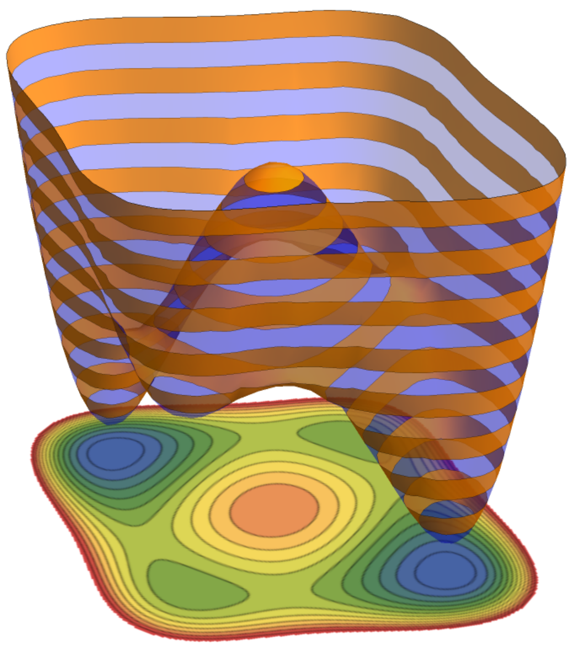
Μαθηματικά για Οικονομολόγους



Γρηγόρης Κόρδας

This draft: 4 Νοεμβρίου 2024.

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σύμφωνα με την Jane Austin, είναι μια πανθομολογούμενη αλήθεια ότι ένας εργένης με μεγάλη περιουσία πρέπει να χρειάζεται σύζυγο (Jane Austin, *Pride and Prejudice*). Μια άλλη πανθομολογούμενη αλήθεια είναι ότι η μελέτη των μαθηματικών παρουσιάζει εξαιρετικές δυσκολίες στο νεοεισερχόμενο στο πεδίο. Είναι λίγο-πολύ κοινή εμπειρία ότι ξεκινώντας κανείς τη μελέτη των μαθηματικών, ακόμα και με την καλύτερη βοήθεια, βρίσκει τον εαυτό του στο σκοτάδι αναφορικά με την πραγματική σημασία των διαδικασιών που μαθαίνει, μέχρι που σε ένα συγκεκριμένο σημείο της προόδου του και ανάλογα με την ένταση των προσπαθειών του και τις ιδιαίτερες ικανότητές του, κάποιος τυχαίος συνδυασμός αυτών που έμαθε και των δικών του ιδεών ρίχνει τελικά φως στο αντικείμενο.

Ο μεγάλος Αμερικανός εφευρέτης Thomas A. Edison είχε πει ότι "δεν υπάρχει τέχνασμα που ο άνθρωπος δεν θα σκαρφιστεί για να αποφύγει τον κόπο της σκέψης".[1] Αντί για τεχνάσματα, η Λογική μας προσφέρει **κανόνες** που συστηματοποιούν και διευκολύνουν την σκέψη.

Τα Μαθηματικά έχουν χαρακτηριστεί ως ο "Μέγας Εκδημοκρατιστής της Σκέψης" καθώς μας δίνουν τα εργαλεία για να κατανοήσουμε έννοιες και να λύσουμε προβλήματα που ακόμα οι πλέον ευφυείς και μορφωμένοι πρόγονοί μας δεν θα μπορούσαν να αντιμετωπίσουν. Για παράδειγμα, πριν την εισαγωγή των αραβικών αριθμοσυμβόλων και την υιοθέτησης της γραφής των αριθμών με το σύστημα της θέσης ψηφίων στον Μεσαίωνα, μόνο ένα πολύ μικρό ποσοστό του πληθυσμού στην Ευρώπη μπορούσε να κάνει ακόμα και τις πιο απλές αριθμητικές πράξεις, καθώς τα Ελληνικά και Ρωμαϊκά αριθμοσύμβολα είναι εντελώς ακατάλληλα για την συστηματοποίηση των πράξεων.

0.1 Λογική

Οι μαθηματικοί μοιάζουν κατά κάποιον τρόπο με τον λακωνικό κάτοικο της Πολιτείας του Βερμόντ των ΗΠΑ, που στην ερώτηση αν έχει ζήσει όλη την ζωή του στην Πολιτεία αυτός απάντησε "Όχι ακόμα". – John Allen Paulos

[1] There is no expedient to which a man will not resort to avoid the labor of thinking.

Θεωρήστε τους παρακάτω τρεις γρίφους.

Γρίφος 1: Σας δίνονται τέσσερις κάρτες, η κάθε μία από τις οποίες έχει ένα γράμμα στην μία πλευρά και έναν αριθμό στην άλλη.

A	8	K	3
(I)	(II)	(III)	(IV)

Η δουλειά σας είναι να βεβαιώσετε αν ο παρακάτω κανόνας ακολουθείται ή όχι:
Κανόνας: Αν μια κάρτα έχει ένα φωνήεν στην μία πλευρά, τότε πρέπει να έχει έναν ζυγό αριθμό στην άλλη πλευρά.

Αποφασίστε ποιες από τις κάρτες πρέπει να γυρίσετε για να βεβαιωθείτε αν ο παραπάνω κανόνας ικανοποιείται ή όχι.

Απάντηση: Μόνο την κάρτα (I). Αν στην άλλη πλευρά του “A” είναι κάποιος ζυγός αριθμός τότε ο κανόνας ικανοποιείται, αλλιώς όχι. Ο κανόνας δεν λέει τίποτα για τις άλλες κάρτες, οι οποίες μπορούν να έχουν οτιδήποτε (αριθμό, γράμμα, ή οποιοδήποτε άλλο σύμβολο, ή και τίποτα) στην άλλη πλευρά τους χωρίς να τον παραβιάζουν.

Ο κανόνας μας λέει ότι η πρόταση [“φωνήεν” $\Rightarrow$ “ζυγός αριθμός”] είναι αληθής. Η πρόταση αυτή δεν πρέπει να συγχέεται με την πρόταση [“ζυγός αριθμός” $\Rightarrow$ “φωνήεν”], η οποία είναι μια εντελώς διαφορετική πρόταση που ούτε επάγει ούτε επάγεται από την πρώτη πρόταση. Για παράδειγμα, στην άλλη όψη του “8” μπορεί να είναι οτιδήποτε χωρίς να παραβιάζεται ο κανόνας, παρότι το 8 είναι ζυγός αριθμός, αφού η πρόταση [“ζυγός αριθμός” και “σύμφωνο”] δεν παραβιάζει την πρόταση [“φωνήεν” $\Rightarrow$ “ζυγός αριθμός”].

Γρίφος 2: Μπροστά σας υπάρχουν δύο πόρτες που οδηγούν σε δύο δωμάτια, με τις εξής επιγραφές επάνω τους:

ΠΟΡΤΑ I	**ΠΟΡΤΑ II**
ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΔΩΜΑΤΙΟ ΥΠΑΡΧΕΙ ΕΝΑΣ ΘΗΣΑΥΡΟΣ, ΚΑΙ ΣΤΟ ΑΛΛΟ ΥΠΑΡΧΕΙ ΜΙΑ ΤΙΓΡΗΣ	ΣΤΟ ΕΝΑ ΑΠΟ ΤΑ ΔΥΟ ΔΩΜΑΤΙΑ ΥΠΑΡΧΕΙ ΕΝΑΣ ΘΗΣΑΥΡΟΣ ΚΑΙ ΣΤΟ ΑΛΛΟ ΥΠΑΡΧΕΙ ΜΙΑ ΤΙΓΡΗΣ

Πίσω από ποια πόρτα θα λέγατε ότι βρίσκεται ο θησαυρός, αν ξέρατε ότι *μόνο η μία από τις δύο επιγραφές είναι αληθής, ενώ η άλλη είναι ψευδής*;

Απάντηση: Ο θησαυρός είναι πίσω από την Πόρτα ΙΙ. Ο λόγος είναι ότι αν η επιγραφή στην Πόρτα Ι είναι αληθής, τότε και η επιγραφή στην Πόρτα ΙΙ είναι αληθής, και αφού μόνο η μία από τις δύο επιγραφές είναι αληθής, η επιγραφή στην Πόρτα Ι πρέπει είναι ψευδής. Άρα, αφού η επιγραφή στην Πόρτα Ι μας λέει ότι ο θησαυρός είναι εκεί, και αφού αυτό είναι ψευδές, ο θησαυρός πρέπει να βρίσκεται πίσω από την Πόρτα ΙΙ.

Γρίφος 3: Σε ένα σταυροδρόμι όπου ο ένας δρόμος οδηγεί στην πόλη και ο άλλος στο δάσος, στέκονται δύο φύλακες. Αν ξέρετε ότι ο ένας φύλακας λέει πάντα αλήθεια και ο άλλος λέει πάντα ψέματα, και αν μπορείτε να ρωτήσετε μια ερώτηση τον ένα από τους δύο, ποια ερώτηση θα κάνετε για να βρείτε με βεβαιότητα ποιος δρόμος οδηγεί στην πόλη; (Υποθέστε ότι και οι δύο φύλακες ξέρουν τον δρόμο για την πόλη, και γνωρίζουν τον χαρακτήρα του άλλου).

Απάντηση: Θα ρωτούσατε: "Αν ρωτούσα τον άλλο φύλακα ποιος είναι ο δρόμος για την πόλη, τι θα μου έλεγε;". Ο φύλακας που λέει πάντα την αλήθεια θα σας πει το ψέμα που θα σας έλεγε ο άλλος, ενώ αυτός που λέει πάντα ψέματα θα σας πει ψέματα για την αλήθεια που θα σας έλεγε ο άλλος. Αλλά αφού η αλήθεια του ψέματος και το ψέμα της αλήθειας είναι και τα δύο ψέματα, όποιον από τους δύο φύλακες και αν ρωτήσετε την ερώτηση αυτή θα σας πει ψέματα. Άρα, θα πρέπει να πάρετε τον άλλο δρόμο από αυτόν που θα σας υποδείξει ο φύλακας που ρωτήσατε.

Εδώ χρησιμοποιούμε το "συμπεριληπτικό ή" (inclusive or) που επιτρέπει έστω μία από τις δύο ή και τις δύο προτάσεις να είναι ταυτόχρονα αληθείς, και όχι το "αποκλειστικό ή" (exclusive or, ή xor) που επιτρέπει μόνο μία από τις δύο προτάσεις να είναι αληθής.

(1) $A \Rightarrow B \iff \neg B \Rightarrow \neg A.$ (contraposition)

[Όταν $A =$"βρέχει έξω", τότε $B =$"ο δρόμος είναι βρεγμένος"], δηλαδή $A \Rightarrow B$, αλλά ["ο δρόμος μπορεί να είναι βρεγμένος" και για κάποιο άλλο λόγο "χωρίς να βρέχει έξω"], δηλαδή μπορεί $B \wedge \neg A$. Όμως, [αν $\neg B =$"ο δρόμος δεν είναι βρεγμένος" τότε $\neg A =$"δεν βρέχει έξω"], δηλ. $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Η δεύτερη συνεπαγωγή ονομάζεται **αντιθετοαντίστροφη** (contrapositive) της πρώτης, και χρησιμοποιείται ευρέως στις αποδείξεις θεωρημάτων.

(2) Η συνεπαγωγή [Όταν $A =$"βρέχει έξω" τότε $B =$"ο δρόμος είναι βρεγμένος"], δηλ. $A \Rightarrow B$, είναι ισοδύναμη με την συνεπαγωγή [ή $\neg A =$"δεν βρέχει έξω", ή $B =$"ο δρόμος είναι βρεγμένος", ή και τα δύο], δηλαδή $\neg A \vee B$. Συμπεραίνουμε ότι οι ακόλουθες συνεπαγωγές είναι ισοδύναμες

$$A \Rightarrow B \iff \neg A \vee B.$$

(3) Αν είναι ψευδές ότι [η πρόταση A συνεπάγεται την πρόταση B], δηλ. $\neg(A \Rightarrow B)$, τότε έπεται ότι η πρόταση $[A \vee \neg B]$ είναι αληθής, δηλαδή

$$\neg(A \Rightarrow B) \quad \Longleftrightarrow \quad A \vee \neg B.$$

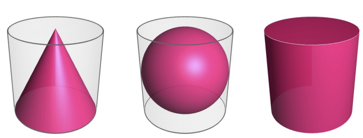
0.2 Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός

Σε μία συνέντευξη που έδωσε ο διάσημος θεωρητικός φυσικός και μαθηματικός του *Institute for Advanced Study του Princeton* **Edward Witten**[2] σχετικά με την εκπληκτική ικανότητα των μαθηματικών να εξηγούν τον φυσικό κόσμο γύρω μας, ο Witten αναφέρεται ειδικά στον Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό (Calculus) και εκφράζει την βεβαιότητά του ότι

> Οποιοσδήποτε πολιτισμός ευφυών όντων οπουδήποτε στο σύμπαν αργά ή γρήγορα θα ανακαλύψει τον Λογισμό, είτε στην προσπάθειά τους να εξηγήσουν τα φαινόμενα γύρω τους, π.χ. κινήσεις πλανητών, τροχιές βλημάτων, κ.α., είτε για καθαρά θεωρητικούς λόγους, π.χ. **για να εξηγήσουν την σχέση που υπάρχει ανάμεσα στον όγκο και το εμβαδό επιφανείας διαφόρων σωμάτων.**

Η τελευταία παρατήρηση του Witten αναφορικά με την σχέση ανάμεσα στον όγκο και το εμβαδό επιφανείας σωμάτων, **περιγράφει σε μία πρόταση ολόκληρο τον Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό**.

Αρχιμήδειες Σχέσεις Κώνου, Σφαίρας, Κυλίνδρου



Εμβαδόν Επιφανείας	A	$2\phi\pi r^2$ (*)	$4\pi r^2$	$4\pi r^2$ $(6\pi r^2)$ (**)
Όγκος	V	$\frac{2}{3}\pi r^3$	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$\frac{6}{3}\pi r^3$

(*) $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ Χρυσή αναλογία (golden ratio)

(**) Ανοιχτός και κλειστός κύλινδρος

Για να κατανοήσουμε την παρατήρηση του Witten, ας θεωρήσουμε μια σφαίρα με ακτίνα r στο $\mathbb{R}^3$, και ας γράψουμε $V_3(r)$ για τον όγκο (volume) και $A_2(r)$ για το εμβαδόν επιφανείας της (surface area). Χρησιμοποιώντας μόνο στοιχειώδης γεωμετρικές ιδιότητες του κώνου, της σφαίρας και του κυλίνδρου, μπορούμε να αποδείξουμε χρησιμοποιώντας την **Μέθοδο της Εξάντλησης** του **Αρχιμήδη**[3] (που είναι πρόγονος του Λογισμού) ότι

$$V_3(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \text{και} \qquad A_2(r) = 4\pi r^2.$$

[2] Ο **Witten** είναι σίγουρα ένας από τους πιο ιδιοφυής ανθρώπους εν ζωή, αν όχι ο πιο ιδιοφυής! Η ερευνά του στην *Θεωρία των Χορδών* (String Theory), την οποία και εισήγαγε, επηρέασε βαθύτατα και την Φυσική και τα Μαθηματικά. Μπορείτε να παρακολουθήσετε το σχετικό απόσπασμα της συνέντευξής του στο **Youtube**: Edward Witten – How is Mathematics Truth and Beauty?

[3] Ο Αρχιμήδης είναι ένας από τους τέσσερεις μεγαλύτερους μαθηματικούς όλων των εποχών και θα μιλήσουμε για αυτόν αναλυτικά αργότερα. Οι άλλοι τρεις είναι ο Newton, ο Euler, και ο Gauss.

Το εκπληκτικό φαινόμενο στο οποίο αναφέρεται ο Witten είναι ότι οι δύο αυτές συναρτήσεις συνδέονται με την σχέση

$$A_2(r) = V_3'(r),$$

ή, κάτι που είναι ισοδύναμο λόγω του **Θεμελιώδους Θεωρήματος του Λογισμού**, με την σχέση

$$V_3(r) = \int_0^r A_2(\rho)\, d\rho.$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι το εμβαδό επιφανείας είναι η *παράγωγος* **του όγκου, ή ότι ο όγκος είναι το** *ορισμένο ολοκλήρωμα* **τους εμβαδού επιφανείας!**

Μια ανάλογη σχέση ισχύει και για τον δίσκο στις δύο διαστάσεις, καθώς το εμβαδόν του δίσκου με ακτίνα r, $V_2(r)$, και η περιφέρεια (circumference) του κύκλου με ακτίνα r, $A_1(r)$, είναι

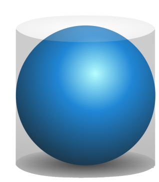
$$V_2(r) = \pi r^2 \qquad \text{και} \qquad A_1(r) = 2\pi r,$$

και έχουμε ότι $A_1(r) = V_2'(r)$. Παρόμοιες σχέσεις αποδεικνύονται εύκολα και για το τετράγωνο και τον κύβο, αλλά και όχι μόνο.

Χρησιμοποιώντας την Μέθοδο της Εξάντλησης, ο Αρχιμήδης απέδειξε ότι η σταθερά C_2 που εμφανίζεται στον τύπο για το εμβαδό του δίσκου $V_2 = C_2 r^2 (= \pi r^2)$ και η σταθερά C_3 που εμφανίζεται στον τύπο για τον όγκο της σφαίρας $V_3 = C_3 r^3 (= \frac{4}{3}\pi r^3)$, συνδέονται με την σχέση $C_3 = \frac{4}{3} C_2$, αποδεικνύοντας ότι

0.1 Θεώρημα (Αρχιμήδης)

$$\frac{V_{Sphere}}{V_{Cylinder}} = \frac{2}{3}.$$



και χρησιμοποιώντας το εύκολο στην απόδειξη αποτέλεσμα $V_{Cylinder} = \frac{6}{3}\pi r^3$. Άρα, αν $C_2 = \pi$, ένας άρρητος αριθμός που ο Αρχιμήδης προσέγγισε με την χρήση εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων πολυγώνων, τότε $C_3 = \frac{4}{3}\pi$, δηλαδή

η ίδια σταθερά π εμφανίζεται και στους δύο τύπους (!!!),

κάτι που *a priori* δεν είναι καθόλου προφανές αφού **το C_3 θα μπορούσε να είναι κάποιος νέος άρρητος αριθμός**. *A priori*, κανείς θα μπορούσε να φανταστεί ότι όπως ο κύκλος έχει την άρρητη σταθερά του π_1, η σφαίρα θα έχει την δικής της άρρητη σταθερά π_2, δηλαδή ότι $V_2 = \pi_1 r^2$, $V_3 = \pi_2 r^3, \ldots$ κοκ σε μεγαλύτερες διατάσεις. Το ότι όλες αυτές οι σταθερές είναι στην πραγματικότητα μία σταθερά, το π, είναι η **πρώτη 'κλεφτή ματιά'** στο τεράστιο και μεγαλοπρεπές οικοδόμημα του **Μαθηματικού Λογισμού** που κρύβεται από πίσω, και που η ανακάλυψή του θα έπρεπε να περιμένει την ιδιοφυΐα του Νεύτωνα, 18 αιώνες μετά. Η ιδιοφυΐα του Αρχιμήδη τον οδήγησε να καταλάβει ότι κάτι πολύ σπουδαίο συμβαίνει εδώ, και γι' αυτό έγραψε ότι **το Θεώρημα 0.1 ήταν το σπουδαιότερο θεώρημά του, και ζήτησε να χαραχθεί πάνω στον τάφο του.** [4] Πολλοί αναρωτιούνται γιατί ο Αρχιμήδης θεωρούσε αυτό ως το σπουδαιότερο θεώρημά του, ειδικά αφού είχε κάνει τόσο πολλές και σπουδαίες ανακαλύψεις στα Μαθηματικά και τη Φυσική. Αυτό που δεν αντιλαμβάνονται όσοι αναρωτιούνται, είναι την σχέση του θεωρήματος με τον Λογισμό, και ότι αυτό είναι μια **πρώτη 'πόρτα'** προς αυτόν, κάτι που κατάλαβε ο Αρχιμήδης χωρίς να ξέρει τίποτε για τον Λογισμό.

