ΠΑΝΤΕΙΟΝ
PANTEION

SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES

ΠΟΣΟΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Γιώργος Λούντζης (PhD, MSc, MEng)

Εντεταλμένος Διδάσκων (ΕΣΠΑ)
2025 – 2026

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES
SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

1. Η ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΖΗΤΗΣΗΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΤΙΜΗ
2. ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΠΡΟΣΦΟΡΑΣ
3. Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΖΗΤΗΣΗΣ ΜΕ ΠΟΛΛΕΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

Η **ελαστικότητα ζήτησης E_D προς την τιμή** ορίζεται *ως η ποσοστιαία μεταβολή στη ζητούμενη ποσότητα (Q), όταν μεταβάλλεται η τιμή (P) κατά 1%.*

$$E_D = \frac{\left(\frac{\Delta Q}{Q}\right)}{\left(\frac{\Delta P}{P}\right)}$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

Έστω, η συνάρτηση ζήτησης $Q = a - bP$

Αν το P μεταβληθεί κατά μια μονάδα ΔP $\rightarrow$ $Q+\Delta Q = a - b(P+\Delta P)$

Αφαιρώ $Q = a - bP$ $\rightarrow$

$$\cancel{Q}+\Delta Q - \cancel{Q} = \cancel{a} - b(P+\Delta P) - \cancel{a} + bP \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad -b = \frac{\Delta Q}{\Delta P}$$

ENOTHTA 1

$$\left.\begin{aligned} E_D &= \frac{\left(\frac{\Delta \mathrm{Q}}{\mathrm{Q}}\right)}{\left(\frac{\Delta \mathrm{P}}{\mathrm{P}}\right)} \\ -b &= \frac{\Delta Q}{\Delta \mathrm{P}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{E_D = -b * \frac{P}{Q}}$$

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES
SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

Πτώση τιμής

OP_1 σε OP_2

$$E_d = \frac{(\frac{\Delta Q}{Q})}{(\frac{\Delta P}{P})} = \frac{[(OQ_2 - OQ_1)/OQ_1]}{[(OP_1 - OP_2)/OP_1]}$$

$$E_d = -\frac{Q1Q2}{P1P2} \bullet \frac{OP1}{OQ1}$$

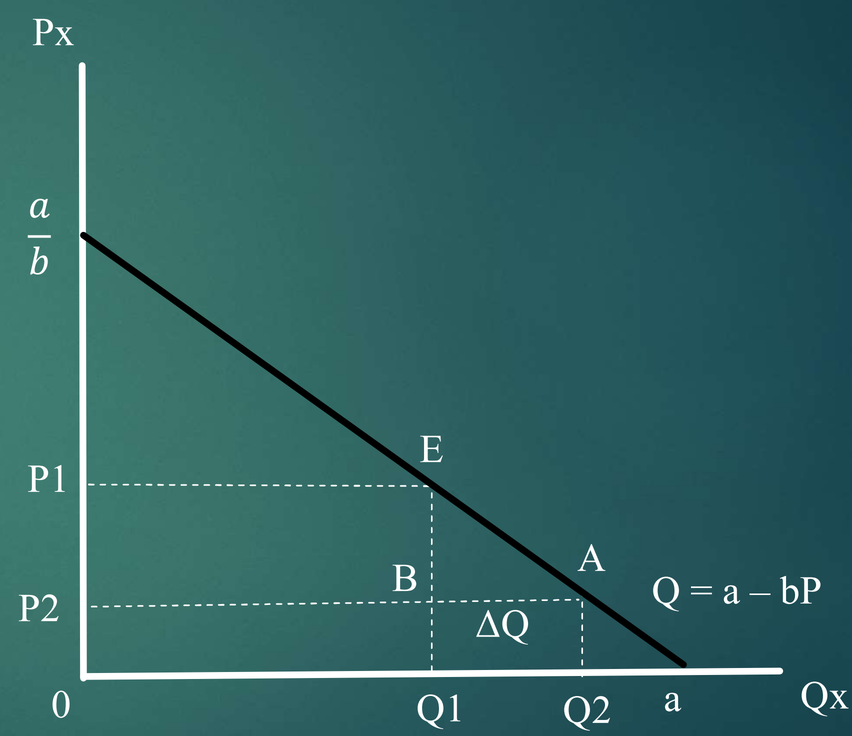
OQ_1 σε OQ_2

Αύξηση ποσότητας

Από το σχήμα:

$$\frac{Q_1Q_2}{P_1P_2} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} = \frac{BA}{EB} = b$$

