{2} \quad \rightarrow \quad P_S = 2{,}5\,Q_s^2 - 6Q_S + 6$$

Η αγορά βρίσκεται σε ισορροπία όταν $Q_d = Q_s$ (= Q) ή ισοδύναμα όταν $P_d = P_s$ (=P):

$$P_d = P_s$$

$$\rightarrow -Q^2 - 5Q + 18 = 2{,}5Q^2 - 6Q + 6 \quad \rightarrow \quad \boxed{3{,}5Q^2 - Q - 12 = 0}$$

ΛΥΣΗ

$$3{,}5Q^2 - Q - 12 = 0$$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - [4 \cdot 3{,}5 \cdot (-12)] = 169 > 0 \rightarrow$ 2 πραγματικές ρίζες

$$Q_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 * 3{,}5 * (-12)}}{2 \cdot 3{,}5} = 1 \pm \frac{13}{7}$$

$$Q_1 = 1 + \frac{13}{7} = \frac{20}{7} = 2{,}8$$

$$Q_2 = 1 - \frac{13}{7} = -\frac{12}{7} = -1{,}7$$

(απορρίπτεται)

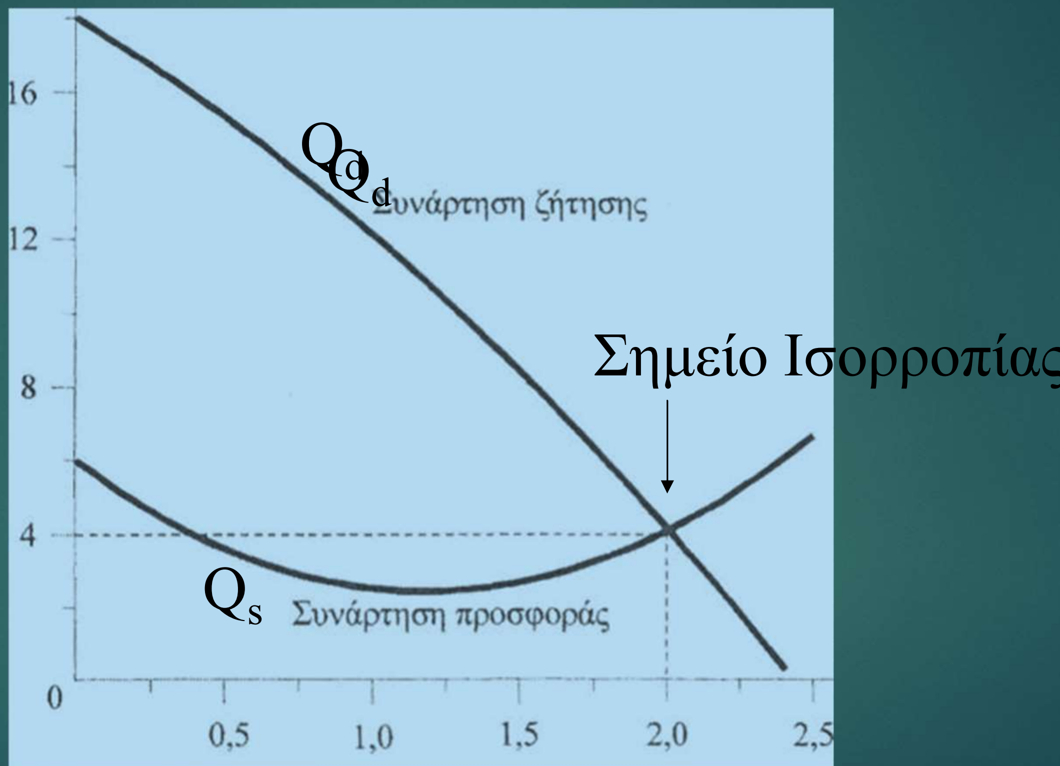
Άρα, η ποσότητα ισορροπίας είναι $Q = 2{,}8$

Από την $Pd = -Q_d^2 - 5Q_d + 18 \rightarrow (-2{,}8)^2 - (5 \cdot 2{,}8) + 18 \rightarrow P = 11{,}84$ (τιμή ισορροπίας)

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES
SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT



ΛΥΣΗ



## ΑΣΚΗΣΗ

Η ζήτηση για το προϊόν μιας επιχείρησης είναι: $P = 120\text{-}Q_d$

Ενώ η συνάρτηση του συνολικού κόστους είναι: $TC = 2Q^2 + 6Q + 216$

Να προσδιοριστεί:

α) Το νεκρό σημείο της επιχείρησης.