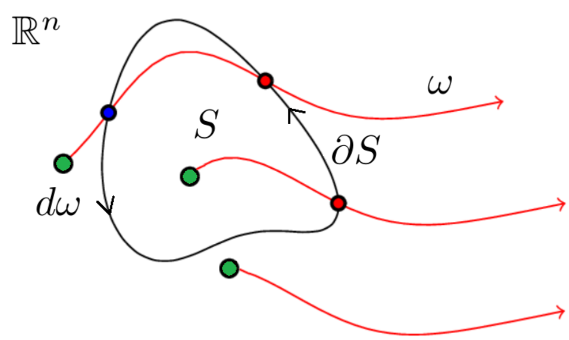
Η εκπληκτική αυτή σχέση ανάμεσα στον (n-διάστατο) όγκο V_n και το $(n-1)$-διάστατο εμβαδό επιφανείας A_{n-1} γενικεύεται σε (λίγο-πολύ) αυθαίρετα σχήματα στο $\mathbb{R}^n$ από το:

0.2 Θεώρημα (Θεώρημα του Stokes για Διαφορικές Μορφές) Για μια συμπαγή, προσανατολισμένη, ομαλή πολλαπλότητα S στο $\mathbb{R}^n$ με σύνορο ∂S, και μια διαφορική $(n-1)$-μορφή ω στο $\mathbb{R}^n$, ισχύει ότι

$$\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega,$$

όπου $d\omega$ είναι η εξωτερική αντισυμμετρική παράγωγος (exterior derivative) της ω, δηλαδή μια διαφορική n-μορφή στο $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη: Βλ. π.χ. Edwards H.M. (1994), *Advanced Calculus: A Differential Forms Approach*, Birkhäuser Basel, σελ. 220. ■



[4] Ο τάφος του Αρχιμήδη έχει χαθεί, αλλά ο Ρωμαίος φιλόσοφος Cicero γράφει ότι τον είχε βρει όταν τον αναζήτησε περίπου 140 χρόνια μετά τον θάνατο του Αρχιμήδη, το 75 π.Χ., αλλά η επιγραφή είχε ξεθωριάσει και δεν διαβαζόταν.

Αντί απόδειξης, δίνουμε την παραπάνω **σχηματική απεικόνιση του Θεωρήματος του Stokes.** Το ολοκλήρωμα $\int_{\partial S} \omega$ μετρά τον αριθμό των τομών με πρόσημο (signed intersections) της $(n-1)$-μορφής ω με το προσανατολισμένο σύνορο ∂S (2 κόκκινα *μείον* 1 μπλε = 1, γιατί οι κόκκινες τελείες έχουν αντίθετο προσανατολισμό από την μπλέ). Το ολοκλήρωμα $\int_S d\omega$ μετρά τον αριθμό των πράσινων τελειών $d\omega$ μέσα στο S, δηλαδή των 'πηγών' (sources) της ω μέσα στο S (που είναι 1). Αφού το ∂S είναι μια απλή καμπύλη στο $\mathbb{R}^n$, χωρίζει τον χώρο σε δύο κομμάτια, το συμπαγές (compact) S και το χωρίς-όριο (unbounded) $\mathbb{R}^n \setminus S$, οπότε, οι φορές που η ω βγαίνει από το S μείον τις φορές που η ω μπαίνει στο S, θα πρέπει να ισούται με τις πηγές $d\omega$ της ω μέσα στο S.

Το εκπληκτικά γενικό αυτό θεώρημα είναι μια τεράστια γενίκευση του **Θεμελιώδους Θεωρήματος του Λογισμού**, και περιλαμβάνει ως ειδικές περιπτώσεις το **Θεώρημα του Green** για επικαμπύλια ολοκληρώματα στο $\mathbb{R}^2$ και στο $\mathbb{R}^3$, το **Θεώρημα του Stokes για διανυσματικά πεδία** το οποίο αφορά την ολοκλήρωση διανυσματικών πεδίων πάνω σε επιφάνειες και όγκους στο $\mathbb{R}^3$, και το **Θεώρημα του Gauss**, γνωστό και ως Θεώρημα της Απόκλισης (Divergence theorem).

Για έναν φυσικομαθηματικό (σαν τον Witten) αυτή η σχέση ανάμεσα στον όγκο και την επιφάνεια δεν είναι στην πραγματικότητα καθόλου μυστηριώδης, αλλά, όπως πρώτος εξήγησε ο **Issac Newton** (1643-1727) που ανακάλυψε τον Λογισμό, εντελώς προβλέψιμη από την ακόλουθη σκέψη. Αν κανείς αναλογιστεί τις **διαστάσεις** του όγκου και της επιφάνειας, βλέπει αμέσως ότι αφού ο όγκος είναι ένα n-διάστατο μέγεθος και η επιφάνεια είναι $(n-1)$-διάστατο μέγεθος, ο όγκος μίας σφαίρας με ακτίνα r θα πρέπει να έχει τάξη r^n, και το εμβαδό της επιφάνειάς της τάξη r^{n-1}. Δηλαδή,

$$V_n(r) = K_n^{\mathrm{vol}}\, r^n \quad \text{και} \quad A_{n-1}(r) = K_{n-1}^{\mathrm{area}}\, r^{n-1},$$

όπου K_n^{vol} και K_{n-1}^{area} είναι κάποιες σταθερές. Αλλά για μια μεταβολή Δr στην ακτίνα, έχουμε από το Δυωνυμικό Θεώρημα ότι

$$V_n(r+\Delta r) = K_n^{\mathrm{vol}}(r+\Delta r)^n = K_n^{\mathrm{vol}}\left(r^n + nr^{n-1}\Delta r\right) + o(\Delta r)$$

και

$$\frac{\Delta V_n(r)}{\Delta r} = \frac{V_n(r+\Delta r) - V_n(r)}{\Delta r} = nK_n^{\mathrm{vol}} r^{n-1} + o(1).$$

Άρα πρέπει να έχουμε ότι

$$K_{n-1}^{\mathrm{area}} = nK_n^{\mathrm{vol}},$$

και

$$A_{n-1}(r) = \frac{n}{r}\, V_n(r),$$

δηλαδή **ο όγκος και η επιφάνεια της σφαίρας πρέπει να υπακούν στον κανόνα της παραγώγισης δύναμης**

$$(x^n)' = nx^{n-1},$$

αλλιώς θα παραβιαστούν οι διαστάσεις τους, οπότε $A_{n-1}(r) = V_n'(r)$, και $V_n(r) = \int_0^r A_{n-1}(\rho) d\rho$ **αναγκαστικά**. Αφού η περίμετρος του κύκλου στο $\mathbb{R}^2$ είναι (εξ' ορισμού του π) $A_1(r) = 2\pi r$, το εμβαδό του δίσκου που περικλείεται στον κύκλο είναι **αναγκαστικά** $V_2(r) = \int_0^r 2\pi\rho\, d\rho = \pi r^2$.[5]

0.3 Θεώρημα Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο n, ο **όγκος** της n-διάστατης μπάλας $\boldsymbol{B}^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq r\}$ είναι

$$V_n(r) = \frac{\pi^{n/2}}{(\frac{n}{2})!} r^n,$$

όπου $0! = 1$ και

$$(\tfrac{n}{2})! = \frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}, \qquad n \geq 1,$$

και το **εμβαδόν επιφανείας** της $(n-1)$-διάστατης σφαίρας $\boldsymbol{S}^{n-1}(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = r\}$, δηλ. του συνόρου της n-διάστατης μπάλας $\boldsymbol{B}^n(r)$, είναι

$$A_{n-1}(r) = \frac{d}{dr} V_n(r) = \frac{n}{r} V_n(r) = 2\pi r\, V_{n-2}(r) = \frac{n\pi^{n/2}}{(\frac{n}{2})!} r^{n-1}.$$

Απόδειξη: Έχουμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned} A_{n-1}(r) &= \frac{n}{r} V_n(r), \\ A_n(r) &= 2\pi r\, V_{n-1}(r). \end{aligned}$$

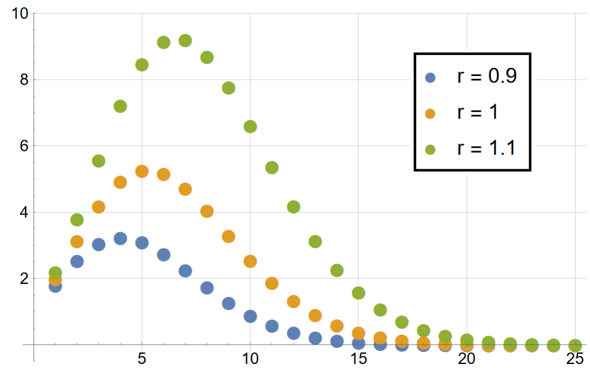
Η πρώτη σχέση έπεται από την συζήτηση παραπάνω. Η δεύτερη σχέση έπεται από το

[5] Έστω ο δίσκος $\boldsymbol{B}^2(r)$ με ακτίνα $r > 0$, και η 2-μορφή επιφανείας $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ στο $\mathbb{R}^2$. Το σύνορο του δίσκου $\partial\boldsymbol{B}^2(r)$ είναι ο κύκλος $\boldsymbol{S}^1(r)$. Επιπλέον, έχουμε ότι $\mathrm{d}(x\,\mathrm{d}y) = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, πράγμα που σημαίνει ότι $\omega = x\,\mathrm{d}y$, που είναι μία 1-μορφή στο $\mathbb{R}^2$. Άρα, από το Θεώρημα του Stokes για Διαφορικές Μορφές έχουμε ότι

$$\int_{\boldsymbol{B}^2(r)} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \int_{\boldsymbol{S}^1(r)} x\,\mathrm{d}y.$$

Ας υπολογίσουμε την ποσότητα στα δεξιά. Παραμετροποιώντας τον κύκλο με $x(\theta) = r\cos\theta$ και $y(\theta) = r\sin\theta$ όπου $0 \leq \theta < 2\pi$, και αντικαθιστώντας παίρνουμε,

$$\int_{S_1(r)} x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{r^2}{2}\left[\theta + \sin(2\theta)\right]_0^{2\pi} = \pi r^2.$$



Γράφημα 1: Ο όγκος $V_n(r)$ της n-διάστατης μπάλας $\boldsymbol{B}_n(r) = \{x \in R^n : ||x|| \leq r\}$ για $r = 0.9, 1, 1.1$ και $n = 1, 2, ..., 25$.

ότι η n-διάστατη σφαίρα $\boldsymbol{S}^n(r)$ είναι ομοιομορφική (homeomorphic) με το πηλίκο της n-διάστατης μπάλας $\boldsymbol{B}^n(r)$ με την $(n-1)$-διάστατη σφαίρα $\boldsymbol{S}^{n-1}(r)$, δηλ.

$$\boldsymbol{S}^n(r) \cong \boldsymbol{B}^n(r)/\boldsymbol{S}^{n-1}(r).$$

Για παράδειγμα, $\boldsymbol{S}^2(r) \cong \boldsymbol{S}^1(r) \times \boldsymbol{B}^1(r)$, δηλ. **το εμβαδό επιφανείας της σφαίρας ισούται με το εμβαδό επιφανείας του κυλίνδρου στον οποίο η σφαίρα εγγράφεται**, όπως απέδειξε ο Αρχιμήδης. Οι σχέσεις αυτές, σε συνδυασμό με τις προφανείς "αρχικές συνθήκες",

$$A_0(r) = 2, \quad A_1(r) = 2\pi r, \quad V_0(r) = 0, \quad V_1(r) = 2r, \text{ και } V_2(r) = \pi r^2$$

μας δίνουν τις πλήρεις αναδρομικές σχέσεις (complete recursive formulas) για τα $A_n(r)$ και $V_n(r)$ στο θεώρημα. ∎

Από το Θεώρημα 0.2 παίρνουμε τον παρακάτω ενδεικτικό πίνακα:

n	$V_n(r)$	$A_{n-1}(r)$	$V_n(1)/(2^n)$
0	1		1
1	$2\,r$	2	0.7854
2	$\pi\,r^2$	$2\pi\,r$	0.5236
3	$\frac{4}{3}\pi\,r^3$	$4\pi\,r^2$	0.3084
4	$\frac{1}{2}\pi^2\,r^4$	$2\pi^2\,r^3$	0.1645
5	$\frac{8}{15}\pi^2\,r^5$	$\frac{8}{3}\pi^2\,r^4$	0.0807
10	$\frac{1}{120}\pi^5\,r^{10}$	$\frac{1}{12}\pi^5\,r^9$	0.0025

Βλέπουμε ότι για κάθε δεδομένη ακτίνα $r > 0$, ο ο όγκος της n-διάστατης μπάλας $V_n(r)$ αρχικά αυξάνει με το n, φτάνει σε ένα μέγιστο όγκο για κάποιο n, και μετά πέφτει εκθετικά προς το μηδέν καθώς το n αυξάνει χωρίς όριο, δηλ.

$$\forall r > 0, \ \ \lim_{n\to\infty} V_n(r) = 0.$$

Άρα σε μεγάλες διαστάσεις, η n-διάστατη μπάλα $\boldsymbol{B}_n(r)$ έχει σχεδόν μηδενικό όγκο όσο μεγάλη και αν είναι η ακτίνα r (!!). Αυτό ονομάζεται η **κατάρα της διαστατικότητας** (curse of dimensionality[6]) και παίζει σημαντικό ρόλο στην μη-παραμετρική στατιστική και οικονομετρία καθώς θέτει όρια στην αποτελεσματικότητα των αλγορίθμων του machine learning (ML) και του artificial intelligence (AI). Στις $n = 2$ διαστάσεις, ο μοναδιαίος κύκλος περιλαμβάνει το $\pi/(2^2) \approx 78.5\%$ της επιφάνειας του τετραγώνου με πλευρά μήκους 2 στο οποίο είναι εγγεγραμμένος. Στις $n = 3$ διαστάσεις, η μοναδιαία μπάλα καταλαμβάνει το $(\frac{4}{3}\pi)/(2^3) \approx 52.3\%$ του κύβου με πλευρές μήκους 2. Στις $n = 10$ διαστάσεις, η 10-διάστατη μοναδιαία μπάλα καταλαμβάνει μόλις το $(\frac{1}{120}\pi^5)/(2^{10}) \approx 0.25\%$ του 10-διάστατου κύβου με πλευρές μήκους 2. Άρα, για να εκτιμήσουμε μη-παραμετρικά ένα υπόδειγμα με $n = 4$ βαθμούς ελευθερίας με την ίδια ακρίβεια που εκτιμούμε ένα υπόδειγμα με $n = 2$ βαθμούς ελευθερίας, χρειαζόμαστε περίπου τον **τριπλάσιο** αριθμό $(0.5236/0.1645 \approx 3.18)$ παρατηρήσεων (!!). Καθώς το n μεγαλώνει, ο όγκος του $2r$-κύβου αυξάνει εκθετικά προς το άπειρο, ενώ αυτός της r-μπάλας φθίνει εκθετικά προς το μηδέν!

Η ακόλουθη διάσημη ρήση του John von Neumann έρχεται στο μυαλό: "With four parameters I can fit an elephant, and with five I can make him wiggle his trunk." ("Με τέσσερις παράμετρους μπορώ να μοντελοποιήσω έναν ελέφαντα, και με πέντε μπορώ να τον κάνω να κουνάει την προβοσκίδα του.") Βλ. Jurgen Mayer, Khaled Khairy, and Jonathon Howard, *Drawing an elephant with four complex parameters*, **Am. J. Phys. 78, 648** (2010). Φυσικά, οι τέσσερεις μιγαδικές αντιστοιχούν σε οκτώ πραγματικές παραμέτρους, αλλά ο von Neuman δεν διευκρίνισε το σώμα στο οποίο οι παράμετροί του ανήκαν... Ίσως με τέσσερα quaternions θα μπορούσαμε να κάνουμε τον ελέφαντα να κουνάει και την ουρά του, και με τέσσερα octonions να τον κάνουμε να χορεύει κιόλας.

The covering dimension of a topological space X is defined to be the minimum value of n such that every finite open cover $\mathfrak{A}$ of X has an open refinement $\mathfrak{B}$ with order $n + 1$.

Η παραπάνω συζήτηση χρησιμοποιεί την έννοια της **διάστασης ενός χώρου**, και υποθέτει ότι γνωρίζουμε πώς να την ορίσουμε και να την μετρήσουμε. Αν ο χώρος είναι ένας **διανυσματικός** (γραμμικός) χώρος επί κάποιου αλγεβρικού σώματος K, όπως το $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ επί του $\mathbb{R}$, τότε η διάστασή του είναι φυσικά n (γιατί παράγεται από ακριβώς n γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα), αλλά τι συμβαίνει όταν ο χώρος είναι **μετρικός**

---

[6] Ο όρος αυτός οφείλεται στον R.E. Bellman, που τον εισήγαγε στο βιβλίο του *Dynamic programming*, Rand Corporation, 1957, Princeton University Press.

$(\mathbb{R}^n, m)$, ή, ακόμα χειρότερα, **τοπολογικός** $(\mathbb{R}^n, \mathscr{T})$; Τι σημαίνει η έννοια της διάστασης τότε και πώς την μετράμε; Το ότι η **τοπολογική διάσταση** του $\mathbb{R}^n$ είναι πράγματι n, είναι ένα από τα βαθύτερα θεωρήματα των σύγχρονων μαθηματικών, και η απόδειξή του απαιτεί τα "πυρηνικά όπλα" της αλγεβρικής τοπολογίας.