$$E_D = -b \bullet \frac{OP1}{OQ1}$$



Λύνοντας την Q = a – bP ως προς P:

$$P = \frac{a-Q}{b}$$

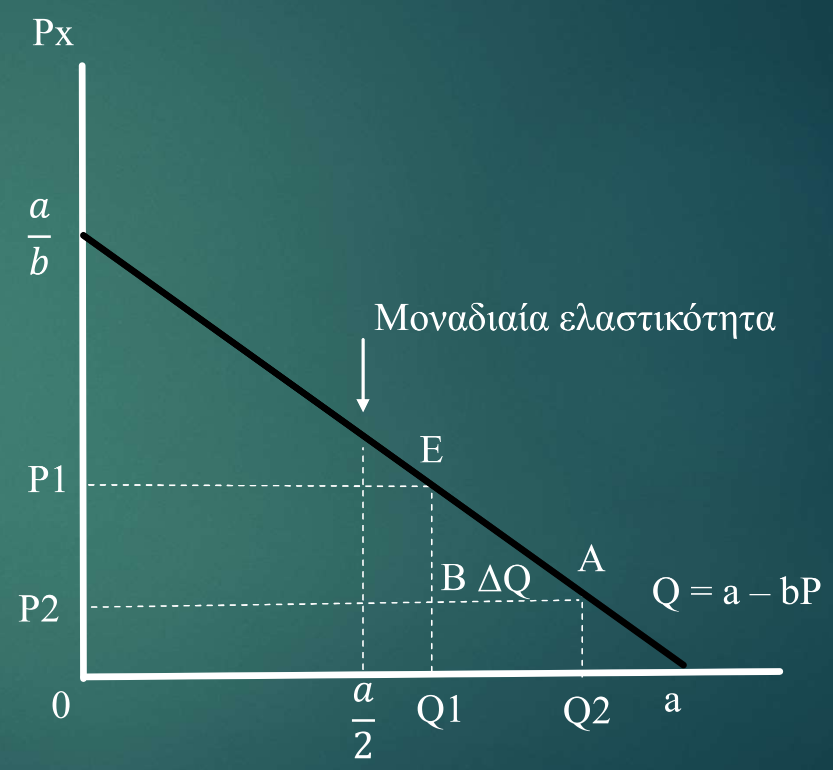
$$E_D = -b * \frac{P}{Q}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_D = 1 - \frac{a}{Q}}$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

Όταν P = 0 και Q = α $\rightarrow$ $E_D = 0$

Όταν Q = α/2 $\rightarrow$ $E_D = -1$

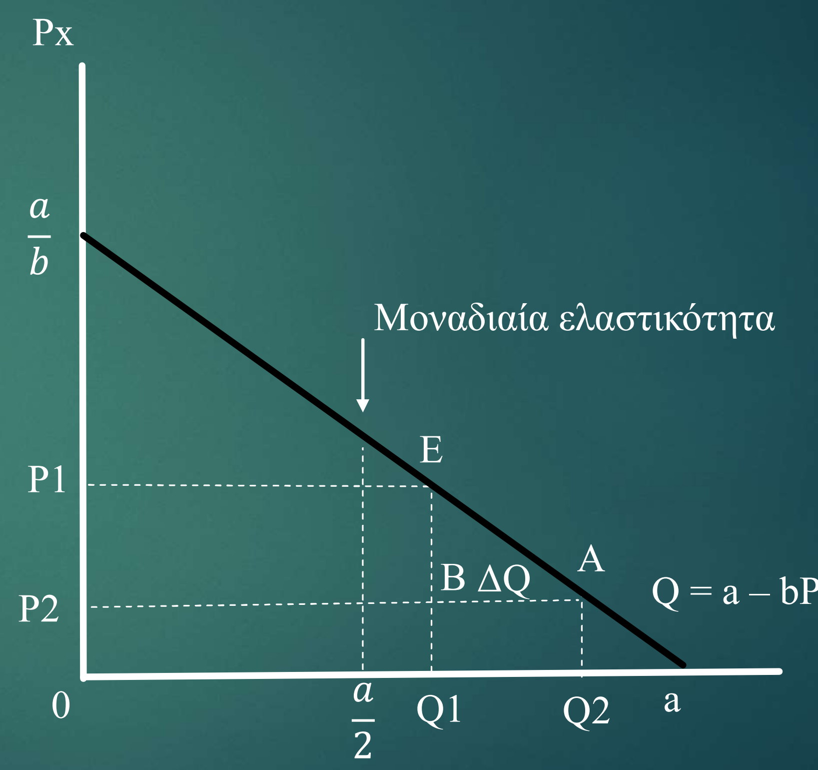


ENOTHTA 1

Όταν Q > a/2 → $E_D < 1$

Παράδειγμα:

Αν Q=4a/5 τότε $E_D = 1-\frac{5}{4} = -\frac{1}{4} = -0{,}25$



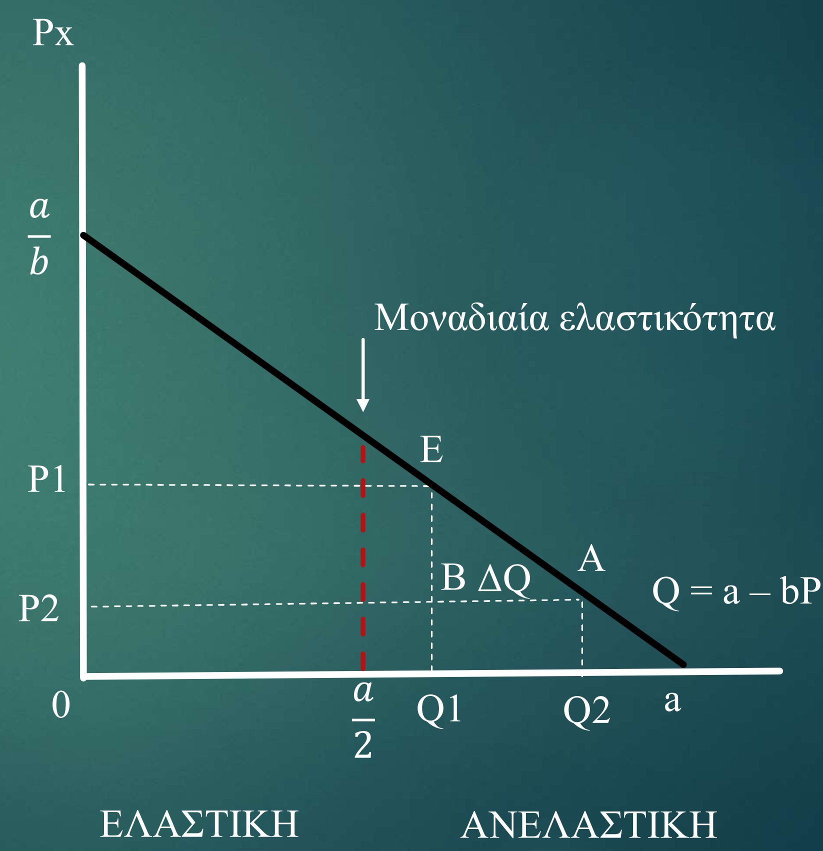
ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

Όταν Q < a/2 → $E_D > -1$

Παράδειγμα:

Αν Q=a/4 τότε $E_D = 1 - \frac{4\alpha}{\alpha} = -3$



ΕΝΟΤΗΤΑ 1

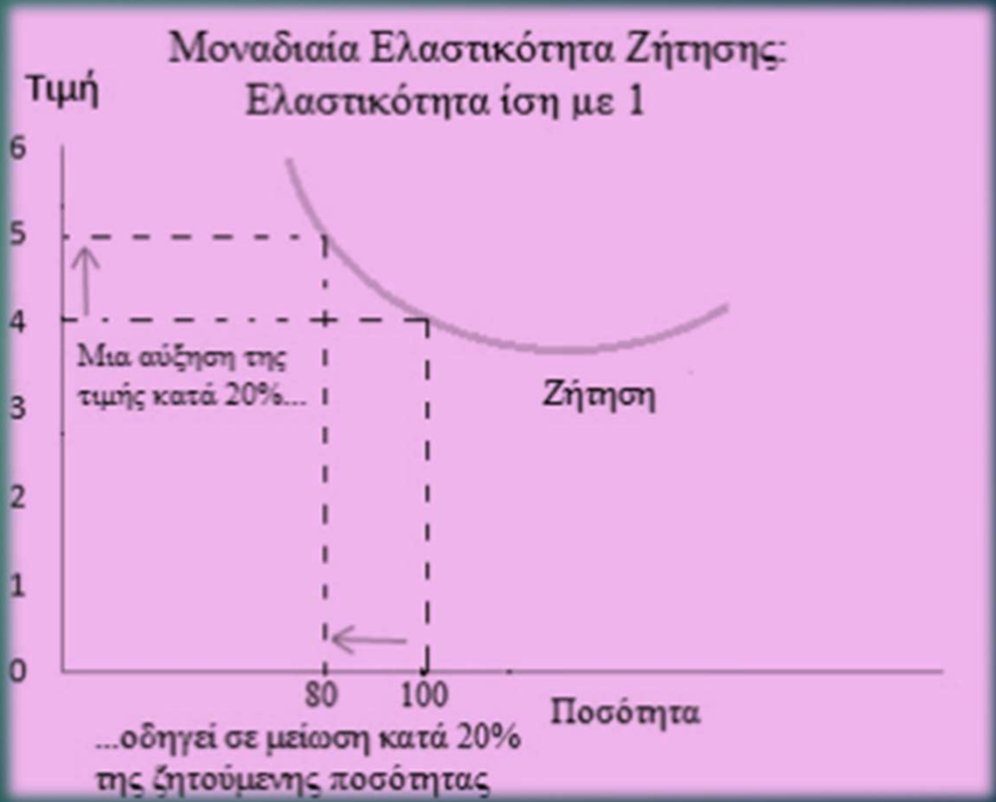
$|E_D| > 1$

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

$|E_D| < 1$

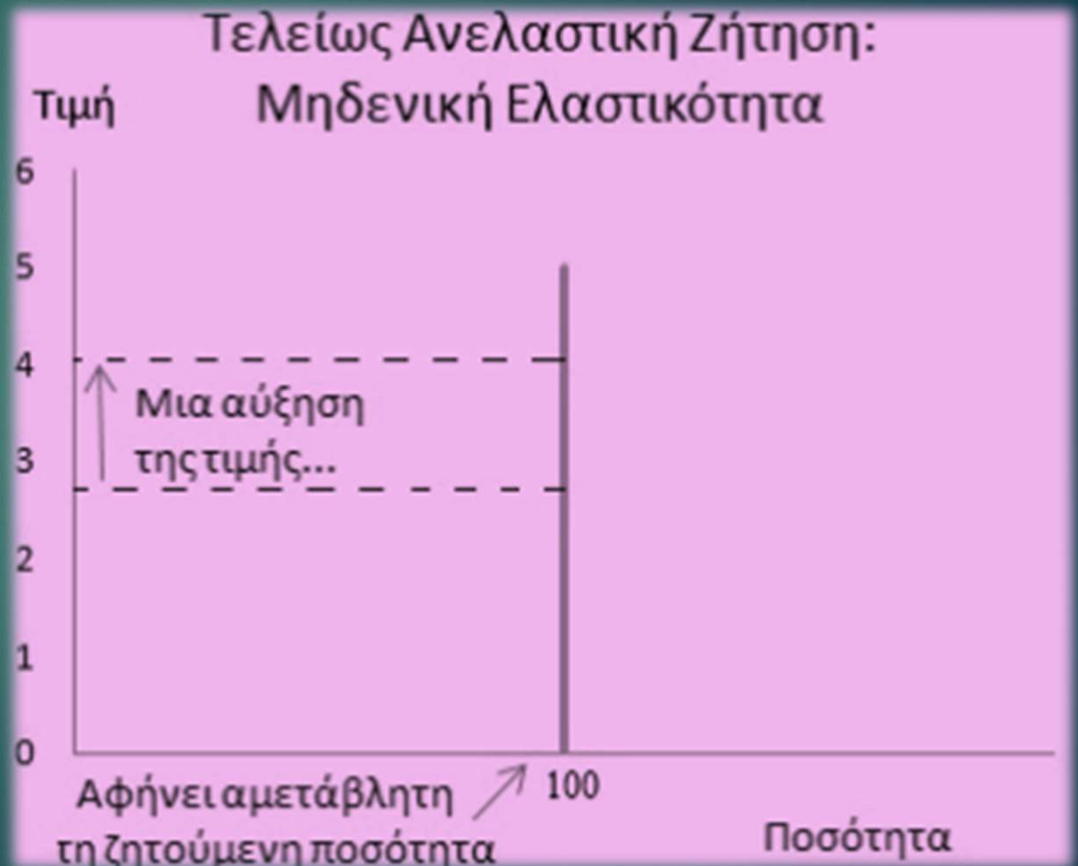
ΕΝΟΤΗΤΑ 1

$|E_D| = 1$

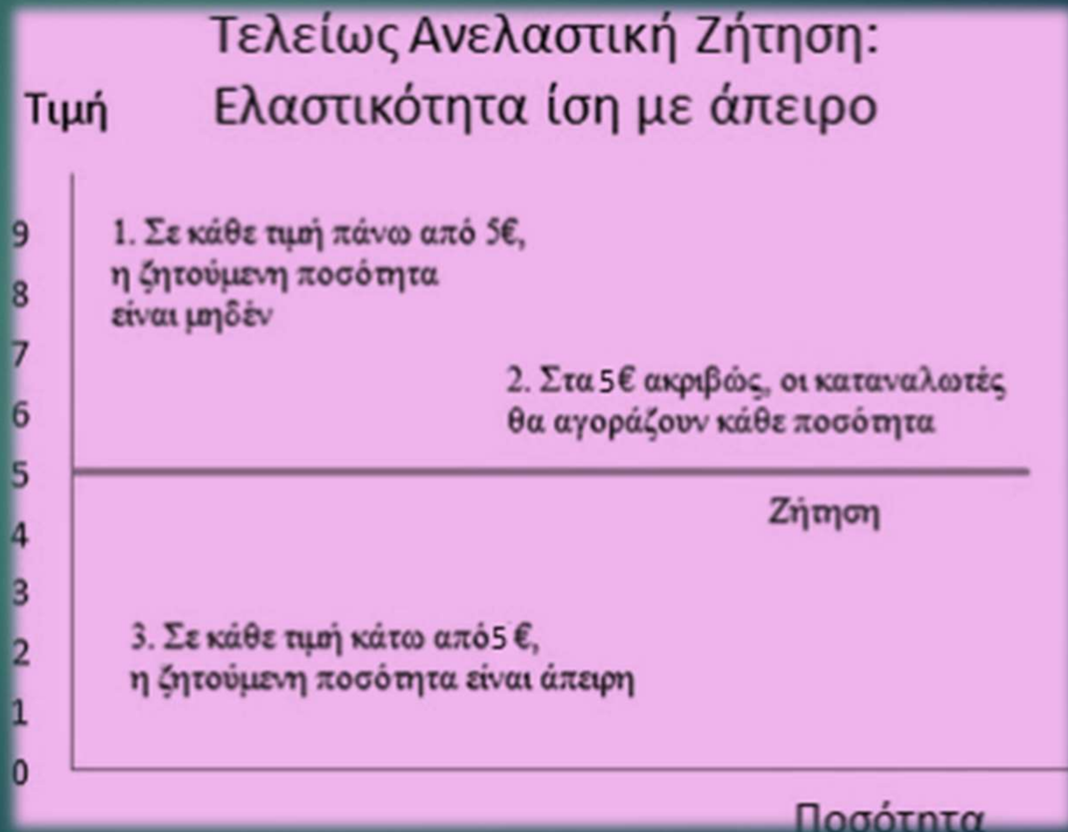


PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES
SCHOOL OF ECONOMICS AND ADMINISTRATION
DEPARTMENT OF ECONOMIC & REGIONAL DEVELOPMENT

$|E_D| = 0$



$|E_D| = \infty$


Τελείως Ανελαστική Ζήτηση:
Ελαστικότητα ίση με άπειρο
Τιμή
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1. Σε κάθε τιμή πάνω από 5€, η ζητούμενη ποσότητα είναι μηδέν
2. Στα 5€ ακριβώς, οι καταναλωτές θα αγοράζουν κάθε ποσότητα
Ζήτηση
3. Σε κάθε τιμή κάτω από 5 €, η ζητούμενη ποσότητα είναι άπειρη
Ποσότητα

ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται η ακόλουθη συνάρτηση ζήτησης: $Q = 50-0{,}1P$

Να βρεθεί η ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή, όταν $P = 2$.

ΛΥΣΗ

Η ελαστικότητα ζήτησης δίνεται από τον τύπο: $E_D = \dfrac{(\frac{\Delta Q}{Q})}{(\frac{\Delta P}{P})}$

Από την Q = 50-0,1P → $(\frac{\Delta Q}{\Delta P}) = -0{,}1$

→ $E_D = -0{,}1 * \frac{P}{Q}$

Όταν P = 2 τότε Q = 50-0,1-2 → Q = 49,8

Για P = 2 και Q = 49,8

$E_D = -0{,}1 \bullet \frac{2}{49{,}8} \rightarrow E_D = -0{,}004$

Άρα, η ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή ισούται με -0,004, όταν η τιμή ισούται με 2.