β) Ποιο θα είναι το κέρδος της επιχείρησης, όταν το $Q = 25$ μονάδες. Να γίνει και διαγραμματική παρουσίαση της συνάρτησης του κέρδους.

ΛΥΣΗ

α) Νεκρό σημείο → Συνολικά Εσοδα (TR) = Συνολικό Κόστος (TC)
ή όταν τα κέρδη Π = 0

$$\left.\begin{aligned} TR &= P*Q \\ P &= 120-Q_d \end{aligned}\right\} \quad TR = (120 - Q)\cdot Q \quad \rightarrow \quad \left.\begin{aligned} TR &= 120Q - Q^2 \\ \Pi &= TR-TC \\ TC &= 2Q^2 + 6Q + 216 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \Pi = 120Q - Q^2 - 2Q^2 - 6Q - 216 \quad \rightarrow \quad \boxed{\Pi = -3Q^2 + 114Q - 216 = 0}$$

# ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΛΥΣΗ

$$\Pi = -3Q^2 + 114Q - 216 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 114^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-216) = 12.996 - 2.592 \rightarrow \quad \Delta = 10.404 > 0$$

$$Q_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2a} = \frac{-(114) \pm \sqrt{10.404}}{2*(-3)} = \frac{-114 \pm \sqrt{10.404}}{-6} = \frac{-114 \pm 102}{-6}$$

$$Q_1 = \frac{-114+102}{-6} = \frac{-12}{-6} = 2$$

Δεκτή

$$Q_2 = \frac{-114-102}{-6} = -\frac{216}{-6} = 36$$

Δεκτή

Οπότε,

Q1=2 → $P_1 = 120 - Q_d = 120 - 2 = 118$

Q2=36 → $P_2 = 120 - Q_d = 120 - 36 = 84$

Η επιχείρηση έχει δυο νεκρά σημεία

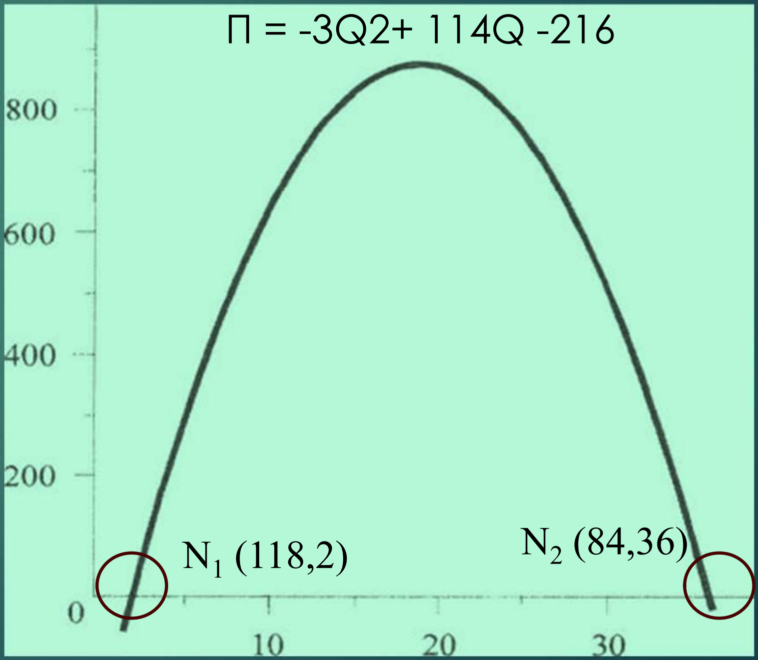
$N_1$ (118,2) και $N_2$ (84,36)

## ΛΥΣΗ

β) Τα κέρδη της επιχείρησης, όταν Q = 25 είναι:

$\Pi = -3Q^2 + 114Q - 216 = -3 \cdot (25)^2 + 114 \cdot (25) - 216 = -1.875 + 2.850 - 216 \rightarrow \Pi = 759$

| Q | $\Pi = -3Q^2 + 114Q - 216$ |
|---|---|
| 0 | -216 |
| 2 | 0 |
| 10 | 624 |
| 20 | 864 |
| 30 | 504 |
| 36 | 0 |



## ΑΣΚΗΣΗ

Η συνάρτηση ζήτησης για ένα προϊόν είναι:

$$P = 20 - 0{,}5Q_d$$

Η συνάρτηση του μέσου κόστους AC δίδεται από;

$$AC = \frac{20}{Q} + 4$$

Να βρεθεί το νεκρό σημείο της επιχείρησης.