0.3 Η Αγία Γεωμετρία

Για έναν μαθηματικό **η Γεωμετρία είναι κάτι το Ιερό**. Όχι βέβαια με την μεταφυσική αλλά με την **φυσική έννοια**, ως **η βάση της κατανόησης του κόσμου γύρου μας**, και **η πηγή της διαισθητικής αλήθειας** (intuitive truth), αν δηλαδή κάτι τέτοιο υπάρχει καν (η διαίσθηση και η αλήθεια πολλές φορές διαφωνούν!). Κάθε φορά που ένας μαθηματικός αναφέρεται στην 'γεωμετρική ερμηνεία' μιας μαθηματικής έννοιας ή αποτελέσματος, προσπαθεί να συνδέσει μια υψηλού επίπεδου αφηρημένη κατασκευή, με κάτι απτό για το οποίο η Φύση, η Δαρβινική εξέλιξη, και η προσωπική μας εμπειρία στην ζωή, μας έχει εφοδιάσει με κάποια διαίσθηση. Ο μεγάλος μαθηματικός του 20ου αι. John von Neumann, αναφερόμενος στις αφηρημένες έννοιες των σύγχρονων μαθηματικών, είχε πει ότι **"Τα Μαθηματικά δεν τα καταλαβαίνεις. Απλά τα συνηθίζεις"**. [7] Αυτό που νομίζω ότι εννοούσε είναι ότι στην αρχή της μελέτης των μαθηματικών, και όσο η **Ευκλείδεια Γεωμετρία** ακόμα ισχύει, τα καταλαβαίνεις. Μετά χτίζεις νέες εμπειρίες και συνειρμούς, δηλαδή 'μαθαίνεις νέες διαισθητικές αλήθειες', και προχωράς να 'καταλάβεις' π.χ. μη-Ευκλείδειους και ή και τοπολογικούς χώρους. Όταν η Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν ισχύει πια, πρέπει κανείς να συνηθίσει, όπως λέει ο von Neumann, σε ' νέες διαισθητικές αλήθειες'.

Θεός αεί Γεωμετρεί
(από ένα χειρόγραφο βιβλίο του 13ου αι.)
Ο διαβήτης είναι σύμβολο της
Θεϊκής Πράξης της Δημιουργίας.
Ο Κόσμος στην μεσαιωνική αυτή
εικόνα είναι ένα **fractal** (!)

[7]"In mathematics you don't understand things. You just get used to them.' —John von Neumann

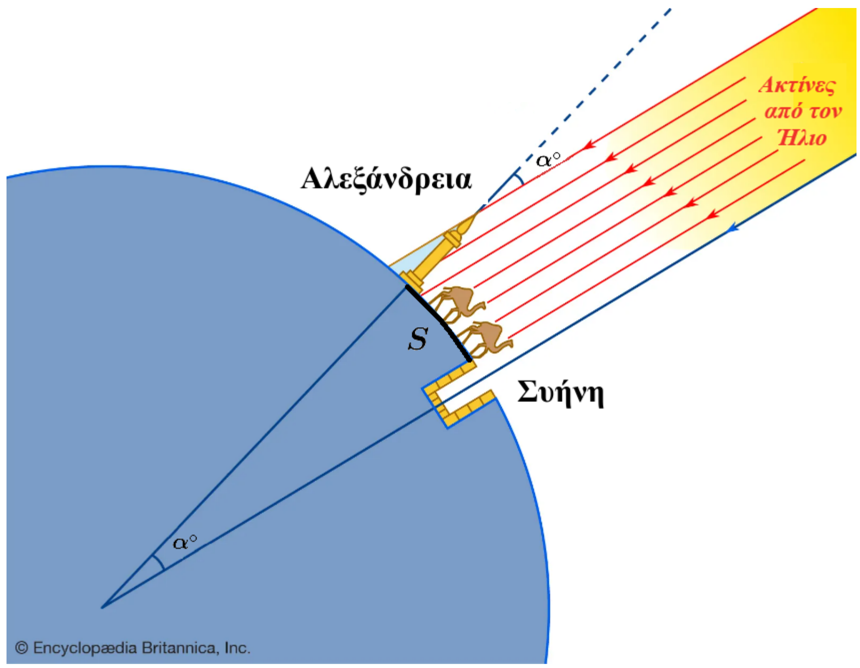
Αφήνοντας τις φιλοσοφίες και επιστρέφοντας στην Γη (άλλωστε η Γεωμετρία “μετρά την Γη”), όταν μιλάμε για ένα μαθηματικό αντικείμενο και του δίνουμε το επίθετο ‘γεωμετρικό’ εννοούμε ότι υπάρχει ως **αναλλοίωτο** (invariant), ότι έχει δηλαδή (κάτι σαν) ‘φυσική υπόσταση’ η οποία είναι ανεξάρτητη από τον τρόπο που εμείς το περιγράφουμε.

Αλεξάνδρεια

Συήνη

Ακτίνες από τον Ήλιο

$$P = S\,\frac{360^\circ}{\alpha^\circ}$$



0.4 Γραμμική Άλγεβρα

Η Γραμμική Άλγεβρα είναι η μελέτη γραμμικών απεικονίσεων μεταξύ διανυσματικών χώρων πεπερασμένων διαστάσεων.

Η Γραμμική Άλγεβρα και ο Λογισμός είναι απολύτως συμπληρωματικά εργαλεία. Ο Λογισμός είναι στην ουσία το σύνολο της γνώσης που μετατρέπει μη-γραμμικά προβλήματα σε τοπικά γραμμικά προβλήματα, και η Γραμμική Άλγεβρα τα λύνει.

Galois theory, originally introduced by Évariste Galois, provides a connection between field theory and group theory. This connection, the fundamental theorem of Galois theory, allows reducing certain problems in field theory to group theory, which makes them simpler and easier to understand.

$$
\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \arrow[dr] & \mathbb{Q}(\sqrt{6}) \arrow[d] & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \arrow[dl] \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & \{1\} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\{1,f\} \arrow[dr] & \{1,fg\} \arrow[d] & \{1,g\} \arrow[dl] \\
 & \{1,f,g,fg\} &
\end{tikzcd}
$$

0.5 Οικονομικά

Που και που στάσου μια στιγμή και αναλογίσου τον συνάνθρωπό σου. Μπορεί να σου σκαρώνει τίποτα. - Ανώνυμος

Από τότε που ο πρώτος άνθρωπος που γεννήθηκε και δεν δημιουργήθηκε απευθείας από τον Θεό, ο Κάιν, σκότωσε τον δεύτερο, τον αδελφό του Άβελ, φάνηκε ότι οι ανθρώπινες σχέσεις θα ήταν δύσκολες!

Τα Οικονομικά αποκαλούνται **'Η Ζοφερή Επιστήμη'** γιατί ενώ, όπως όλες οι επιστήμες ψάχνει 'την αλήθεια', κάποιες από τις 'οικονομικές αλήθειες' ενοχλούν σε προσωπικό επίπεδο. Την δεκαετία του 1980 είχαν προταθεί πέντε διαφορετικές **Θεωρίες Χορδών** στην **Φυσική**, οι οποίες αργότερα ενοποιήθηκαν σε μία γενική, την λεγόμενη **M-Theory**, η οποία περιέχει τις πέντε πρώτες ως οριακές υποπεριπτώσεις. Ακόμα και σήμερα, οι φυσικοί δεν ξέρουν σε ποιο ακριβώς από τα πέντε δυνατά κβαντικά σύμπαντα ζούμε, αλλά φαντάζομαι ότι κανένας από εμάς δεν θα το πάρει προσωπικά αν κάποτε μάθει ότι αποδείχθηκε πως ζούμε, ας πούμε, στο τρίτο. Στα οικονομικά τα πράγματα είναι διαφορετικά! Αν κάποιος πει ότι από την φύση του ο Δημόσιος Τομέας είναι αναποτελεσματικός και σπάταλος, που φυσικά είναι, κάποιοι (πχ. ίσως κάποιοι δημόσιοι υπάλληλοι) μπορεί να το εκλάβουν ως προσωπική μομφή. Και αν πούμε ότι τα επιδόματα ανεργίας ή η ασφαλιστική κάλυψη των ανασφάλιστων, δημιουργούν αντικίνητρα στην εργασία και την ασφάλιση, που φυσικά δημιουργούν, κάποιοι θα θυμώσουν πολύ μαζί μας.

Ένα μέρος αυτής της αντίδρασης είναι, φυσικά, αποτέλεσμα της λανθασμένης συνεπαγωγής ότι αν κάποιος βλέπει κάποιο πρόβλημα σε μια πολιτική, θα πρέπει κατ' ανάγκη να είναι και εναντίον της πολιτικής αυτής συνολικά, δηλαδή οφείλεται σε ένα Λάθος Λογικής. Άνθρωποι που δεν έχουν εκπαιδευτεί στην επιστημονική σκέψη, και άρα δεν μπορούν π.χ. να ξεχωρίσουν μεταξύ της συνεπαγωγής και της ισοδυναμίας, νομίζουν ότι καταλαβαίνουν μια συζήτηση μεταξύ οικονομολόγων, σε αντίθεση με μια συζήτηση μεταξύ φυσικών, που οι περισσότεροι θα παραδέχονταν ότι δεν την καταλαβαίνουν. Στην πραγματικότητα ο μέσος άνθρωπος ξέρει τόσα Οικονομικά όση και Φυσική (όσο αντιλαμβάνεται ο μέσος άνθρωπος την **M-theory** στην **Φυσική**, άλλο τόσο αντιλαμβάνεται και την **Θεωρία των Ορθολογικών Προσδοκιών** στα **Οικονομικά**), αλλά ενώ για την Φυσική δεν έχει γνώμη, για τα Οικονομικά είναι γεμάτος γνώμες.

Το άλλο μέρος της ‘ζοφερότητας’ των Οικονομικών είναι η ψευτο-πολιτικοποίηση της συζήτησης, και η πολιτική εκμετάλλευση ψευτοθεωριών προς άγραν ψήφων. Σε αυτές τις ψευτοθεωρίες υπάρχουν ‘πίτες στον ουρανό’ (pie in the sky), τα λεφτά φυτρώνουν στα δέντρα, τα κοκόρια γεννάνε, τα αεροπλάνα μας ψεκάζουν, κτλ. Το πρόβλημα της Οικονομικής Έλλειψης (Economic Scarcity) είναι αποτέλεσμα της ‘κακής κοινωνικής οργάνωσης’ και του ‘υπερ-καταναλωτισμού’, και το πρόβλημα θα εξαφανιζόταν αν οι ‘κοινωνίες άλλαζαν’, και ‘μαθαίναμε’ να ζούμε χωρίς *i-Phone*. Αμήν! (όταν προσευχόμαστε πρέπει να λέμε και αμήν στο τέλος, αλλιώς η προσευχή δεν πιάνει).

Ο διάσημος Αμερικανός οικονομολόγος, καθηγητής του Πανεπιστημίου του Harvard, **Nicholas Gregory (Greg) Mankiw** (προφέρεται ‘Μανκιού’), στο δημοφιλές και ευρέως χρησιμοποιούμενο εισαγωγικό του βιβλίο για πρωτοετείς φοιτητές στα οικονομικά, *Principles of Microeconomics*, παραθέτει **Δέκα Αρχές των Οικονομικών**, τις οποίες παρουσιάζουμε εδώ επιγραμματικά.

Οι Δέκα Αρχές των Οικονομικών (Mankiw).

1. **Οι άνθρωποι έρχονται αντιμέτωποι με διλήμματα.**
   Να πάω στην δουλειά με το αυτοκίνητο, ή να χρησιμοποιήσω τα μέσα; Να αγοράσω σπίτι στο Κουκάκι, ή στα Βριλήσσια; Να εργαστώ, ή να σπουδάσω; Να διαβάσω λίγο ακόμα Διαφορικό Λογισμό, ή λίγη ακόμα Γραμμική Άλγεβρα;

2. **Το κόστος ενός πράγματος είναι αυτό που χάνεις για να το αποκτήσεις.**
   Το κόστος της μόρφωσης είναι το εισόδημα που θα μπορούσε κανείς να κερδίσει αν εργαζόταν αντί να σπουδάζει.

3. **Οι ορθολογικοί άνθρωποι σκέφτονται οριακά.**
   Μία αεροπορική εταιρεία θα προτιμούσε να πουλήσει ένα επιπλέον εισιτήριο ακόμα και κάτω του **μέσου κόστους** μεταφοράς ενός επιβάτη, όσο η τιμή του εισιτηρίου υπερβαίνει το **οριακό κόστος** ενός επιπλέον επιβάτη στο αεροπλάνο.

4. **Οι άνθρωποι ανταποκρίνονται στα κίνητρα.**
   Οι φόροι στα τσιγάρα οδηγούν σε μείωση του καπνίσματος.

5. **Το εμπόριο μπορεί να κάνει τους πάντες καλύτερα.**
   Τόσο τα άτομα όσο και οι χώρες συνολικά, μπορούν να εξειδικευτούν στην παραγωγή προϊόντων και υπηρεσιών στα οποία έχουν συγκριτικό πλεονέκτημα και να παράξουν περισσότερο, και με το εμπόριο να έχουν πρόσβαση σε όλα τα προϊόντα και τις υπηρεσίες, ακόμα και σε αυτά που δεν παράγουν οι ίδιοι. Όσο διαφορετικές οικονομικές μονάδες εξειδικεύονται στην παραγωγή διαφορετικών προϊόντων και υπηρεσιών, το εμπόριο μπορεί να βελτιώσει την ευημερία όλων.

6. **Οι Αγορές είναι συνήθως ένας καλός τρόπος οργάνωσης της οικονομικής δραστηριότητας.**
   Το Αόρατο Χέρι του Adam Smith, μέσω του Μηχανισμού των Τιμών (price mechanism) και του Ανταγωνισμού, οδηγεί στην βέλτιστη κατανομή των πόρων της οικονομίας για την ικανοποίηση του μέγιστου δυνατού αριθμού των αναγκών των ανθρώπων.

7. **Οι Κυβερνήσεις μπορούν μερικές φορές να βελτιώσουν τα οικονομικά αποτελέσματα.**
   Όταν οι Αγορές αποτυγχάνουν να κατανείμουν τους πόρους αποτελεσματικά (Μονοπώλια, Δημόσια Αγαθά κτλ.), η Κυβέρνηση μπορεί να παρέμβει για να αποκαταστήσει την αποτελεσματικότητα και την ισοτιμία στις Αγορές.

8. **Το επίπεδο ζωής εξαρτάται από την παραγωγή μιας χωράς.**
   Χώρες με μεγαλύτερη παραγωγικότητα, έχουν μεγαλύτερο κατά-κεφαλήν εισόδημα, και απολαμβάνουν καλύτερο επίπεδο ζωής.

9. **Οι τιμές αυξάνονται όταν η Κυβέρνηση τυπώνει πολύ χρήμα.**
   Αν η Κυβέρνηση τυπώνει χρήμα σε ρυθμό μεγαλύτερο από τον ρυθμό αύξησης του ΑΕΠ (υπερβάλλουσα προσφορά χρήματος, fiat money), τότε οι ονομαστικές τιμές των προϊόντων και των υπηρεσιών θα αυξάνονται, και θα έχουμε πληθωρισμό (Ποσοτική Θεωρία του Χρήματος, Quantitative Theory of Money).

10. **Η κοινωνία αντιμετωπίζει ένα βραχυχρόνιο δίλημμα ανάμεσα στον πληθωρισμό και την ανεργία.**
    Βραχυχρόνια, όταν οι τιμές αυξάνονται, οι παραγωγοί έχουν κίνητρο να παράξουν περισσότερο, οπότε προσλαμβάνουν περισσότερο προσωπικό, και η ανεργία μειώνεται. Βραχυχρόνια, λοιπόν, παρατηρείτε μια αντίστροφη σχέση μεταξύ Πληθωρισμού και Ανεργίας (καμπύλη Phillips). Μακροχρόνια, η σχέση αυτή δεν υπάρχει (η καμπύλη Phillips δεν ισχύει μακροχρόνια).

1

ΑΡΙΘΜΟΙ

Ο Θεός έφτιαξε τους ακέραιους, τα υπόλοιπα είναι δουλειά του ανθρώπου".
– Leopold Kronecker (1823 – 1891), Γερμανός μαθηματικός.

1.1 Το Σύνολο $\mathbb{N}$ των Φυσικών Αριθμών

Το σύνολο των **φυσικών αριθμών** $\{1, 2, 3, ...\}$ συμβολίζεται με $\mathbb{N}$. Το "N" έρχεται από την λέξη *natural*. **Το 0 δεν είναι φυσικός αριθμός.** Τα στοιχεία του $\mathbb{N}$ ονομάζονται και **θετικοί ακέραιοι**. Κάθε φυσικός αριθμός n έχει ένα διάδοχο (successor) αριθμό, τον $n+1$. Άρα ο διάδοχος του 2 είναι το 3, και ο 23 είναι ο διάδοχος του 22. Μάλλον θα συμφωνήσετε ότι οι παρακάτω ιδιότητες του $\mathbb{N}$ είναι προφανείς:

N1. Το 1 ανήκει στο $\mathbb{N}$.
N2. Αν ο n ανήκει στο $\mathbb{N}$, ο διάδοχός (successor) του $n+1$ ανήκει στο $\mathbb{N}$.
N3. Το 1 δεν διαδέχεται κανένα αριθμού στο $\mathbb{N}$.
N4. Αν οι n και m στο $\mathbb{N}$ έχουν τον ίδιο διάδοχο, τότε $n = m$.
N5. Ένα υποσύνολο του $\mathbb{N}$ που περιέχει το 1, και που περιέχει τον $n+1$ αν περιέχει τον n, πρέπει να ισούται με το $\mathbb{N}$.

Οι ιδιότητες N1 ως N5 είναι γνωστές ως **Αξιώματα του Peano** (Peano Axioms or Postulates). Μπορεί να δειχθεί ότι οι περισσότερες από τις γνωστές μας ιδιότητες του $\mathbb{N}$ μπορούν να αποδειχθούν ξεκινώντας από τα πέντε αυτά αξιώματα. Οι περισσότεροι την πρώτη φορά που βλέπουν τα αξιώματα αυτά τα θεωρούν ως μία υπερβολική σχολαστικότητα χωρίς ουσιαστικό νόημα, καθώς ακόμα και τα μικρά παιδιά ξέρουν τους φυσικούς αριθμούς, και σίγουρα δεν υπάρχει τίποτα καινούργιο που μπορεί να μάθουν για αυτούς. Αυτή η αντίδραση είναι όμως λανθασμένη. Τα Μαθηματικά είναι γεμάτα τέτοιες εκπλήξεις: κάποια πράγματα που αρχικά φαίνονται προφανή και απλά, είναι στην πραγματικότητα "βαθειά" και έχουν απρόβλεπτες συνέπειες με τεράστια σημασία. Εν προκειμένω, τα αξιώματα του Peano είναι, όπως θα δούμε, η βάση της μαθηματικής επαγωγής.

Ας εξετάσουμε προσεκτικά το αξίωμα N5 που είναι ίσως το λιγότερο προφανές από τα αξιώματα του Peano. **Το αξίωμα αυτό συνεπάγεται έναν άπειρο αριθμό υποθέσεων**: αν $1 \in S$ και $n \in S$, τότε $n+1 \in S$, δηλαδή το ότι $1 \in S$ συνεπάγεται ότι $2 \in S$, που συνεπάγεται ότι $3 \in S$, που συνεπάγεται ότι $4 \in S$ κ.ο.κ., και άρα $S = \mathbb{N}$.