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

Η **ελαστικότητα της προσφοράς (Es), ως προς την τιμή**, *ορίζεται ως η ποσοστιαία μεταβολή στην προσφερόμενη ποσότητα (Q), όταν μεταβάλλεται η τιμή (P) κατά 1%.*

$$E_S = \frac{(\frac{\Delta Q}{Q})}{(\frac{\Delta P}{P})}$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

Αν η συνάρτηση προσφοράς δίνεται από τη συνάρτηση $Q = \gamma + \delta P$

Μια μεταβολή της P κατά ΔP θα είναι:

$$Q + \Delta Q = \gamma + \delta(P + \Delta P) \quad * \rightarrow \quad \Delta Q = \delta \Delta P \rightarrow \delta = \frac{\Delta Q}{\Delta P}$$

$$E_S = \frac{\left(\frac{\Delta Q}{Q}\right)}{\left(\frac{\Delta P}{P}\right)} \xrightarrow{\delta = \frac{\Delta Q}{\Delta P}} \boxed{Es = \left(\frac{P}{Q}\right) * \delta} \xrightarrow{Q = \gamma + \delta P} \boxed{E_S = \delta * \frac{P}{(\gamma + \delta P)}}$$

*αφαιρώ την $Q = \gamma + \delta P$

ΑΣΚΗΣΗ

Η συνάρτηση προσφοράς: $Q - 100 - 0{,}3P = 0$

Να βρεθεί η ελαστικότητα της προσφοράς ως προς την τιμή για τα μήλα, όταν $P = 10$ ευρώ.

ΛΥΣΗ

$Q - 100 - 0{,}3P = 0 \rightarrow Q = 100 + 0{,}3P$

Η ελαστικότητα προσφοράς $E_s = \frac{\Delta Q}{Q} / \frac{\Delta P}{P} = (\frac{\Delta Q}{\Delta P})(\frac{P}{Q})$

Από την $Q = 100 + 0{,}3P \rightarrow \frac{\Delta Q}{\Delta P} = 0{,}3$

$E_S = 0{,}3 * \frac{P}{Q}$

Όταν $P = 10$ τότε $Q = 100 + 0{,}3 * 10 \rightarrow Q = 103$

Για $P = 10$ και $Q = 103$

$$E_S = 0{,}3 \cdot \frac{10}{103} \rightarrow E_S = 0{,}029$$

Άρα, **η ελαστικότητα της προσφοράς ως προς την τιμή ισούται με 0,029, όταν η τιμή ισούται με 10 ευρώ**

ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΖΗΤΗΣΗΣ

Ας υποθέσουμε τη συνάρτηση ζήτησης: $Q = \alpha - \beta P + \gamma Y + \delta \Pi + \varepsilon T$

Αν : $\alpha = 100$

$\beta = 3$

$\gamma = 0,01$

$\delta = 0,4$

$\varepsilon = 0,05$

$$Q=100-3P+0,01Y+0,4\Pi+0,05T$$

Όπου

P: Η τιμή του ζητούμενου αγαθού.

Y: Το εισόδημα του καταναλωτή.

Π: Η τιμή του υποκατάστατου ή συμπληρωματικού αγαθού.

T: Μια ποσότητα, η οποία εκφράζει τις μεταβολές στις προτιμήσεις του καταναλωτή.

ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΖΗΤΗΣΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

Η ελαστικότητα της ζήτησης (E_D) ως προς την τιμή (P) θα είναι:

$$E_d = \left(\frac{P}{Q}\right) * \left(\frac{\Delta Q}{\Delta P}\right)$$

Αν η τιμή (P) μεταβληθεί κατά ΔP, με δεδομένα τα Y, Π και T η

$$Q=100-3P+0{,}01Y+0{,}4\Pi+0{,}05T$$

Γίνεται

$$Q+\Delta Q = 100 - 3(P+\Delta P)+ 0{,}01\ Y+0{,}4\Pi+0{,}05T$$

Αφαιρώ την
$Q=100-3P+0{,}01Y+0{,}4\Pi+0{,}05T$

$$\Delta Q = -3(\Delta P)$$

$$\rightarrow \quad \frac{\Delta Q}{\Delta P} = -\beta = -3$$

ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΖΗΤΗΣΗΣ

Έστω $P = 10$, $Y = 2.000$, $\Pi = 10$ και $T = 40$

τότε η $Q=100-3P+0{,}01Y+0{,}4\Pi+0{,}05T$

$$Q = 100 - 3*10 + 0{,}01*2.000 + 0{,}4*10 + 0{,}05*40$$

$$\Rightarrow Q= 100 - 30 + 20 + 4 + 2$$

$$\Rightarrow Q = 96$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta P} = -\beta = -3 \Rightarrow E_D = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta P}\right) * \left(\frac{P}{Q}\right) = -\beta\left(\frac{P}{q}\right) = \left(\frac{10}{96}\right) * (-3) = -0{,}31$$

ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΖΗΤΗΣΗΣ

Αντίστοιχα εργάζομαι για την ελαστικότητα της ζήτησης ως προς το εισόδημα (Y)...