ΛΥΣΗ

α) Νεκρό σημείο → Συνολικά Εσοδα (TR) = Συνολικό Κόστος (TC)
ή όταν τα κέρδη Π = 0

$$\left.\begin{array}{l} TR = P*Q \\ P = 20\text{-}0{,}5Q_d \end{array}\right\} \quad TR = (20 - 0{,}5Q) \cdot Q \rightarrow TR = 20Q - 0{,}5Q^2$$

$$\left.\begin{array}{l} TC = AC \bullet Q \\ AC = \frac{20}{Q} + 4 \end{array}\right\} \quad TC = (\frac{20}{Q} + 4) \bullet Q \rightarrow TC = 20 + 4Q$$

Π=TR-TC →

$$\rightarrow \Pi = 20Q\text{-}0{,}5Q^2\text{-}20\text{-}4Q \rightarrow \Pi = \text{-}0{,}5Q^2\text{+}16Q\text{-}20\text{=}0$$

# ΕΝΟΤΗΤΑ 2

## ΛΥΣΗ

$$Π=-0,5Q^2+16Q-20=0$$

$$Δ = β^2 - 4αγ = 16^2 - 4\cdot(-0,5)\cdot(-20) = 256 – 40 = 216>0$$

$$Q_{1,2}=\frac{-β\pm\sqrt{β^2-4αγ}}{2α}=\frac{-(16)\pm\sqrt{216}}{2*(-0,5)}=\frac{-16\pm 14,69}{-1}$$

$$Q_1=\frac{-16+14,69}{-1}=1,31 \text{ Δεκτή}$$

$$Q_2=\frac{-16-1\ \ ,69}{-1}= 30,69 \text{ Δεκτή}$$

Οπότε,

$Q1=1,31$ → $P1=20-0,5Q_d=20-0,655= 19,35$

$Q2=30,69$ → $P1=20-0,5Q_d=20-15,345 = 4,655$

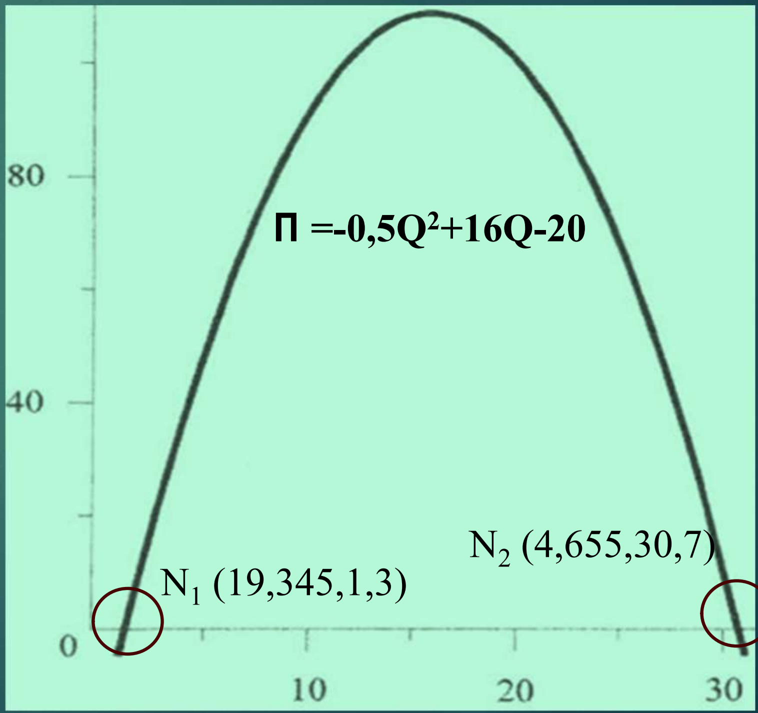
Η επιχείρηση έχει δυο νεκρά σημεία

$N_1$ (19,345, 1,31) και $N_2$ (4,655, 30,69)

## ΛΥΣΗ

Διαγραμματικά

| Q | Π =-0,5Q2+16Q-20=0 |
|---|---|
| 0 | -20 |
| 1.3 | 0 |
| 10 | 90 |
| 20 | 100 |
| 30 | 10 |
| 30.7 | 0 |



# ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