Το αξίωμα N5 είναι πολύ σημαντικό γιατί αποτελεί την βάση της **μαθηματικής επαγωγής** (mathematical induction). Θεωρήστε την άπειρη σειρά προτάσεων $P_1, P_2, P_3, \ldots$ που μπορεί να είναι αληθείς ή ψευδείς. Η **αρχή της μαθηματικής επαγωγής** λέει ότι οι προτάσεις $P_1, P_2, P_3, \ldots$ είναι αληθείς αν

(I_1) Η P_1 είναι αληθής; και
(I_2) Η P_{n+1} είναι αληθής κάθε φορά που η P_n είναι αληθής.

Η (I_1) ονομάζεται **βάση της επαγωγής** (induction basis) και η (I_2) ονομάζεται **επαγωγικό βήμα** (induction step). Η υπόθεση στην (I_2) ότι "η πρόταση P_n είναι αληθής" ονομάζεται **επαγωγική υπόθεση**. Κάθε επαγωγική απόδειξη πρέπει να επιβεβαιώσει τις ιδιότητες (I_1) και (I_2).

Παράδειγμα 1. Αποδείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n,

$$1 + 2 + \cdots + n = \tfrac{1}{2}n(n+1).$$

Προτάσεις σαν και αυτή ανακαλύπτονται συνήθως εμπειρικά (by trial and error) δοκιμάζοντας διάφορους τύπους για να δούμε αν κάποιος "δουλεύει", και αφού "μαντέψουμε" τον σωστό τύπο, χρησιμοποιούμε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής για να τον αποδείξουμε. Η n-ιοστή πρόταση είναι

$$P_n : \text{“}1 + 2 + \cdots + n = \tfrac{1}{2}n(n+1).\text{”}$$

Η P_1 λέει λοιπόν λέει ότι $1 = \frac{1}{2} \cdot 1(1+1)$, που είναι αλήθεια. Έχουμε λοιπόν την βάση της επαγωγής. Για το επαγωγικό βήμα, ας υποθέσουμε ότι η P_n είναι αληθής, δηλαδή ότι

$$1 + 2 + \cdots + n = \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

είναι αλήθεια. Αφού επιθυμούμε να αποδείξουμε ότι η P_{n+1} είναι επίσης αληθής, προσθέτουμε $n+1$ και στις δύο πλευρές για να πάρουμε

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+n+(n+1) &= \tfrac{1}{2}n(n+1)+(n+1) \\ &= \tfrac{1}{2}[n(n+1)+2(n+1)] \\ &= \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2) \\ &= \tfrac{1}{2}(n+1)((n+1)+1). \end{aligned}$$

Άρα η πρόταση P_{n+1} είναι αληθής αν η P_n είναι αληθής. Η αρχή της μαθηματικής επαγωγής μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η πρόταση P_n είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$. ■

Λέγεται ότι ο δάσκαλος του μεγάλου Γερμανού μαθηματικού **Carl Friedrich Gauss** $(1777-1855)$ στο Δημοτικό, έθεσε ως άσκηση στην τάξη να βρουν το άθροισμα των αριθμών από το 1 ως το 100, στο οποίο ο Gauss απάντησε αμέσως ότι το άθροισμα είναι 5050. Ερωτηθείς πώς το βρήκε τόσο γρήγορα, απάντησε, "Μα φυσικά, $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} n = \frac{1}{2}(100)(101) = 5050$." Πιο απλά, $1+100=101$, $2+99=101$, $3+98=101$, και ούτω καθεξής μέχρι τα $48+53=101$, $49+52=101$, και τέλος $50+51=101$, οπότε έχουμε 50 φορές το 101, δηλαδή $\sum_{n=1}^{100} n = (50)(101) = 5050$.

Είναι σημαντικό να γίνει κατανοητό ότι η επαλήθευση των (I_1) και (I_2) παραπάνω δεν ήταν αρκετή: έπρεπε να επικαλεστούμε και την αρχή της μαθηματικής επαγωγής στο τέλος για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη. Η αρχή αυτή, που λαμβάνεται από το αξίωμα N5 του Peano, είναι **αξιωματικά αληθής**, και αντιστοιχεί στην άπειρη σειρά συνεπαγωγών

$$P_1 \text{ αληθής } \Rightarrow P_2 \text{ αληθής } \Rightarrow P_3 \text{ αληθής } \Rightarrow P_4 \text{ αληθής } \Rightarrow \cdots .$$

Παράδειγμα 2. Αποδείξτε ότι όλοι οι αριθμοί της μορφής $7^n - 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, είναι πολλαπλάσια του 5.

Η n-ιοστή πρόταση είναι

$$P_n : \text{“το } 7^n - 5^n \text{ είναι πολλάσιασιο του 5.”}$$

Η βάση της επαγωγής είναι προφανώς αληθής αφού $7^1 - 2^1 = 5$. Για το επαγωγικό βήμα, ας υποθέσουμε ότι η πρόταση P_n είναι αληθής. Για να επιβεβαιώσουμε την P_{n+1}, γράφουμε

$$\begin{aligned} 7^{n+1} - 2^{n+1} &= 7^{n+1} - 7\cdot 2^n + 7\cdot 2^n - 2^{n+1} \\ &= 7(7^n - 2^n) + 5\cdot 2^n, \end{aligned}$$

το οποίο είναι ξεκάθαρα πολλαπλάσιο του 5 αν το $7^n - 2^n$ είναι πολλαπλάσιο του 5. Τέλος, η αρχή της μαθηματικής επαγωγής μας δίνει το αποτέλεσμα. ■

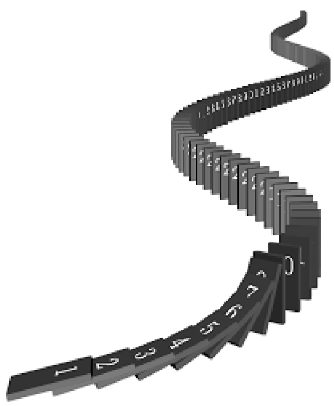
Η **επαγωγή / επαγωγικός συλλογισμός** (induction / inductive reasoning) είναι η εξαγωγή ενός γενικού συμπεράσματος από μεμονωμένες ή ειδικές περιπτώσεις:

$$\text{Ειδικές Περιπτώσεις} \Rightarrow \text{Γενικό Συμπέρασμα.}$$

Για παράδειγμα, επειδή κάτι ισχύει για τους πρώτους 10 ή 100 όρους μιας άπειρης ακολουθίας, συμπεραίνουμε ότι ισχύει για όλη την ακολουθία. Το αντίστροφο της επαγωγής είναι η **απαγωγή / απαγωγικός συλλογισμός** (deduction / deductive reasoning) όπου

$$\text{Γενικό Συμπέρασμα} \Rightarrow \text{Ειδικές Περιπτώσεις.}$$

Δηλαδή, αν κάτι ισχύει για όλη την άπειρη ακολουθία, τότε ισχύει και για τους πρώτους 10 ή 100 όρους της ακολουθίας.



Στην Λογική και τα Μαθηματικά **μόνο οι απαγωγικές αποδείξεις είναι αποδεκτές**. Η μόνη "εξαίρεση" είναι η "**μαθηματική επαγωγή**" στην οποία ναι μεν αποδεικνύουμε ειδικές περιπτώσεις, αλλά αποδεικνύουμε επίσης και πως η μία, θα λέγαμε, "φέρνει" και την επόμενη, δηλαδή συνδέουμε τις περιπτώσεις σε ένα "ντόμινο" στο οποίο αν πέσει ένα κομμάτι, τότε θα πέσουν όλα. Η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής λοιπόν μοιάζει με το παιχνίδι του ντόμινο. Αν ρίξουμε το πρώτο ντόμινο P_1, και αν το κάθε ντόμινο ρίχνει το επόμενο $P_n \to P_{n+1}$, τότε όλα τα ντόμινο θα πέσουν, ακόμα και αν ο αριθμός τους είναι άπειρος. Η απαγωγική απόδειξη δεν στηρίζεται σε κανένα επιπλέον αξίωμα και είναι αποδεκτή χωρίς καμία αναστολή. Η μαθηματική επαγωγή στηρίζεται στο αξίωμα N5 του Peano για τους φυσικούς αριθμούς, και είναι αποδεκτή αξιωματικά ως απαγωγική μέθοδος απόδειξης. Τέλος, **η απλή επαγωγή δεν είναι αποδεκτή μέθοδος απόδειξης.**

1.1 Άσκηση

1. Αποδείξτε ότι $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ για όλους τους φυσικούς αριθμούς n.

2. Αποδείξτε ότι $1^3+2^3+\cdots+n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$ για όλους τους φυσικούς αριθμούς n.

3. Αποδείξτε ότι $1+1/2+1/4+\cdots+1/2^n = 2-1/2^n$ για όλους τους φυσικούς αριθμούς n.

4. Αποδείξτε ότι ο αριθμός $(11)^n - 4^n$, όπου το n είναι φυσικός αριθμός, διαιρείται με το 7.

5. Αποδείξτε την **Ανισότητα του Bernoulli**: Για κάθε πραγματικό $x > -1$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

1.2 Το Δυωνυμικό Θεώρημα

Ένα πολύ σημαντικό θεώρημα των στοιχειωδών μαθηματικών είναι το λεγόμενο **Διωνυμικό Θεώρημα** (binomial theorem) για φυσικό εκθέτη. Ας το διατυπώσουμε και ας το αποδείξουμε χρησιμοποιώντας της αρχή της μαθηματικής επαγωγής.

Για να διατυπώσουμε το θεώρημα, γράφουμε

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

όπου $n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$ είναι το **παραγοντικό** (factorial) του n (π.χ. $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$). Ο αριθμός $\binom{n}{k}$, ο οποίος διαβάζεται ως "n ανά k" (n choose k), μας δίνει τον αριθμό των δυνατών **συνδυασμών** n αντικειμένων ανά k χωρίς να λαμβάνουμε υπόψιν την σειρά εμφάνισης. Π.χ. $\binom{4}{2} = 4!/(2!\,2!) = (3\cdot 4)/2 = 6$, δηλαδή 4 αντικείμενα μπορούν να σχηματίσουν 6 δυνατές δυάδες. Τα ζευγάρια που μπορούν να σχηματιστούν από τα 4 γράμματα A,B,C,D είναι τα εξής 6: (A,B), (A,C), (A,D), (B,C), (B,D) και (C,D).

Οι αριθμοί $\binom{n}{k}$ ονομάζονται **διωνυμικοί συντελεστές** και ικανοποιούν την **ταυτότητα του Pascal**

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}, \text{ για } k = 1, 2, ..., n,$$

η οποία αποδεικνύεται πολύ εύκολα με άμεση αντικατάσταση,

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!(n+1-k)}{k!(n+1-k)!} + \frac{n!k}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{n![(n+1-k)+k]}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

Η ταυτότητα του Pascal μας δίνει το **τρίγωνο του Pascal** :

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n=3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n=4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n=6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Στο τρίγωνο αυτό, κάθε αριθμός είναι το άθροισμα των δύο αριθμών στα αριστερά και τα δεξιά του, στην προηγούμενη σειρά.

1.2 Θεώρημα (Διωνυμικό Θεώρημα) Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n \\
&= a^n + n a^{n-1} b + \tfrac{1}{2} n(n-1) a^{n-2} b^2 + \cdots + n a b^{n-1} + b^n.
\end{aligned}
$$

Σημείωση: Με την κατάλληλη γενίκευση των δυωνυμικών συντελεστών $\binom{x}{k}$ για x στο $\mathbb{R}$ και όχι απλώς στο $\mathbb{N}$, το θεώρημα παραμένει αληθές ακόμα και αν ο εκθέτης n αντικατασταθεί με οποιοσδήποτε πραγματικό αριθμό x. Αυτό είναι το λεγόμενο **γενικευμένο δυωνυμικό θεώρημα** το οποίο θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε αργότερα.

Απόδειξη: Ο τύπος ισχύει προφανώς για $n = 0$ και $n = 1$, αφού, αντίστοιχα, $1 = 1$ και

$$
(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b.
$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο τύπος ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ (αυτή είναι η επαγωγική μας υπόθεση). Θέλουμε να αποδείξουμε ότι τότε ισχύει και για το $n + 1$. Θεωρούμε την πολυωνυμική συνάρτηση $f(a, b)$, και για $j, k \geq 0$ γράφουμε $[f(a, b)]_{j,k}$ για τον συντελεστή του $a^j b^k$ στο πολυώνυμο $f(a, b)$. Από την επαγωγική υπόθεση, το $(a+b)^n$ είναι πολυώνυμο στα a και b, με $[(a + b)^n]_{j,k} = \binom{n}{k}$ για $j + k = n$, και 0 αλλιώς. Η προφανής ταυτότητα

$$
(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = a(a+b)^n + b(a+b)^n
$$

σημαίνει ότι και το $(a + b)^{n+1}$ είναι επίσης πολυώνυμο στα a και b, και

$$
[(a+b)^{n+1}]_{j,k} = [(a+b)^n]_{j-1,k} + [(a+b)^n]_{j,k-1},
$$

αφού αν $j+k=n+1$, τότε $(j-1)+k=n$ και $j+(k-1)=n$. Η δεξιά πλευρά της παραπάνω ισότητας είναι
$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k},$$
από την ταυτότητα του Pascal. Αλλιώς, αν $j+k\neq n+1$, τότε $(j-1)+k\neq n$ και $j+(k-1)\neq n$, οπότε λαμβάνουμε $0+0=0$. Συμπεραίνουμε ότι
$$(a+b)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k,$$
που είναι η επαγωγική υπόθεση με το $n+1$ την θέση του n. Η αρχή της μαθηματικής επαγωγής μας δίνει το αποτέλεσμα. ■

Παράδειγμα 3. Από την σειρά $n=5$ στο Τρίγωνο του Pascal, έχουμε ότι
$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$
■

1.3 Πρώτοι Αριθμοί και το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής

Ανάμεσα στους φυσικούς αριθμούς $\mathbb{N}$ υπάρχουν κάποιοι αριθμοί που δεν έχουν διαιρέτες άλλους από τον εαυτό τους. Οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται **πρώτοι** και είναι αντικείμενο εντατικής μελέτης από την αρχαιότητα ως σήμερα.

1.3 Ορισμός Ένας αριθμός $p\in\mathbb{N}$, $p\neq 1$, ονομάζεται **πρώτος** αν οι μόνοι διαιρέτες του στο $\mathbb{N}$ είναι το 1 και ο εαυτός του. Το 1 δεν είναι πρώτος αριθμός. Το σύνολο των πρώτων αριθμών είναι
$$\mathbb{P}=\{n\in\mathbb{N}\mid n\geq 2 \text{ και το } n \text{ διαιρείται μόνο με το 1 και το } n\}.$$
Αριθμοί που δεν είναι πρώτοι ονομάζονται **συνθετικοί** (composite).

Οι πρώτοι δέκα πρώτοι αριθμοί είναι
$$\mathbb{P}=\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,...\}$$
Ένας εύκολος τρόπος για να βρούμε τους πρώτους αριθμούς σε ένα σύνολο φυσικών αριθμών είναι το **κόσκινο του Ερατοσθένη**. Θεωρήστε τους φυσικούς αριθμούς από το 2

	2	3	$\cancel{4}^{2}$	5	$\cancel{6}^{2}$	7	$\cancel{8}^{2}$	$\cancel{9}^{3}$	$\cancel{10}^{2}$
11	$\cancel{12}^{2}$	13	$\cancel{14}^{2}$	$\cancel{15}^{3}$	$\cancel{16}^{2}$	17	$\cancel{18}^{2}$	19	$\cancel{20}^{2}$
$\cancel{21}^{3}$	$\cancel{22}^{2}$	23	$\cancel{24}^{2}$	$\cancel{25}^{5}$	$\cancel{26}^{2}$	$\cancel{27}^{3}$	$\cancel{28}^{2}$	29	$\cancel{30}^{2}$
31	$\cancel{32}^{2}$	$\cancel{33}^{3}$	$\cancel{34}^{2}$	$\cancel{35}^{5}$	$\cancel{36}^{2}$	37	$\cancel{38}^{2}$	$\cancel{39}^{3}$	$\cancel{40}^{2}$
41	$\cancel{42}^{2}$	43	$\cancel{44}^{2}$	$\cancel{45}^{3}$	$\cancel{46}^{2}$	47	$\cancel{48}^{2}$	$\cancel{49}^{7}$	$\cancel{50}^{2}$
$\cancel{51}^{3}$	$\cancel{52}^{2}$	53	$\cancel{54}^{2}$	$\cancel{55}^{5}$	$\cancel{56}^{2}$	$\cancel{57}^{3}$	$\cancel{58}^{2}$	59	$\cancel{60}^{2}$
61	$\cancel{62}^{2}$	$\cancel{63}^{3}$	$\cancel{64}^{2}$	$\cancel{65}^{5}$	$\cancel{66}^{2}$	67	$\cancel{68}^{2}$	$\cancel{69}^{3}$	$\cancel{70}^{2}$
71	$\cancel{72}^{2}$	73	$\cancel{74}^{2}$	$\cancel{75}^{3}$	$\cancel{76}^{2}$	$\cancel{77}^{7}$	$\cancel{78}^{2}$	79	$\cancel{80}^{2}$
$\cancel{81}^{3}$	$\cancel{82}^{2}$	83	$\cancel{84}^{2}$	$\cancel{85}^{5}$	$\cancel{86}^{2}$	$\cancel{87}^{3}$	$\cancel{88}^{2}$	89	$\cancel{90}^{2}$
$\cancel{91}^{7}$	$\cancel{92}^{2}$	$\cancel{93}^{3}$	$\cancel{94}^{2}$	$\cancel{95}^{5}$	$\cancel{96}^{2}$	97	$\cancel{98}^{2}$	$\cancel{99}^{3}$	$\cancel{100}^{2}$

Πίνακας 1.1: Το κόσκινο του Ερατοσθένη για τους αριθμούς 1 ως 100.

ως το 100 (το 1 εξαιρείται εξ'ορισμού). Διαγράφουμε από την λίστα όλα τα πολλαπλάσια του 2. Μετά, διαγράφουμε όλα τα πολλαπλάσια του 3, μετά όλα τα πολλαπλάσια του 5 (το 4 έχει ήδη διαγραφεί), μετά όλα τα πολλαπλάσια του 7 (το 6 έχει ήδη διαγραφεί), μετά όλα τα πολλαπλάσια του 11 (οι αριθμοί $8, 9, 10$ έχουν ήδη διαγραφεί), και ου το καθεξής. Οι αριθμοί που απομένουν είναι οι πρώτοι αριθμοί στην λίστα.

Είναι σημαντικό να παρατήσουμε ότι: **Ο μόνος ζυγός πρώτος αριθμός είναι το 2.**

Μπορούμε να φτιάξουμε μια λίστα πεπερασμένου μήκους που να περιέχει όλους τους πρώτους αριθμούς; Η απάντηση είναι όχι, και το παρακάτω θεώρημα μας λέει ότι οι πρώτοι αριθμοί δεν τελειώνουν ποτέ.

1.4 Θεώρημα Οι πρώτοι αριθμοί $\mathbb{P}$ είναι άπειροι σε αριθμό.