Συνεπώς, για τη συνάρτηση: $Q = α\text{-}βP+γY+δΠ+εT = 100\text{-}3P+0{,}01Y+0{,}4Π+0{,}05T$

$$E_Y = \left(\frac{ΔQ}{ΔY}\right) * \left(\frac{Y}{Q}\right) = γ* \frac{Y}{Q} = 0{,}01* \left(\frac{2.000}{96}\right) = \frac{20}{96} = 0{,}20$$

Αν το εισόδημα αυξηθεί κατά 1%, η ζητούμενη ποσότητα θα αυξηθεί κατά 0,20%.

ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΖΗΤΗΣΗΣ

Η ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή του υποκατάστατου ή συμπληρωματικού (Π) αγαθού θα ονομάζεται **σταυροειδής ελαστικότητα ζήτησης** (E_{XD})

Συνεπώς, για τη συνάρτηση: Q = α-βP+γY+δΠ+εT = 100-3P+0,01Y+0,4Π+0,05T

$$E_{XD} = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta \Pi}\right) * \left(\frac{\Pi}{Q}\right) = \delta * \frac{\Pi}{Q} = 0{,}4 * \left(\frac{10}{96}\right) = \frac{20}{96} = 0{,}04$$

- Αν $E_{XD} > 0$ → ΥΠΟΚΑΣΤΑΤΟ
- Αν $E_{XD} < 0$ → ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟ

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω ότι η συνάρτηση ζήτησης ενός αγαθού Χ: **$Q_X = 20 - 2P_X - 0{,}5P\psi + 0{,}01Y$**

Q_x : Η ζητούμενη ποσότητα του αγαθού Χ.

P_χ : Η τιμή του αγαθού Χ.

P_Ψ : Η τιμή του αγαθού Ψ.

Y : Το εισόδημα του καταναλωτή.

1) Να εκφραστεί:

α) $Q_x = \Phi(P_\chi)$, όταν $P_\psi = 10$ και $Y = 500$

β) $Q_x = \Phi(P_\psi)$, όταν $P_\chi = 10$ και $Y = 2.000$

γ) $Q_x = \Phi(Y)$, όταν $P_\chi = 5$ και $P_\psi = 10$

2) Να εκτιμηθούν:

α) Η ελαστικότητα E_{XD} για 1(α) όταν $P_\chi = 5$.

β) Η ελαστικότητα $E_{\Psi D}$ για 1(β) όταν $P_\psi = 10$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

ΛΥΣΗ

1α) Θέλουμε να εκφράσουμε $Q_x = \Phi(P_\chi)$ για δεδομένες τιμές $P_\psi = 10$ και $Y = 500$

Οπότε η συνάρτηση $Q_X = 20 - 2P_X - 0{,}5P\psi + 0{,}01Y$ γίνεται

$$Q_x = 20 - 2P_X - 0{,}5P_\psi + 0{,}01Y$$

$$\rightarrow \; Q_x = 20 - 2P_X - (0{,}5 * 10) + (0{,}01 * 500)$$

$$\rightarrow Q_x = 20 - 2P_X - 5 + 5$$

$$\rightarrow Q_x = 20 - 2P_X$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

ΛΥΣΗ

1β) Θέλουμε να εκφράσουμε $Q_x = Φ(P_ψ)$ για δεδομένες τιμές $P_χ = 10$ και $Y = 2.000$

Οπότε η συνάρτηση $Q_X = 20 - 2P_X - 0,5Pψ + 0,01Y$ γίνεται

$$Q_x = 20 - 2P_X - 0,5P_Ψ + 0,01Y$$

$$\rightarrow Qx = 20 - (2 * 10) - 0,5Pψ + (0,01 * 2.000)$$

$$\rightarrow Qx = 20 - 0,5Pψ$$

ΛΥΣΗ

1γ) Θέλουμε να εκφράσουμε $Q_x = \Phi(Y)$ για δεδομένες τιμές $P_\chi = 5$ και $P_\psi = 10$

Οπότε η συνάρτηση $Q_X = 20 - 2P_X - 0{,}5P\psi + 0{,}01Y$ γίνεται

$$Qx = 20-(2*5) - (0{,}5*10) + 0{,}01Y$$

$$\rightarrow \quad Qx = 5 + 0{,}01\ Y$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

ΛΥΣΗ

2α) Για να εκτιμήσουμε την ελαστικότητα E_{XD} για 1(α) όταν $P_X = 5$

$$E_{XD} = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta Px}\right) * \left(\frac{Px}{Q}\right)$$