Απόδειξη: (Ευκλείδης) Θα δείξουμε ότι για κάθε πεπερασμένη λίστα πρώτων αριθμών υπάρχει ένας πρώτος που δεν είναι στην λίστα. Θεωρούμε μια οποιαδήποτε πεπερασμένη λίστα πρώτων $p_1, p_2, ..., p_n$, γράφουμε $P = p_1 p_2 \cdots p_n$ για το γινόμενό τους, και θέτουμε $q = P + 1$. Ο αριθμός q ή είναι πρώτος ή δεν είναι: (i) Αν ο q είναι πρώτος, δείξαμε αυτό που θέλαμε αφού ο αριθμός αυτός δεν είναι στην λίστα. (ii) Αν ο q δεν είναι πρώτος, τότε κάποιος πρώτος διαιρέτης p διαιρεί τον q. Αν ο p είναι στην λίστα, τότε διαιρεί τον P (καθώς ο P είναι το γινόμενο όλων των πρώτων στην λίστα); αλλά αφού ο p διαιρεί και τον $P + 1 = q$, συνάγεται ότι διαιρεί και την διαφορά των δύο αυτών αριθμών, η οποία είναι $(P + 1) - P = 1$. Αλλά αυτό είναι άτοπο καθώς κανένας πρώτος αριθμός δεν διαιρεί το 1. Συμπεραίνουμε ότι ο p δεν είναι στην λίστα, και άρα πάλι βρήκαμε έναν πρώτο αριθμό που δεν είναι στην λίστα. Αφού καμία πεπερασμένη λίστα πρώτων δεν περιλαμβάνει όλους τους πρώτους, συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί. ■

Πέρα από έξυπνη και όμορφη, η παραπάνω απόδειξη του Ευκλείδη είναι και χρήσιμη καθώς μπορούμε να την χρησιμοποιήσουμε για να δημιουργήσουμε μια λίστα πρώτων αριθμών. Ξεκινώντας από μια λίστα που έχει μόνο το $\{2\}$, παίρνουμε $q = 2 + 1 = 3$, που είναι ήδη πρώτος και προσθέτουμε το 3 στην λίστα μας, ώστε τώρα έχουμε δύο πρώτους, τους $\{2, 3\}$. Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία, θέτοντας $q = 2 \cdot 3 + 1 = 7$, η λίστα μας γίνεται $\{2, 3, 7\}$, και θέτοντας $q = 2 \cdot 3 \cdot 7 + 1 = 43$, η λίστα μας γίνεται $\{2, 3, 7, 43\}$. Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία, παίρνουμε $q = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 + 1 = 1807$. Αυτή τη φορά το q δεν είναι πρώτος αριθμός, αλλά αναλύεται ως $q = 13 \cdot 139 = 1807$, οπότε προσθέτουμε το 13 στην λίστα μας, η οποία τώρα γίνεται $\{2, 3, 7, 43, 13\}$. Για μια ακόμα φορά, παίρνουμε $q = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 \cdot 13 + 1 = 23479$. Αυτό το q μπορεί να γραφτεί ως $q = 53 \cdot 443$, και η λίστα μας γίνεται $\{2, 3, 7, 43, 13, 53\}$. Θα σταματήσουμε εδώ, αλλά είναι ξεκάθαρο ότι αυτή η διαδικασία μπορεί να μας δώσει μια λίστα πρώτων αριθμών με οποιοδήποτε επιθυμητό μήκος.

Το επόμενο θεώρημα μας λέει ότι οι πρώτοι αριθμοί "παράγουν ή συνθέτουν" όλους τους άλλους αριθμούς και μάλιστα με έναν ουσιαστικά μοναδικό τρόπο. Αυτός είναι και ο λόγος που οι μη-πρώτοι αριθμοί ονομάζονται συνθετικοί (composite).

1.5 Θεώρημα **(Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής)** Κάθε φυσικός αριθμός $n \in \mathbb{N}$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως γινόμενο πρώτων αριθμών, δηλ.

$$n = p_1 \cdots p_k,$$

όπου $p_1, ..., p_k$ είναι πρώτοι αριθμοί. Η παράσταση αυτή είναι μοναδική εκτός από την σειρά που οι αριθμοί $p_1, ..., p_k$ εμφανίζονται στο γινόμενο. Οι αριθμοί $p_1, ..., p_k$ ονομάζονται **πρώτοι διαιρέτες** ή **πρώτοι παράγοντες** (prime factors) του n.

Απόδειξη: Ξεκινάμε αποδεικνύοντας τη πρόταση ότι κάθε φυσικός αριθμός n είναι είτε πρώτος είτε γινόμενο πρώτων. Αν $n = 1$, τότε το n είναι το κενό γινόμενο πρώτων. Μετά, ο φυσικός αριθμός $n = 2$ είναι πρώτος. Επαγωγικά, υποθέσουμε ότι η παραπάνω πρόταση είναι αληθής για όλους τους φυσικούς αριθμούς μικρότερους του n. Αν ο n είναι πρώτος τελειώσαμε. Αν ο n είναι συνθετικός, τότε $n = ab$ με $a, b < n$. Αλλά αφού οι a και b είναι μικρότεροι από n, η επαγωγική υπόθεση μας δίνει ότι οι αριθμοί a και b είναι γινόμενα πρώτων, οπότε και ο n είναι γινόμενο πρώτων, δηλαδή $n = p_1 p_2 \cdots p_k$.

Για να αποδείξουμε την μοναδικότητα της πρώτης παραγοντοποίησης (prime factorization) ενός φυσικού αριθμού εκτός από την σειρά εμφάνισης των πρώτων παραγόντων, θα χρειαστούμε το Λήμμα του Ευκλείδη.

Λήμμα του Ευκλείδη. *Αν ένας πρώτος αριθμός διαιρεί το γινόμενο ab δύο φυσικών αριθμών a και b, τότε πρέπει να διαιρεί τουλάχιστον έναν από τους a και b.*

Αφήνοντας την απόδειξη του Λήμματος για τις ασκήσεις, ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός n είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός για τον οποίο έχουμε δύο διαφορετικές παραγοντοποιήσεις, δηλ. $n = p_1p_2, ..., p_k = q_1q_2 \cdots q_m$. Αφού ο p_1 διαιρεί τον n, διαιρεί και το γινόμενο $q_1q_2 \cdots q_m$. Το Λήμμα του Ευκλείδη μας δίνει λοιπόν ότι $p_1 = q_i$ για κάποιο i, οπότε μπορούμε να απλοποιήσουμε το p_1 στην πρώτη παραγοντοποίηση με το q_i στη δεύτερη. Ας υποθέσουμε ότι $i = 1$, δηλαδή ότι απλοποιείται το p_1 με το q_1. Μετά την απλοποίηση, έχουμε λοιπόν ότι $p_2, ..., p_k = q_2, ..., q_m$, που είναι δύο διαφορετικές παραγοντοποιήσεις ενός αριθμού μικρότερου του n. Αλλά αυτό αντιβαίνει στην υπόθεσή μας ότι ο n είναι ο μικρότερος αριθμός με δύο διαφορετικές παραγοντοποιήσεις, και άρα η πρώτη παραγοντοποίηση ενός φυσικού αριθμού είναι μοναδική, εκτός από την σειρά που εμφανίζονται οι πρώτοι παράγοντες. ■

Παράδειγμα 4. Για παράδειγμα,

$$7368 = (2)(2)(2)(3)(307) \quad \text{και} \quad 1244562 = (2)(11)(109)(173).$$

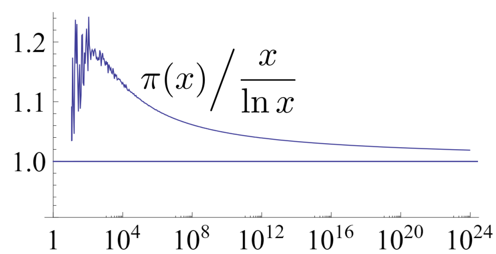
Οι αριθμοί $2, 3$ και 307 είναι πρώτοι διαιρέτες ή παράγοντες του 7368, και οι αριθμοί $2, 11, 109$ και 173 είναι πρώτοι διαιρέτες ή παράγοντες του 1244562. ■

Η παραγοντοποίηση είναι μια "δύσκολη" πράξη. Αν έχουμε δύο αριθμούς με n ψηφία μπορούμε να βρούμε το **άθροισμά** τους με $O(n)$ πράξεις, δηλαδή ο αριθμός των πράξεων αυξάνει γραμμικά με τον αριθμό των ψηφίων n. Η εύρεση του **γινομένου** δύο αριθμών με n ψηφία απαιτεί $O(n^2)$ πράξεις, δηλαδή ο αριθμός των πράξεων που απαιτούνται αυξάνει με το τετράγωνο των ψηφίων. Αν όμως έχουμε το γινόμενο και θέλουμε να βρούμε τους παράγοντές του, δηλ. θέλουμε να **παραγοντοποιήσουμε** έναν αριθμό με n ψηφία, τότε **δεν υπάρχει κανένας γνωστός αλγόριθμός που να παραγοντοποιεί αριθμούς σε πολυωνυμικό χρόνο**, δηλ. για κανένα γνωστό αλγόριθμο παραγοντοποίησης οι πράξεις που απαιτούνται δεν είναι τάξεως $O(n^d)$ για κάποιο $d \in \mathbb{N}$. Πράξεις που δεν έχουν πολυωνυμικούς αλγόριθμους ονομάζονται **εκθετικής πολυπλοκότητας** (exponential complextiy), και είναι "δύσκολες" γιατί απαιτούν πάρα πολύ χρόνο. Δεν είναι γνωστό αν μπορεί να υπάρχει ένας πολυωνυμικής πολυπλοκότητας αλγόριθμος για την παραγοντοποίηση αριθμών που δεν έχει βρεθεί ακόμη, ή δεν τον έχουμε βρει γιατί απλά δεν υπάρχει.

Η "δυσκολία" (εκθετική πολυπλοκότητα) της παραγοντοποίησης μεγάλων αριθμών είναι χρήσιμη στην κωδικοποίηση μηνυμάτων (encryption), και χρησιμοποιείται ευρύτατα για την διασφάλιση των ηλεκτρονικών επικοινωνιών και συναλλαγών στο διαδίκτυο. Η παραγοντοποίηση πολύ μεγάλων αριθμών στους πρώτους παράγοντές τους είναι στην πράξη αδύνατη, και άρα μηνύματα που χρειάζονται τους πρώτους παράγοντες κάποιου πολύ μεγάλου αριθμού για να αποκωδικοποιηθούν, δεν μπορούν να υποκλαπούν.

Οι πρώτοι αριθμοί έχουν άπειρο πλήθος, αλλά μια απλή ματιά σε μια λίστα πρώτων αριθμών μας δείχνει ότι γίνονται όλο και πιο σπάνιοι καθώς προχωράμε σε μεγαλύτερους αριθμούς. Αυτό είναι αναμενόμενο καθώς κάθε νέος πρώτος αριθμός εισάγει νέους συνθετικούς αριθμούς (όλα τα πολλαπλάσιά του) οι οποίοι δεν είναι πια υποψήφιοι για να είναι πρώτοι. Δηλαδή, κάθε νέος πρώτος αριθμός μας δίνει έναν ακόμα τρόπο που επακόλουθοι αριθμοί μπορεί να αποτύχουν να είναι πρώτοι. Μετά το 2, υπάρχει $1/2$ πιθανότητα ότι ένας αριθμός δεν θα διαιρείται με το 2. Μετά το 3 υπάρχει $2/3$ πιθανότητα ότι ένας αριθμός δεν θα διαιρείται με το 3, αφήνοντας $(1/2)(2/3) = 1/3$ ότι δεν διαιρείται ούτε με το 2 ούτε με το 3. Μετά το 5 υπάρχει $(1/2)(2/3)(4/5) = 4/15$ πιθανότητα ότι δεν διαιρείται ούτε με το 2, ούτε με το 3, ούτε με το 5, κοκ. Συμπεραίνουμε ότι η πιθανότητα νέων πρώτων αριθμών πρέπει συνεχώς να φθίνει. Με άλλα λόγια, ο αριθμός των πρώτων πρέπει να αυξάνει προς το άπειρο, αλλά με φθίνοντα ρυθμό.

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει τον ακριβή τρόπο που ο αριθμός των πρώτων αριθμών αυξάνει καθώς προχωράμε σε μεγάλους αριθμούς x: αυξάνει ως $x/\ln x$.



1.6 Θεώρημα (Prime Number Theorem) Αν $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, με $\pi(x) = \#\{p \text{ πρώτος } : p \leq x \in \mathbb{R}\}$, είναι ο αριθμός των πρώτων αριθμών μικρότερων ή ίσων με $x \in \mathbb{R}$, τότε

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1.$$

Λέμε ότι οι δύο συναρτήσεις $\pi(x)$ και $x/\ln x$ είναι ασυμπτωτικές η μία στην άλλη καθώς $x \to \infty$, και γράφουμε $\pi(x) \sim x/\ln x$, $x \to \infty$. Ισοδύναμα, αν p_n είναι ο n-οστός πρώτος αριθμός, τότε $p_n \sim n \ln n$ καθώς $n \to \infty$.

Το θεώρημα αυτό πρωτοδιατυπώθηκε ως εικασία από τον Gauss και αποδείχθηκε αργότερα ανεξάρτητα από τους **Hadamard** και **Vallee Poussin** το 1896. Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού απαιτεί προχωρημένες μεθόδους εξειδικευμένες για την Θεωρία Αριθμών, και δεν θα δοθεί εδώ.

Παράδειγμα 5. Για παράδειγμα, για $x = 10$, $\pi(10) = 4$, δηλαδή υπάρχουν 4 πρώτοι αριθμοί μικρότεροι από 10, ενώ $10/\ln 10 = 4.34$ οπότε η προσέγγιση είναι ότι οι πρώτοι αριθμοί μικρότεροι από 10 είναι περίπου 4. Ο 15ος πρώτος είναι $p_{15} = 47$, και η προσέγγιση είναι ότι ο 15ος πρώτος είναι περίπου $15 \ln 15 = 40.62$, δηλ. περίπου 41. ■

Παράδειγμα 6. Αν δύο γρανάζια σε μια μηχανή έχουν αριθμό δοντιών με μέγιστο κοινό πολλαπλάσιο μεγαλύτερο του 1, π.χ. 5 και 10 γρανάζια, τότε τα ίδια γρανάζια στις δύο τροχαλίες θα συναντιόνται σε κάθε περιστροφή. Έτσι αν κάποιο δόντι έχει κάποιο μικρό ελάττωμα από κατασκευής του, το ελάττωμα αυτό θα μεταφερθεί και στα δόντια που συναντά και που είναι πάντα τα ίδια, με αποτέλεσμα τα δόντια στα γρανάζια να φθείρονται με διαφορετικούς ρυθμούς. Αν όμως τα γρανάζια έχουν αριθμό δοντιών που είναι πρώτοι μεταξύ τους, δηλαδή αν το μέγιστο κοινό πολλαπλάσιο είναι το 1 (π.χ. οι αριθμοί 6 και 17 είναι πρώτοι μεταξύ τους), τότε δύο δόντια θα συναντιόνται μόνο αφού έχουν συναντήσει προηγουμένως όλα τα άλλα δόντια, οπότε τα γρανάζια θα φθείρονται ομοιόμορφα.

Η φωτογραφία δείχνει δύο γρανάζια μια αγροτικής μηχανής με 13 και 21 δόντια αντίστοιχα. Οι αριθμοί 13 και 21 είναι πρώτοι μεταξύ τους, δηλαδή ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους είναι το 1. Η θέση των δοντιών στα γρανάζια στην φωτογραφία θα επανέλθει μόνο ύστερα από 13 πλήρεις περιστροφές του μικρού γραναζιού, κατά τις οποίες τα δόντια του μικρού γραναζιού θα συναντιόνται με διαφορετικά δόντια του μεγάλου κάθε φορά. Παλιά, οι καινούργιες μηχανές (π.χ. στα αυτοκίνητα) χρειάζονταν "ροντάρισμα", δηλαδή μια περίοδο που να λειτουργούν σε χαμηλές στροφές. Ο λόγος ήταν ότι μικρά ελαττώματα στα δόντια και τα γρανάζια έπρεπε να ομοιομορφοποιηθούν με την τριβή μεταξύ τους. Σήμερα, που τα γρανάζια στις μηχανές των αυτοκινήτων φτιάχνονται πολύ καλύτερα και ουσιαστικά δεν έχουν ελαττώματα, το ροντάρισμα της μηχανής ενός καινούργιου αυτοκινήτου δεν είναι απαραίτητο. (Αν δεν έχετε ακούσει ποτέ για το 'ροντάρισμα' μιας μηχανής, ρωτήστε κάποιον πάνω από πενήντα ετών να σας πει τι είναι.)

■

1.4 Το Σύνολο $\mathbb{Z}$ των Ακέραιων Αριθμών

Αναλογιζόμενοι ξανά την φράση του **Kronecker** ότι "*ο Θεός έφτιαξε τους ακέραιους, τα υπόλοιπα είναι δουλειά του ανθρώπου*", γεννάται το ερώτημα, πώς οι άνθρωποι έφτιαξαν τους υπόλοιπους αριθμούς; Μα φυσικά κάνοντας **πράξεις**.

Ξεκινώντας από τους φυσικούς αριθμούς (θετικούς ακέραιους), η πράξη της **αφαίρεσης** μας οδηγεί στο σύνολο των **ακέραιων αριθμών** $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$. Το "Z" προέρχεται από την γερμανική λέξη *zahlen* που σημαίνει αριθμός.

1.7 Ορισμός Το σύνολο των ακεραίων αριθμών $\mathbb{Z}$ δίνεται από την ένωση

$$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N},$$

δηλ.

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -5, -4, -3, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \cdots\}.$$

Οι αρνητικοί αριθμοί δημιουργούν προβλήματα του τύπου: ξέρω τι είναι τα "2 πρόβατα", αλλά τι είναι τα "-2 πρόβατα"; Η απάντηση είναι απλή: όταν αγοράζω 2 πρόβατα προσθέτω 2 πρόβατα στο κοπάδι μου, και όταν πουλάω 2 πρόβατα, αφαιρώ 2 πρόβατα από το κοπάδι μου. Άρα το $+2$ πρόβατα σημαίνει *αγορά* 2 *προβάτων* , και το -2 πρόβατα σημαίνει *πώληση* 2 *προβάτων*. Κατά τον ίδιο τρόπο, σε ένα λογιστικό βιβλίο, το +5000€ σημαίνει *κέρδος* 5000€, τότε το -5000€ σημαίνει *ζημία* 5000€.

Γενικά, για κάθε $a \in \mathbb{Z}$ υπάρχει ο **προσθετικός αντίστροφός** του $-a \in \mathbb{Z}$, τέτοιος ώστε $a + (-a) = 0$. Λέμε ότι το σύνολο $\mathbb{Z}$ είναι **κλειστό ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης**. Το σύνολο $\mathbb{Z}$ είναι **κλειστό και ως προς την πράξη του πολλαπλασιασμού**, καθώς για κάθε $a, b \in \mathbb{Z}$, το γινόμενο ab είναι επίσης στο $\mathbb{Z}$. Το σύνολο $\mathbb{N}$ είναι κλειστό μόνο ως προς την πράξη της πρόσθεσης.

Ο ακέραιος αριθμός 0

Ο "αριθμός" μηδέν (0) που βρίσκεται ανάμεσα στους θετικούς και αρνητικούς ακέραιους χρειάζεται ειδική προσοχή. Καταρχάς, όπως ήδη τονίσαμε, **το 0 δεν είναι φυσικός αριθμός**, αφού στην φύση δεν βρίσκουμε 0 μήλα ή 0 πρόβατα. Το 0 είναι ένας ακόμα ακέραιος αριθμός όταν συμμετέχει στις πράξεις της πρόσθεσης ($a + 0 = a$), της αφαίρεσης ($a - 0 = a$) και του πολλαπλασιασμού ($0a = 0$), αλλά δημιουργεί "προβλήματα" στην πράξη της διαίρεσης.

Οταν κάποιος διαιρεί με το μηδέν

Για κάθε ακέραιο $a \neq 0$, έχουμε ότι $0/a = 0$, αλλά
το κλάσμα $a/0$ **δεν ορίζεται**. Αυτό σημαίνει ότι

Η διαίρεση με το 0 απαγορεύεται **επί ποινή μαθηματικού θανάτου.**

Το κλάσμα $a/0$ δεν έχει καμιά σημασία, πέρα από τον μηδενισμό των διαγωνισμάτων των φοιτητών που το χρησιμοποιούν.[1] Ο λόγος που οι μαθηματικοί είναι τόσο απόλυτοι στον αφορισμό της διαίρεσης με το μηδέν είναι ότι οδηγεί σε **λογικές αντιφάσεις** ή **αντινομίες**.

Παράδειγμα 7.
Ψευδοθεώρημα: $1 = 2$.
Ψευδοαπόδειξη: Θεωρούμε $a = b$. (1) Πολλαπλασιάζουμε και τις δύο πλευρές με b για να πάρουμε $ab = b^2$. (2) Αφαιρούμε a^2 και από τις δύο πλευρές για να πάρουμε $ab - a^2 = b^2 - a^2$ ή $a(b-a) = (b+a)(b-a)$. (3) Τέλος, διαιρούμε με $(b-a)$ και τις δύο πλευρές για να πάρουμε $a = b + a$. Θέτοντας $a = b = 1$, παίρνουμε $1 = 2$.

Ο λόγος για το παράλογο συμπέρασμα είναι ότι στο βήμα (3) διαιρέσαμε με $(b-a)$, το οποίο είναι ίσο με 0 αφού τα a και b είναι ίσα εξ' ορισμού. ∎

Σκεφτείτε την εξής αληθή πρόταση: **Αν επιτρέψουμε την διαίρεση με το μηδέν μπορούμε να "αποδείξουμε" οτιδήποτε, όσο παράλογο και αν είναι αυτό.** Η αρχή αυτή, γνωστή ως η **αρχή της έκρηξης** (principle of explosition), που αντιστοιχεί στον λογικό κανόνα **ex falso quodlibet** ("από ένα ψεύδος, τα πάντα έπονται", "from a falsehood, anything follows")[2], ήταν γνωστή από την αρχαιότητα αλλά αποδείχτηκε μαθηματικά για πρώτη φορά τον 12ο αιώνα από τον Γάλλο φιλόσοφο **William de Soissons**. Από το ψευδές $1 = 2$, παίρνουμε ότι όλοι οι αριθμοί είναι ίσοι μεταξύ τους, από το οποίο λαμβάνουμε ότι οι συναρτήσεις $\sin x$ και $\cos x$ είναι ίσες, και ούτω καθεξής, για ότι άλλο παράλογο μπορούμε να σκεφτούμε.

Για τον βαθύ αυτό λόγο, οι Αρχαίοι Έλληνες δεν έκαναν δεκτό το 0 ως αριθμό, και έτσι το 0 "εισήχθηκε" τελικά στη Ευρώπη από την Ινδία τον μεσαίωνα μέσω των Αράβων Μαθηματικών. Λέγεται λανθασμένα ότι οι Ινδοί Μαθηματικοί ανακάλυψαν το μηδέν, το οποίο δεν ήξεραν οι Έλληνες. Η αλήθεια είναι ότι στη μαθηματική αφέλειά τους, οι Ινδοί Μαθηματικοί, οι οποίοι αγνοούσαν πλήρως τις παραπάνω αντινομίες, τόλμησαν να δεχθούν το μηδέν ως αριθμό, κάτι που τελικά είναι γόνιμο και δεν οδηγεί σε λογικά σφάλματα,

[1] Σε ένα διαγώνισμα μαθηματικών (1) η διαίρεση με το μηδέν, και (2) η εύρεση πιθανότητας μικρότερης του μηδενός ή μεγαλύτερης της μονάδας, σημαίνουν άμεσο μηδενισμό. Είναι τα δύο "θανάσιμα αμαρτήματα" για τα οποία ο φοιτητής πηγαίνει απευθείας στην "Κόλαση του Σεπτεμβρίου".

[2] Ο λανθασμένος αυτός τρόπος σκέψης χρησιμοποιείται συχνά από τους πολιτικούς για να εξαπατήσουν το ακροατήριό τους.

αν απαγορευτεί η διαίρεση με αυτό. Όπως λέγεται, *fools rush in where angels fear to tread*[3] (ρήση του Alexander Pope), αλλά καμιά φορά αυτό μπορεί να βγει και σε καλό.

Τέλος, αναφορικά με το 0 τίθεται το ερώτημα αν το 0 είναι ζυγός ή περιττός αριθμός, ή μήπως δεν είναι τίποτε από τα δύο. Η απάντηση είναι ότι

το 0 είναι ζυγός αριθμός,

ή για να είμαστε λιγότερο απόλυτοι, **το 0 δεν είναι περιττός αριθμός**. Η εξήγηση είναι ότι το 0 "συμπεριφέρεται" όπως οι ζυγοί αριθμοί, δηλαδή διαιρούμενο με το 2 μας δίνει ακέραιο αριθμό (τον εαυτό του), ενώ οι περιττοί αριθμοί μας δίνουν κλάσματα. Επίσης, όπως όλοι οι ζυγοί, το 0 βρίσκεται κατά σειρά ανάμεσα σε δύο περιττούς, το -1 και το 1.

Για αυτούς που σκέφτονται ότι η παρατήρηση αυτή δεν είναι και τόσο ενδιαφέρουσα, πρέπει να πούμε ότι **είναι πράγματι πολύ σημαντική**, καθώς στην απόδειξη κάποιων θεωρημάτων το μόνο που μπορούμε να αποδείξουμε είναι την ύπαρξη ενός **περιττού αριθμού αντικειμένων** σε κάποιο σύνολο που μας ενδιαφέρει. Αν το 0 ήταν περιττός αριθμός τότε το σύνολο αυτό θα μπορούσε να είναι κενό(!), αλλά αφού το 0 δεν είναι περιττός αριθμός, το σύνολο δεν είναι κενό[4]. Ένα τέτοιο θεώρημα είναι το περίφημο **Λήμμα του Sperner**, το οποίο χρησιμοποιείται, μεταξύ πολλών άλλων εφαρμογών του, σε μία από τις αποδείξεις του **Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Brouwer** (Brouwer Fixed Point Theorem), το οποίο με την σειρά του μας δίνει την ύπαρξη **ισορροπίας Nash** στην **Θεωρία Παιγνίων** (Game Theory), και την ύπαρξη **γενικής ισορροπίας Arrow-Debreu** στην Μικροοικονομική.[5]

1.5 Το Σύνολο $\mathbb{Q}$ των Κλασματικών Αριθμών

Το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$ είναι κλειστό ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης και του πολλαπλασιασμού, αλλά δεν είναι όμως κατάλληλο για να κάνουμε

---

[3] *Μετάφραση:* Οι ανόητοι ορμούν εκεί όπου οι άγγελοι φοβούνται να ακροπατήσουν.

[4] **Τα πάντα για το κενό σύνολο είναι αλήθεια και ψέματα ταυτόχρονα**, οπότε θεωρήματα που περιγράφουν το κενό σύνολο δεν είναι και πολύ ενδιαφέροντα! Αποδεικνύοντας ότι το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου είναι κάποιος περιττός αριθμός, είμαστε βέβαιοι ότι μιλάμε για αντικείμενα που πράγματι υπάρχουν, και όχι για ανύπαρκτα "κόκκινα ανθρωπάκια στον Άρη."

[5] Βλέπε, Border K.C. *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory*, 1985, Cambridge University Press, σελ. 23-25. Το **Λήμμα του Sperner** είναι στην σελ. 23, και το ότι το 0 δεν είναι περιττός αριθμός χρησιμοποιείται στην σελ. 25.

διαίρεση. Γι’ αυτό εισαγάγουμε το σύνολο $\mathbb{Q}$ των **κλασματικών** αριθμών, δηλ. των αριθμών της μορφής m/n, όπου $m, n \in \mathbb{Z}$ και $n \neq 0$. Το “Q” προέρχεται από την λέξη *quotient*, δηλαδή κλάσμα ή λόγος. Το σύνολο $\mathbb{Q}$ είναι ένα πολύ ικανοποιητικό αλγεβρικό σύνολο για να κάνουμε πράξεις, καθώς είναι **κλειστό και ως προς τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις** (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση), με την έννοια ότι και οι τέσσερις πράξεις με κλασματικούς αριθμούς μας δίνουν ως αποτέλεσμα έναν αριθμό που είναι επίσης κλασματικός. Σημειώνουμε ότι το σύνολο $\mathbb{Q}$ περιλαμβάνει όλους τους αριθμούς με τερματιζόμενο ή επαναλαμβανόμενο δεκαδικό ανάπτυγμα, δηλ. αριθμούς όπως $1.683 = 1683/1000$ και $1/3 = 0.\bar{3}$. Θα επιστρέψουμε σε αυτό τον χαρακτηρισμό των κλασματικών αριθμών όταν συζητήσουμε την δεκαδική ανάπτυξη των πραγματικών αριθμών.

1.8 Ορισμός (Σώμα) Ένα μη κενό σύνολο $\mathbb{F}$ εφοδιασμένο με δύο δυαδικές πράξεις

(a) πρόσθεση $+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, με $+(x, y) = x + y$, και

(b) πολλαπλασιασμός $\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, με $\cdot(x, y) = x \cdot y$

ονομάζεται **σώμα** (field, γαλλ. corps) και συμβολίζεται ως $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ αν για κάθε $x, y, z \in \mathbb{F}$:

F1. (αντιμεταθετικότητα πρόσθεσης) $x + y = y + x \in \mathbb{F}$.

F2. (προσεταιριστικότητα πρόσθεσης) $x + (y + z) = (x + y) + z \in \mathbb{F}$.

F3. (ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου πρόσθεσης) υπάρχει μοναδικό στοιχείο $0 \in \mathbb{F}$ τέτοιο ώστε $x + 0 = x$.

F4. (ύπαρξη αντίστροφου στοιχείου πρόσθεσης) υπάρχει μοναδικό $-x \in \mathbb{F}$ τέτοιο ώστε $x + (-x) = 0$.

F5. (αντιμεταθετικότητα πολλαπλασιασμού) $x \cdot y = y \cdot x \in \mathbb{F}$.

F6. (προσεταιριστικότητα πολλαπλασιασμού) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \in \mathbb{F}$.

F7. (ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου πολλαπλασιασμού) υπάρχει μοναδικό στοιχείο $1 \in \mathbb{F}$ τέτοιο ώστε $x \cdot 1 = x$.

F8. (ύπαρξη αντίστροφου στοιχείου πολλαπλασιασμού) $x \neq 0$, υπάρχει μοναδικό $x^{-1} \in \mathbb{F}$ τέτοιο ώστε $x \cdot x^{-1} = 1$.

F9. (επιμεριστικότητα πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) = x \cdot y + x \cdot z \in \mathbb{F}$.

F10. (διαφορετικά ουδέτερα στοιχεία, 0-1 Law) Τα ουδέτερα στοιχεία της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι διαφορτεικά, δηλ. $0 \neq 1$.

Οι ιδιότητες **F1 – F10** ονομάζονται **αξιώματα σώματος** (field axioms).

Αναφορικά με τον ορισμό του αλγεβρικού σώματος παραπάνω, κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις: **1.** Ο αγγλικός όρος ‘field’ παραπέμπει στην ελληνική απόδοση ‘πεδίο’, αλλά η λέξη ‘πεδίο’ αποδίδει τον αγγλικό όρο ‘domain’, γι αυτό αντ’ αυτού μεταφράζουμε τον γαλλικό όρο ‘corps’, σώμα. **2.** Υποθέτοντας ότι οι πράξεις $+$ και $\cdot$ είναι συναρτήσεις από το $\mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, υποθέτουμε αυτόματα και ότι το $\mathbb{F}$ είναι κλειστό ως προς αυτές τις πράξεις, όμως για να μην υπάρξει σύγχυση, προσθέτουμε παραπάνω και το “$\in \mathbb{F}$” στο τέλος κάθε πράξης, αν και δεν χρειάζεται. **3.** Από την F9 βλέπουμε ότι **πρώτα**

πολλαπλασιάζουμε και μετά προσθέτουμε. **4.** Η F10 αποκλείει εκφυλισμένα συστήματα (trivial/degenerate systems). **5.** Τέλος, το αξίωμα F1 μπορεί να αποδειχθεί από τα άλλα αξιώματα[6], αλλά ακολουθούμε το σύνηθες και το συμπεριλαμβάνουμε.

1.9 Ορισμός Ένα σώμα $\mathbb{F}$ ονομάζεται ολικά διατεταγμένο (totally ordered) αν για κάθε $x, y, z \in \mathbb{F}$,

O1. (τριχοτομία, trichotomy) ακριβώς μία από τις τρεις σχέσεις ισχύει: $x = y$, $x > y$, ή $x < y$.

O2. (transitivity) αν $x < y$ και $y < z$, τότε $x < z$.

O3. αν $x < y$, τότε $x + z < y + z$.

O4. αν $x < y$ και $0 < z$, τότε $xz < yz$.

Παράδειγμα 8.

- Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ (με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό αριθμών που ξέρουμε) δεν είναι σώμα, καθώς το 0 δεν είναι φυσικός αριθμός (οπότε οι φυσικοί δεν ικανοποιούν την F3), και δεν έχουν ούτε προσθετικό ούτε πολλαπλασιαστικό αντίστροφο (οπότε δεν ικανοποιούν ούτε την F4, ούτε την F8).

- Ούτε το σύνολο των ακεραίων αριθμών $\mathbb{Z}$ με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό αριθμών είναι σώμα, καθώς οι ακέραιοι δεν έχουν πολλαπλασιαστικό αντίστροφο. Π.χ. $a = 2$ είναι ακέραιος αλλά δεν υπάρχει ακέραιος a^{-1} τέτοιος ώστε $2 \cdot a^{-1} = 1$ (το $\frac{1}{2}$ δεν είναι ακέραιος).

- Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι

■ Αναφορικά με τον ορισμό του αλγεβρικού σώματος παραπάνω, κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις:

Αντίθετα με τους φυσικούς και τους ακέραιους, οι κλασματικοί αριθμοί είναι σώμα.

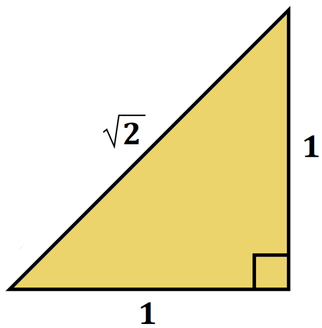
1.10 Θεώρημα Το σύνολο των κλασματικών αριθμών $\mathbb{Q}$ με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό αριθμών, δηλ. το $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, είναι ένα ολικά διατεταγμένο σώμα.

---

[6] Dickson L.E., Definition of a Group and a Field by Independent Postulates, *Transactions of the American Mathematical Society*, 6, 198-204, 1905.

Απόδειξη: Η επιβεβαίωση ότι το $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ικανοποιεί τις F-F10 και τις O1-O4 είναι μακρά αλλά πολύ απλή, και ως εκ τούτου παραλείπεται. ■

Αν και ικανοποιητικό για τις απλές αριθμητικές πράξεις, το $\mathbb{Q}$ δεν είναι κατάλληλο για την **πράξη της εξαγωγής ρίζας** (root extraction) θετικού κλασματικού αριθμού.[7] Η πράξη αυτή είναι πολύ σημαντική καθώς από το Πυθαγόρειο Θεώρημα ξέρουμε ότι η υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου με πλευρές μοναδιαίου μήκους έχει μήκος $\sqrt{2}$. Ο αριθμός $\sqrt{2}$ ορίζεται ως εκείνος ο αριθμός που όταν τον τετραγωνίσουμε, τον πολλαπλασιάσουμε δηλαδή με τον εαυτό του, μας δίνει 2.



Η γεωμετρική εικόνα ενός ορθογωνίου τριγώνου με μοναδιαίες πλευρές μας πείθει ότι ο αριθμός που ονομάσαμε $\sqrt{2}$ υπάρχει, όμως όταν τον ψάξουμε ανάμεσα στους κλασματικούς αριθμούς δεν μπορούμε να τον βρούμε!

1.11 Θεώρημα Δεν υπάρχει κλασματικός αριθμός ίσος με $\sqrt{2}$, δηλ. $\nexists q \in \mathbb{Q} : q^2 = 2$.

Απόδειξη: (Ευκλείδης) Ας υποθέσουμε τουναντίον ότι $\sqrt{2} = m/n$, για κάποιους ακέραιους m και $n \neq 0$. Υποθέτουμε ότι οι m και n δεν έχουν κοινούς διαιρέτες, δηλ. ότι το κλάσμα m/n είναι γραμμένο στην ανάγωγη μορφή του (in lowest terms)(οι αριθμοί m και n είναι σχετικά πρώτοι). Τότε $2 = m^2/n^2$, ή $m^2 = 2n^2$. Άρα ο m^2 είναι ζυγός, και άρα και ο m είναι ζυγός, ας πούμε $m = 2k$ για κάποιον ακέραιο k. Οπότε $2 = ((2k)^2)/n^2$, αλλά τότε $2n^2 = 4k^2$, ή $n^2 = 2k^2$. Άρα ο n^2 είναι ζυγός, κάτι που σημαίνει ότι και ο n είναι επίσης ζυγός. Αλλά το συμπέρασμα ότι τόσο ο m όσο και n είναι ζυγοί αντιβαίνει στην υπόθεσή μας ότι το κλάσμα m/n είναι ανάγωγο (άτοπο / contradiction), και συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν είναι κλασματικός. ■

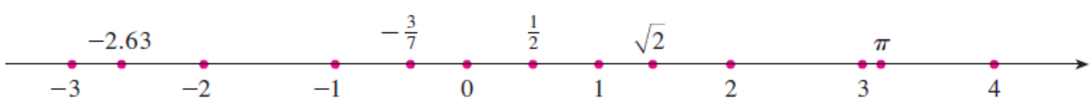
Η παραπάνω απόδειξη είναι ακριβώς αυτή που έδωσε ο **Ευκλείδης** πριν από δυόμισι

[7] Η αλγεβρική πράξη της εξαγωγής ρίζας ενός οποιοδήποτε πραγματικού αριθμού, θετικού ή αρνητικού, θα μας οδηγήσει αργότερα και στους μιγαδικούς αριθμούς.