Από ερώτημα 1α → $Q_x = 20 - 2P_X$ → $\left(\frac{\Delta Q}{\Delta P}\right) = -2$

$P_X = 5$

$Q_x = 20 - (2 * 5)$

→ $Q_x = 10$

$$E_{XD} = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta Px}\right) * \left(\frac{Px}{Q}\right) = (-2) \cdot \left(\frac{5}{10}\right) = -1$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

ΛΥΣΗ

2β) Για να εκτιμήσουμε την ελαστικότητα $E_{\psi D}$ για 1(β) όταν $P_\psi = 10$

$$E_{\Psi D} = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta P\psi}\right) * \left(\frac{P\psi}{Q}\right)$$

Από ερώτημα 1^{β} → $Q_x = 20- 0{,}5P_\psi$ ⟶ $\left(\frac{\Delta Q}{\Delta P\psi}\right) = -0{,}5$

$P_\psi = 10$

$Q_x=20-(0{,}5 * 10)$

→ $Q_x = 15$

$$E_{\Psi D} = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta P\psi}\right) * \left(\frac{P\psi}{Q}\right) = (-0{,}5) \cdot \left(\frac{10}{15}\right) = -\frac{1}{3}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται η ακόλουθη συνάρτηση προσφοράς:

$$Q = c + d*P, \quad d>0$$

1. Να δειχθεί ότι η ελαστικότητα προσφοράς E_s είναι $E_s > 0$.
2. Να βρεθεί, επίσης, μια συνθήκη, για να ισχύει $E_s > 1$ σε οποιαδήποτε ποσότητα Q.
3. Να δοθεί και η οικονομική ερμηνεία της ελαστικότητας για Es > 1.

ΛΥΣΗ

1. Να δειχθεί ότι η ελαστικότητα προσφοράς E_s είναι $E_s > 0$

Η ελαστικότητα της προσφοράς είναι:

$$E_s = \frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P} = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta P}\right)\left(\frac{P}{Q}\right) \xrightarrow{Q=c+dP} E_s = d^* \left(\frac{P}{Q}\right)$$

Όμως, $d > 0 \longrightarrow Es > 0$

ΛΥΣΗ

2. Να βρεθεί, επίσης, μια συνθήκη, για να ισχύει $E_s > 1$ σε οποιαδήποτε ποσότητα Q

Για να ισχύει $E_s > 1$ θα πρέπει:

$E_s > 1$ ⇒ $E_s = d * (\frac{P}{Q})$ ⇒ $d\frac{P}{Q} > 1$ ⇒ $dP > Q$ ⇒ $dP > c + dP$

⇒ $c < 0$

Δηλαδή για $c < 0$ ισχύει $E_s > 1$

ΛΥΣΗ

3. Να δοθεί και η οικονομική ερμηνεία της ελαστικότητας για Es > 1

Όταν η ελαστικότητα της προσφοράς είναι $E_s > 1$, τυχούσα ποσοστιαία μεταβολή της τιμής θα επιφέρει αναλογικά μεγαλύτερη ποσοστιαία μεταβολή της προσφερόμενης ποσότητας.

Η προσφορά είναι ελαστική.

ΑΣΚΗΣΗ

Βρείτε την ελαστικότητα ζήτησης για τη συνάρτηση

$$X = 100 - p - p^2 \qquad \text{όταν } p=5.$$

ΛΥΣΗ

$$X = 100 - p - p^2$$

$$\frac{dx}{dp} = -1-2p$$

Ελαστικότητα ζήτησης

$$E_d = -\frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = -\frac{p(-1-2p)}{100-p-p2} = \frac{p+2p^2}{100-p-p^2}$$

Όταν p=5, $E_d = \frac{5+50}{100-5-25} = \frac{55}{70} = \frac{11}{14} = 0{,}79 < 1$ (ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΗ)

ΑΣΚΗΣΗ

Δείξτε ότι η ελαστικότητα ζήτησης σε όλα τα σημεία της καμπύλης

$x*y^2 = c$ με c είναι σταθερά,

ισούται με 2.

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

ΛΥΣΗ

Λύνω την $x*y^2 = c$ ως προς x

$$\mathbf{x} = \frac{c}{y^2}$$

Οπότε $\frac{dx}{dy} = -\frac{2c}{y^3}$

Άρα, $E_d = -\frac{p}{x}\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{c/y^2}\left(-\frac{2c}{y^3}\right) = \frac{y^3}{c}\frac{2c}{y^3} = 2.$