χιλιάδες χρόνια(!) στα *Στοιχεία* του, και είναι το ίδιο φρέσκια και μοντέρνα σαν να γράφτηκε από έναν σύγχρονο μαθηματικό. Ο Γερμανός φιλόσοφος **Arthur Schopenhauer** (1788-1860) εξέφρασε όμως την αποστροφή του γι' αυτήν, καθώς την χαρακτήρισε "μια απόδειξη ποντικοπαγίδα, μια απόδειξη που περπατά σε ξυλοπόδαρα, και ούτε καν, μια μοχθηρή, ύπουλη απόδειξη"[8]. Η απόδειξη βασίζεται στην συνεπαγωγή ότι αν δεχτούμε ότι το $\sqrt{2}$ είναι κλασματικός αριθμός τότε *δεν μπορούμε να γράψουμε τους κλασματικούς αριθμούς σε ανάγωγη μορφή*! Δηλαδή, αν δεχτούμε ότι το $\sqrt{2}$ είναι κλασματικός αριθμός, τότε **μία γνωστά αληθής πρόταση διαψεύδεται**. Αρκεί να δείξουμε ότι η υπόθεση της αλήθειας μιας πρότασης μας οδηγεί λογικά στην διάψευση μιας γνωστά αληθούς προτάσεως, οποιοδήποτε και αν είναι αυτή, για να φτάσουμε σε άτοπο (contradiction). Οι αποδείξεις με "απαγωγή σε άτοπο" (proof by contradiction) είναι πράγματι ύπουλες όπως τις χαρακτήρισε ο Schopenhauer, αλλά είναι και πολύ αποτελεσματικές![9]

1.6 Τομές Dedekind και το σύνολο $\mathbb{R}$ των Πραγματικών Αριθμών

Επιμένοντας στην Γεωμετρία ως ορθό οδηγό για την μαθηματική αναπαράσταση της φυσικής πραγματικότητας γύρω μας, οδηγούμαστε να σκεφτούμε τους αριθμούς ως *σημεία* μιας ευθείας γραμμής που **εκτείνεται χωρίς όριο** τόσο προς τα αριστερά (μείον άπειρο, $-\infty$) όσο και προς τα δεξιά (συν άπειρο, $+\infty$), και η οποία είναι **απείρως διαιρέσιμη** και **δεν έχει κενά**. Αυτή την γραμμή την ονομάζουμε **πραγματική γραμμή** (real line), και την συμβολίζουμε με $\mathbb{R}$.



Η πραγματική γραμμή, δηλαδή το **σύνολο των πραγματικών αριθμών** $\mathbb{R}$, είναι ένα **εκπληκτικά πολύπλοκο αντικείμενο** και η μελέτη του, που ξεκίνησε στην Αρχαία Ελλάδα και συνεχίζεται ακόμα και σήμερα (!), βρίσκεται στην βάση των Μαθηματικών. **Κανείς θα μπορούσε να πει ότι τα Μαθηματικά γίνονται επιστήμη με την εισαγωγή των πραγματικών αριθμών (και με την αντίστιξη μεταξύ κλασματικών και πραγματικών αριθμών), καθώς σχεδόν κανένα ενδιαφέρον θεώρημα, ακόμα και εκείνα που αφορούν φυσικούς αριθμούς, δεν μπορεί να αποδειχθεί χωρίς την χρήση των πραγματικών**

[8] "A mouse-trap proof, a proof walking on stilts, nay, a mean, underhand proof".

[9] Το ζήτημα του κατά πόσο οι αποδείξεις με αναγωγή σε άτοπο θα πρέπει να γίνονται δεκτές στα μαθηματικά έχει τεθεί από πολλούς επιστήμονες κατά καιρούς, αλλά ο κυρίως υποστηρικτής της θέσης ότι <u>δεν</u> θα έπρεπε, ήταν ο περίφημος Ολλανδός μαθηματικός **L.E.J. Brouwer** (1881-1966) ο οποίος ηγήθηκε της Σχολής του *Intuitionism*. Σε κάθε περίπτωση, η συντριπτική πλειοψηφία (ακριβώς το 99.99%) των επιστημόνων σήμερα θεωρεί το θέμα λυμένο, *αποδεχόμενοι πλήρως τις αποδείξεις αυτές*.

αριθμών! Από τους αρχαίους πολιτισμούς που αναπτύχθηκαν σχετικά ανεξάρτητα μεταξύ τους (Ελληνικός, Ινδικός, Κινεζικός, Ιαπωνικός, Μάγια/Ινκα, κ.τ.λ.), **μόνο οι Έλληνες ανακάλυψαν την διαφορά μεταξύ κλασματικών και πραγματικών αριθμών**, και ως εκ τούτου, **μόνο οι Έλληνες είχαν αληθινά μαθηματικά.**[10] Οι άλλοι πολιτισμοί ήταν απλά "λογιστές" που χρησιμοποιούσαν τους αριθμούς για να κάνουν λογαριασμούς χωρίς να αντιλαμβάνονται τις βαθύτερες ιδιότητές τους. Η μελέτη του $\mathbb{R}$ είναι η απαρχή που κάνει δυνατή την δημιουργία **όλων των σύγχρονων τεχνολογιών**, και οι βασικές ιδιότητές τους πρέπει να είναι γνωστές σε κάθε σύγχρονο άνθρωπο.

[10] Από τον Μεσαίωνα ως και τις αρχές του 20ου αι., πολλοί μελετητές των αρχαίων Ελλήνων συγγραφέων αναρωτιούνταν για την έκταση της επιρροής του πρότερου Αιγυπτιακού Πολιτισμού στον Ελληνικό, και πολλοί υπέθεταν ότι ίσως το χρέος προς τους Αιγυπτίους να ήταν μεγάλο. Καθώς τα Αιγυπτιακά Ιερογλυφικά δεν είχαν αποκωδικοποιηθεί, και οι αναλυτές δεν μπορούσαν να διαβάσουν τα διασωθέντα Αιγυπτιακά κείμενα, πολλοί και διακεκριμένοι επιστήμονες, ειδικά κατά τον 18ο και 19ο αι., ασχολήθηκαν εντατικά με την λεγόμενη Αιγυπτιολογία, προσδοκώντας μεγάλες ανακαλύψεις (όπως, για παράδειγμα, ο σπουδαίος Γάλλος μαθηματικός Gaspard Monge, ο οποίος ήταν και part-time Αιγυπτιολόγος). Όταν στις αρχές του 20ου αι., τα Αιγυπτιακά ιερογλυφικά τελικά διαβάστηκαν, όσοι περίμεναν να βρουν θησαυρούς τέχνης και επιστήμης απογοητεύτηκαν οικτρά, και η Αιγυπτιολογία σχεδόν εξαφανίστηκε! Σήμερα ξέρουμε ότι η Τέχνη και η Επιστήμη των Ελλήνων ήταν ελληνική, και ότι συγγραφείς όπως ο Ηρόδοτος που αναφέρονται στο χρέος του Ελληνικού προς τον Αιγυπτιακό Πολιτισμό, όχι μόνο δεν το υποτίμησαν, αλλά μάλλον το υπερέβαλαν!

1.12 Ορισμός Έστω S ένα μη-κενό υποσύνολο ενός διατεταγμένου σώματος $\mathbb{F}$.

(a) Αν το S περιέχει ένα μέγιστο στοιχείο s_{max}, δηλ. αν $s_{max} \in S$ και $s \leq s_{max}$ για κάθε $s \in S$, τότε ονομάζουμε το s_{max} **μέγιστο** (maximum) του S και γράφουμε $s_{max} = \max S$.

(b) Αν το S περιέχει ένα ελάχιστο στοιχείο s_{min}, δηλ. αν $s_{min} \in S$ και $s \leq s_min$ για κάθε $s \in S$, τότε ονομάζουμε το s_{min} **ελάχιστο** (minimum) του S και γράφουμε $s_{min} = \min S$.

(a) Αν υπάρχει M τέτοιο ώστε $s \leq M$ για κάθε $s \in S$, τότε ονομάζουμε το M **άνω φράγμα** του S, και λέμε ότι το S είναι *άνω φραγμένο*.

(b) Αν υπάρχει m τέτοιο ώστε $m \leq s$ για κάθε $s \in S$, τότε ονομάζουμε το m **κάτω φράγμα** του S, και λέμε ότι το S είναι *κάτω φραγμένο*.

(c) Αν το S είναι άνω φραγμένο, και υπάρχει αριθμός U τέτοιος ώστε για κάθε άλλο άνω φράγμα M του S, έχουμε ότι $U \leq M$, τότε ονομάζουμε τον αριθμό U **ελάχιστο άνω φράγμα** ή **supremum** του S, και γράφουμε $U = \sup S$.

(d) Αν το S είναι κάτω φραγμένο, και υπάρχει αριθμός L τέτοιος ώστε για κάθε άλλο κάτω φράγμα m του S, έχουμε ότι $m \leq L$, τότε ονομάζουμε τον αριθμό L **μέγιστο κάτω φράγμα** ή **infimum** του S, και το γράφουμε $L = \inf S$.

Παράδειγμα 9. (a) ■

1.13 Ορισμός Ένα διατεταγμένο σώμα $\mathbb{F}$ ονομάζεται **πλήρες** (complete) αν κάθε μη-κενό υποσύνολό του $S \subseteq \mathbb{F}$, $S \neq \emptyset$, το οποίο είναι άνω φραγμένο, έχει ελάχιστο άνω φράγμα $\sup S$ που ανήκει στο $\mathbb{F}$.

Ο σκοπός των **τομών Dedekind** (Dedekind cuts) είναι να παράσχουν μία λογικά ολοκληρωμένη θεμελίωση του συστήματος των πραγματικών αριθμών. Όπως αναφέρει ο ίδιος ο **Rirchard Dedekind** $(1831-1916)$[11], η ιδέα του βασίζεται στην παρατήρηση ότι ένας πραγματικός αριθμός x προσδιορίζεται πλήρως από το σύνολο των κλασματικών αριθμών που είναι μικρότεροι από αυτόν, ή, εναλλακτικά, από το σύνολο των κλασματικών που είναι μεγαλύτεροι. Αναφορικά με την πληρότητα (completeness) και συνέχεια (continuity)

[11] Dedekind, Richard. *Essays on the Theory of Numbers*, Dover Publications Inc, New York, 1963.

της γραμμής των πραγματικών αριθμών (πραγματικής γραμμής) ο Dedekind σημειώνει ότι

> Αν όλα τα σημεία της ευθείας γραμμής μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο σύνολα με τέτοιο τρόπο ώστε αν κάθε σημείο του πρώτου συνόλου βρίσκεται στα αριστερά κάθε σημείου του δεύτερου, τότε υπάρχει ένα και μόνο ένα σημείο που παράγει αυτή την διαίρεση όλων των σημείων σε δύο σύνολα, και κόβει την ευθεία γραμμή σε δύο κομμάτια.

Οδηγούμαστε λοιπόν στον παρακάτω ορισμό.

1.14 Ορισμός Μια **τομή Dedekind στο** $\mathbb{Q}$ είναι ένα ζεύγος υποσυνόλων A, A' του $\mathbb{Q}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $A \cup A' = \mathbb{Q},\ A \neq \emptyset,\ A' \neq \emptyset,\ A \cap A' = \emptyset$.
2. Αν $p \in A$ και $q \in A'$ τότε $p < q$.
3. Το A δεν έχει μέγιστο στοιχείο, δηλ. $\nexists p \in A : \forall q \in A, q \leq p$.

Το A είναι το αριστερό κομμάτι (σύνολο) της τομής και το A' το δεξί. Γράφουμε την τομή ως $x = A|A'$, και, κάνοντας ένα σημειολογικό άλμα, ονομάζουμε την τομή αυτή "πραγματικό αριθμό x". Είναι προφανές ότι υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση ανάμεσα σε κάθε πραγματικό αριθμό x και την τομή του $A|A'$ στο $\mathbb{Q}$, δηλ.

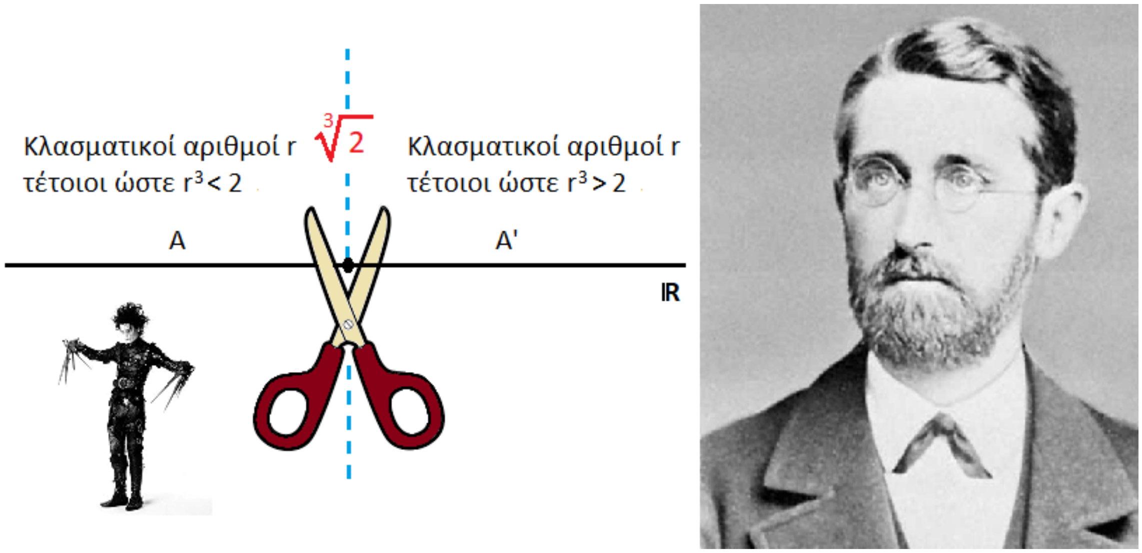
$$x \ \leftrightarrow \ A|A',$$

κάτι μας οδηγεί στον παρακάτω ορισμό.

1.15 Ορισμός Ένας **πραγματικός αριθμός** x είναι μία τομή Dedekind $A|A'$ στο $\mathbb{Q}$, δηλ.

$$x = A|A'.$$

Για το ορισμό του πραγματικού αριθμού x δεν χρειαζόμαστε και τα δύο σύνολα A και A', αλλά μπορούμε να ορίσουμε τον x κάνοντας χρήση του A μόνο, καθώς το $A' = \mathbb{Q} \backslash A$ δεν έχει τίποτε καινούργιο να συνεισφέρει, αλλά μας αρέσει να γράφουμε την τομή ως $A|A'$ που ακόμα και οπτικά μοιάζει με τομή, παρά απλά A. Για να απλοποιήσουμε όμως την παρουσίαση που ακολουθεί, θα απαλείψουμε το "$|A'$" από τον συμβολισμό της τομής και θα γράφουμε την τομή απλά ως A. Έτσι, η τομή A ορίζει τον πραγματικό αριθμό x, η τομή B ορίζει τον πραγματικό αριθμό y, κ.ο.κ., όπου τα σύνολα A και B είναι τα *αριστερά* κομμάτια της τομής για τον κάθε αριθμό. Θυμίζουμε ότι εξ'ορισμού το αριστερό κομμάτι μιας τομής δεν έχει μέγιστο στοιχείο. Το δεξί κομμάτι μπορεί να έχει ή να μην έχει ελάχιστο στοιχείο, ανάλογα με τον αν ο αριθμός είναι ρητός ή άρρητος, αντίστοιχα.



Γράφημα 1.1: Η τομή Dedekind στο $\mathbb{Q}$ για τον πραγματικό αριθμό $\sqrt[3]{2}$, και ο Γερμανός μαθηματικός Julius Wilhelm Richard Dedekind $(1831-1916)$ που εισήγαγε τις τομές αυτές, γνωστός και ως Ψαλιδοχέρης.

1.16 Ορισμός Γράφουμε $\mathbb{R}$ για το σύνολο των πραγματικών αριθμών, και το ορίζουμε ως

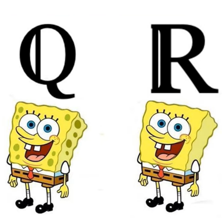
$$\mathbb{R} = \bigcup_{\text{τομές } A \text{ στο } \mathbb{Q}} A,$$

η οποία είναι μία μετρήσιμη ένωση (countable union), και **διατάσσουμε** (order) τους πραγματικούς αριθμούς με την συνολο-πράξη της εγκλίσεως (inclusion), δηλαδή, για κάθε $A, B \in \mathbb{R}$,

$$A < B \text{ εάν και μόνον εάν } A \subset B.$$

Ακόμα, ορίζουμε την **ισότητα** $A = B$ ως πραγματικοί αριθμοί, αν τα σύνολα A και B είναι ίσα. Τέλος, ο πραγματικός αριθμός A ονομάζεται **άρρητος** αν το σύνολο $\mathbb{Q} \setminus A$ δεν περιέχει ελάχιστο στοιχείο (minimum).

Το *δεξί* κομμάτι μιας τομής $A' = \mathbb{Q} \setminus A$ έχει ελάχιστο στοιχείο εάν και μόνο εάν ο αριθμός $A = A|A'$ είναι **ρητός**, δηλ. κλασματικός. Αλλιώς, αν ο αριθμός είναι **άρρητος**, ούτε το αριστερό κομμάτι έχει μέγιστο στοιχείο ούτε το δεξί έχει ελάχιστο στοιχείο. Στα σημεία αυτά,



το $\mathbb{Q}$ έχει "τρύπες"

που τις "γεμίζουμε" με τους άρρητους αριθμούς, έτσι ώστε

το $\mathbb{R}$ να μην έχει "τρύπες".

Το εκπληκτικό είναι ότι, όπως θα δούμε, υπάρχουν "πολύ περισσότερες" τρύπες (πολύ περισσότεροι άρρητοι αριθμοί) απ' ότι κλασματικοί αριθμοί, δηλ. το $\mathbb{Q}$ δεν έχει απλά τρύπες, αλλά είναι εντελώς διάτρητο!

Παράδειγμα 10. Ο άρρητος πραγματικός αριθμός $\sqrt{2}$ μπορεί τώρα να οριστεί ως η τομή $A|A'$ όπου $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$, και ο άρρητος πραγματικός αριθμός $\sqrt[3]{2}$ στο γράφημα παραπάνω, ως η τομή $B|B'$, όπου $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^3 < 2\}$. ■

1.17 Θεώρημα (Πληρότητα των πραγματικών αριθμών) Το σύνολο $\mathbb{R}$ που κατασκευάζεται από τομές Dedekind είναι **πλήρες** με την έννοια ότι έχει την **Ιδιότητα του Ελάχιστου Άνω Ορίου, Supremum Property**: Αν S είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο είναι άνω φραγμένο, τότε υπάρχει μέσα στο $\mathbb{R}$ ένα ελάχιστο άνω φράγμα για το S, δηλ. το $\sup S$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Έπεται, φυσικά, ότι το $\mathbb{R}$ έχει και την **Ιδιότητα του Μέγιστου Κάτω Φράγματος, Infimum Property**: Αν S είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο είναι κάτω φραγμένο, τότε υπάρχει μέσα στο $\mathbb{R}$ ένα κάτω φράγμα για το S, δηλ. το $\inf S$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Απόδειξη: Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο πραγματικών αριθμών $\mathscr{A}$, τέτοιο ώστε για κάθε $A \in \mathscr{A}$ έχουμε ότι $A \leq C$ για κάποιο πραγματικό αριθμό C. Ορίζουμε το σύνολο

$$\sup \mathscr{A} := \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A.$$

Θα δείξουμε ότι το σύνολο αυτό είναι ένας πραγματικός αριθμός. Χρειαζόμαστε δηλαδή να δείξουμε ότι το σύνολο $\sup \mathscr{A}$ ικανοποιεί τις τέσσερις ιδιότητες της τομής Dedekind:

1. Το σύνολο $\sup \mathscr{A}$ είναι προφανώς μη κενό, αφού είναι η ένωση μη κενών συνόλων.
2. Αφού το C στον ορισμό του $\sup \mathscr{A}$ είναι πραγματικός αριθμός, υπάρχει ένας κλασματικός αριθμός p που δεν ανήκει στο C. Αφού κάθε $A \in \mathscr{A}$ είναι ένα υποσύνολο του C, ο p δεν ανήκει σε κανένα από τα $A \in \mathscr{A}$, και άρα δεν ανήκει και στην ένωσή τους $\sup \mathscr{A}$. Άρα το σύνολο $\mathbb{Q} \setminus \sup \mathscr{A}$ είναι μη κενό.

3. Αν το σύνολο $\sup \mathscr{A}$ είχε μέγιστο στοιχείο g, τότε $g \in A$ για κάποιο $A \in \mathscr{A}$. Τότε το g θα ήταν μέγιστο στοιχείο του A, αλλά το A είναι πραγματικός αριθμός και εξ' ορισμού δεν έχει μέγιστο στοιχείο, οπότε εκ του αντιθετοαντιστρόφου (contrapositive) το $\sup \mathscr{A}$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο.
4. Τέλος, αν $x \in \sup \mathscr{A}$, τότε $x \in A$, οπότε για κάθε $y < x$, και επειδή το A είναι πραγματικός αριθμός έχουμε ότι και $y \in A$, και άρα $y \in \sup \mathscr{A}$ επίσης.

Άρα, ο $\sup \mathscr{A}$ είναι πραγματικός αριθμός. Προφανώς το $\sup \mathscr{A}$ είναι ένα άνω φράγμα του A για κάθε $A \subseteq \sup \mathscr{A}$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\sup \mathscr{A} \leq C$, αφού το C είναι ένα οποιοδήποτε άνω φράγμα. Αλλά αυτό είναι απλό, αφού κάθε $x \in \sup \mathscr{A}$ είναι στοιχείο του A για κάποιο $A \in \mathscr{A}$, και αφού $A \subseteq \sup \mathscr{A}$, έχουμε ότι $x \in C$. Άρα, το $\sup \mathscr{A}$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $\mathscr{A}$, το οποίο ονομάζουμε και *supremum* του $\mathscr{A}$. ■

Για να ολοκληρώσουμε την κατασκευή των πραγματικών αριθμών, θα πρέπει να τους εφοδιάσουμε με αλγεβρικές πράξεις, να ορίσουμε το προσθετικό και το πολλαπλασιαστικό ταυτοτικό στοιχείο, να αποδείξουμε ότι οι ορισμοί μας δίνουν πράγματι ένα πεδίο, και να αποδείξουμε περαιτέρω ιδιότητες διατάξεως και πληρότητας για το πεδίο αυτό, δηλαδή να κατασκευάσουμε τους πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$ ως ένα **πλήρες διατεταγμένο πεδίο** (complete ordered field). Αυτή η κατασκευή είναι αρκετά επίπονη στις λεπτομέρειές της και όχι ιδιαίτερα διαφωτιστική, γι' αυτό εδώ θα περιοριστούμε στην περιγραφή του τι ακριβώς πρέπει να δειχθεί χωρίς να μπούμε σε αποδείξεις.

1.18 Ορισμός Για δύο πραγματικούς αριθμούς A και B, ορίζουμε

i. Το **ταυτοτικό στοιχείο της πρόσθεσης** (additive identiy element), συμβολιζόμενο με το 0^*, ως
$$0^* := \{p \in \mathbb{Q} : p < 0\}.$$
(Το 0^* αριστερά είναι ο πραγματικός αριθμός μηδέν, ενώ το 0 δεξιά είναι ο κλασματικός αριθμός μηδέν.)

ii. Το **ταυτοτικό στοιχείο του πολλαπλασιασμού** (multiplicative identity element), συμβολιζόμενο με το 1^*, ως
$$1^* := \{p \in \mathbb{Q} : p < 1\}.$$
(Το 1^* αριστερά είναι ο πραγματικός αριθμός ένα, ενώ το 1 δεξιά είναι ο κλασματικός αριθμός ένα.)

iii. Την **πρόσθεση** (addition) του A και B συμβολιζόμενη $A + B$, ως
$$A + B := \{p + q : p \in A, q \in B\}.$$
(Το σύμβολο "$+$" αριστερά συμβολίζει την πρόσθεση πραγματικών αριθμών, ενώ το "$+$" δεξιά συμβολίζει την πρόσθεση κλασματικών αριθμών.)

iv. Την **αφαίρεση** (subtraction) του B από το A συμβολιζόμενη $A - B$, ως

$$A - B := \{p - q : p \in A, q \in \mathbb{Q}\backslash B\}.$$

(Το σύμβολο "$-$" αριστερά συμβολίζει την αφαίρεση πραγματικών αριθμών, ενώ το "$-$" δεξιά συμβολίζει την αφαίρεση κλασματικών αριθμών.)

v. Το **αρνητικό** του A συμβολιζόμενο $-A$, ως

$$-A := \{q - p : q < 0 \in \mathbb{Q}, p \in \mathbb{Q}\backslash A\}.$$

Προσέξτε ότι στον ορισμό του $-A$ δεν υποθέτουμε ότι ο A είναι θετικός.
Π.χ. $\sqrt{2} := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} = (-\infty, \sqrt{2})$, και $-\sqrt{2} := \{y - x : y < 0, x \in \mathbb{Q}\backslash\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}\} = \{y - x : y < 0, x^2 > 2\} = (-\infty, -\sqrt{2})$.

vi. Την **απόλυτη τιμή** του A, συμβολιζόμενη $|A|$, ως

$$|A| = \begin{cases} A, & \text{αν } A \geq 0 \\ -A, & \text{αν } A < 0. \end{cases}$$

vii. Τον **πολλαπλασιασμό** (multiplication) του A και B, συμβολιζόμενο $A \cdot B$, ως

$$A \cdot B = \{r \in \mathbb{Q} : r \leq 0 \text{ ή } r = p \cdot q \text{ για κάποια } p \in A, q \in B \text{ με } p, q > 0\}.$$

Γενικά,

$$A \cdot B = \begin{cases} 0, & \text{αν } A = 0 \text{ ή } B = 0 \\ |A| \cdot |B|, & \text{αν } A > 0, B > 0 \geq 0 \text{ ή } A < 0, B < 0 \\ -(|A| \cdot |B|), & \text{αν } A > 0, B < 0 \geq 0 \text{ ή } A > 0, B < 0. \end{cases}$$

viii. Τον **αντίστροφο** του $A > 0$, συμβολιζόμενο A^{-1}, ως

$$A^{-1} = \{p \in \mathbb{Q} : p \leq 0 \text{ ή } p > 0 \text{ και } (1/p) \notin A, \text{ αλλά } 1/p \text{ δεν είναι το ελάχιστο στοιχείο του } \mathbb{Q}\backslash A\}.$$

Για $A < 0$,

$$A^{-1} = -(|A|)^{-1}.$$

Ας γράψουμε $x = A|A'$, $y = B|B'$ και $z = C|C'$ για τρεις τομές Dedekind (τρεις πραγματικούς αριθμούς). Ισχύει ότι

1. **ουδέτερο στοιχείο πρόσθεσης** $x + (-x) = 0^*$, $x - y = x + (-y)$

2. **αντιμεταθετικότητα πρόσθεσης**: $x + y = y + x$

3. **προσεταιριστικότητα πρόσθεσης**: $(x+y)+z = x+(y+z)$.

4. **ουδέτερο στοιχείο πολλαπλασιασμού** $x \cdot 1/x = 1^*$.

5. **αντιμεταθετικότητα πολλαπλασιασμού**: $x \cdot y = y \cdot x$

6. **προσεταιριστικότητα πολλαπλασιασμού**: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

Εξ'ορισμού, ένα **σώμα** $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ είναι ένα σύστημα ενός συνόλου στοιχείων $\mathbb{R}$ και δύο πράξεων, πρόσθεση $(+)$ και πολλαπλασιασμός $(\cdot)$, που έχουν τις παραπάνω αλγεβρικές ιδιότητες – αντιμεταθετικότητα, προσεταιριστικότητα, κλπ. Η αριθμητική των τομών είναι συνεπής με την αριθμητική στο $\mathbb{Q}$ υπό την έννοια ότι αν $c, r \in \mathbb{Q}$, τότε $c^* + r^* = (c+r)^*$ και $c^* \cdot r^* = (cr)^*$. Αυτό ακριβώς είναι που εννοούμε όταν λέμε ότι το $\mathbb{Q}$ είναι **υποπεδίο** του $\mathbb{R}$. Η διάταξη των τομών απολαμβάνει και τις εξής πρόσθετες ιδιότητες.

Για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$,

7. **μεταβατικότητα (transitivity)**. $x < y < z \;\Rightarrow\; x < z$.

8. **τριχοτομία (trichotomy)**. Είτε $x < y$ ή $y < x$, ή $x = y$.

9. **μετάθεση (translation)** $x < y \;\Rightarrow\; x + z < y + z$.

Έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα.

1.19 Θεώρημα
Το σύνολο $\mathbb{R}$ των τομών Dedekind στο $\mathbb{Q}$ είναι ένα **πλήρες διατεταγμένο σώμα** που περιέχει το $\mathbb{Q}$ ως ένα **διατεταγμένο υποσώμα**.

Η παρακάτω ιδιότητα των πραγματικών αριθμών πρωτοδιατυπώθηκε από τον Αρχιμήδη στο έργο του *Ψαμμίτης* (The Sand Reckoner) τον 3ο αιώνα π.Χ.:

1.20 Θεώρημα (Αρχιμήδεια Ιδιότητα των πραγματικών αριθμών)
Για $x > 0, y > 0 \in \mathbb{R}$, υπάρχει φυσικός αριθμός $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $nx > y$.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι η Αρχιμήδεια Ιδιότητα δεν ισχύει για τους πραγματικούς αριθμούς. Τότε υπάρχουν πραγματικοί $x > 0$ και $y > 0$ τέτοιοι ώστε $nx \leq y$ για όλους τους ακέραιους $n \in \mathbb{N}$. Αυτό σημαίνει ότι ο y είναι άνω φράγμα του συνόλου $S = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$. Από την πληρότητα των πραγματικών αριθμών, έχουμε ότι ο αριθμός $s_0 = \sup S$ υπάρχει και είναι πραγματικός. Αφού $x > 0$, έχουμε ότι $s_0 < s_0 + x$ και άρα $s_0 - x \leq s_0$. Αφού το s_0 είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του S, ο αριθμός $s_0 - x$ δεν μπορεί να είναι άνω φράγμα του S. Έπεται ότι $s_0 - x < n_0 x$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$, που σημαίνει ότι $s_0 < (n_0 + 1)x$. Αλλά αφού ο αριθμός $(n_0 + 1)x$ ανήκει στο S και είναι μεγαλύτερος από τον s_0, ο αριθμός s_0

δεν μπορεί να είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του S, και έχουμε φτάσει σε άτοπο. Άρα η υπόθεσή μας ότι η Αρχιμήδεια ιδιότητα δεν ισχύει πρέπει να είναι λανθασμένη. ■

Αυτό το θεώρημα μας λέει ότι ακόμα και αν το x είναι ένας πολύ μικρός αριθμός (διάφορος του μηδενός) και το y ένας πολύ μεγάλος αριθμός, κάποιο ακέραιο πολλαπλάσιο του x θα υπερβεί τελικά το y. Άρα, κάποιος μπορεί να αδειάσει μια μπανιέρα από το νερό της μ' ένα κουταλάκι, όσο μεγάλη κι αν είναι η μπανιέρα και μικρό το κουταλάκι αν έχει αρκετό χρόνο, αρκεί η μπανιέρα να είναι πεπερασμένη και το κουταλάκι μη-μηδενικό. Και μπορούμε να αδειάσουμε μ' ένα κουταλάκι όχι μόνο μια μπανιέρα, αλλά και έναν ολόκληρο **ωκεανό**(!)

Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα, μπορούμε να αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα.

1.21 Θεώρημα
Έστω τρεις πραγματικοί αριθμοί x, y και a. Αν για κάθε ακέραιο $n \geq 1$, έχουμε ότι

$$y \leq x \leq y + \frac{a}{n},$$

τότε

$$x = y.$$

Απόδειξη: Αν $x > y$, τότε από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα των πραγματικών έχουμε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε $n(x - y) > a$, κάτι που αντιβαίνει τις ανισότητες στο θεώρημα. Έπεται ότι δεν μπορούμε να έχουμε $x > y$, άρα θα πρέπει να έχουμε $x = y$. ■

Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει μια Αρχή που θα μας φανεί πολύ χρήσιμη στις αποδείξεις θεωρημάτων αργότερα, και επειδή **η Αρχή αυτή είναι ύπουλη**, όπως θα έλεγε ο Schopenhauer, την διατυπώνουμε ξεχωριστά και την τονίζουμε. Συγκεκριμένα, όταν χρειαζόμαστε να δείξουμε ότι δύο πραγματικοί αριθμοί είναι ίσοι, ή ότι ο ένας είναι μεγαλύτερος από τον άλλο, χρησιμοποιούμε την παρακάτω Αρχή:

1.22 Θεώρημα (ϵ-Αρχή / ϵ-Principle)
Για x, y πραγματικούς αριθμούς,

$$\text{αν } \forall\epsilon > 0 \text{ έχουμε } x \leq y + \epsilon, \text{ τότε } x \leq y,$$

και

$$\text{αν } \forall\epsilon > 0 \text{ έχουμε } -\epsilon \leq x - y \leq \epsilon, \text{ τότε } x = y.$$

Απόδειξη: Έπεται απευθείας από το προηγούμενο Θεώρημα. ■

Δηλαδή, για να δείξουμε ότι $x = y$, αρκεί να δείξουμε ότι το x είναι ϵ-κοντά στο y για **οποιοδήποτε αυθαίρετο** $\epsilon > 0$. Σε πολλές αποδείξεις, λοιπόν, θα γράφουμε προτάσεις όπως: [...Άρα, $x = y + \epsilon$, και αφού $\epsilon > 0$ αυθαίρετο, $x = y$.] Στις προτάσεις αυτές επικαλούμαστε την ϵ-Αρχή. Το σημαντικό είναι το ϵ πρέπει να είναι εντελώς αυθαίρετο!

Παρά την πρωτοκαθεδρία των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ στα σύγχρονα μαθηματικά, το σύνολο $\mathbb{Q}$ παραμένει εξαιρετικά σημαντικό για εμάς, αφού είναι τελικά το σύνολο των αριθμών που καταλαβαίνουμε (ρητοί). Ευτυχώς, κάθε πραγματικός αριθμός μπορεί να προσεγγιστεί σε όποιον βαθμό προσέγγισης επιθυμούμε από κλασματικούς αριθμούς, ή για να το πούμε αλλιώς ανάμεσα σε δύο πραγματικούς αριθμούς, όσο κοντά κι αν βρίσκονται αυτοί μεταξύ τους, υπάρχουν άπειροι κλασματικοί αριθμοί.

1.23 Θεώρημα (Πυκνότητα του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$)
Για $x, y \in \mathbb{R}$ και $x < y$, υπάρχει κλασματικός αριθμός $q \in \mathbb{Q}$ τέτοιος ώστε $x < q < y$. Ισοδύναμα, το $\mathbb{Q}$ τέμνει κάθε μη-κενό ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Απόδειξη: Για $q = m/n$, όπου $m, n \in \mathbb{N}$ και $n > 0$, έχουμε

$$xn < m < yn.$$

Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα έχουμε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n(x - y) > 1$, ή $xn - yn > 1$, και άρα υπάρχει ακέραιος m μεταξύ xn και yn, που ικανοποιεί την παραπάνω ανισότητα. Και αφού υπάρχει ένας, υπάρχουν άπειροι (βλέπετε το γιατί;). ■

Λέμε ότι το σύνολο $\mathbb{Q}$ είναι **πυκνό** (dense) στο σύνολο $\mathbb{R}$.

1.24 Ορισμός (**Πυκνό και Πουθενά-Πυκνό Υποσύνολο**) Λέμε ότι ένα σύνολο $A \subset X$ είναι **πυκνό** (dense) στο X αν το A τέμνει κάθε μη-κενό ανοιχτό υποσύνολο του X. Και λέμε ότι ένα σύνολο $A \subset X$ **δεν είναι πουθενά πυκνό** (nowhere dense) στο X αν το κλείσιμό του (closure) έχει κενό εσωτερικό (empty interior).

Για παράδειγμα, το $\mathbb{Z}$ δεν είναι πουθενά πυκνό στο $\mathbb{R}$, αφού είναι το κλείσιμο του εαυτού του, $\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$, και δεν περιέχει κανένα ανοιχτό (στο $\mathbb{R}$) διάστημα, οπότε $\mathring{\bar{\mathbb{Z}}} = \emptyset$.

Η ιδιότητα του $\mathbb{R}$ να περιέχει ένα πυκνό υποσύνολο που (όπως θα δούμε) είναι μετρήσιμο (countable), είναι εξαιρετικά σημαντική! Μη-μετρήσιμα σύνολα, όπως το $\mathbb{R}$, με πυκνά μετρήσιμα υποσύνολα ονομάζονται **διαχωρίσιμα** (seperable) και παίζουν σημαντικό ρόλο στην σύγχρονη θεωρία της Ανάλυσης. Η ύπαρξη ενός πυκνού μετρήσιμου υποσυνόλου μέσα σε ένα μη-μετρήσιμο σύνολο όπως το $\mathbb{R}$ είναι σημαντική γιατί τότε αρκεί να δείξουμε ότι μια ιδιότητα ισχύει για το πυκνό υποσύνολο και αυτή αυτόματα ισχύει και για το υπερσύνολο, και είναι πολύ απλούστερο να δείξουμε οτιδήποτε για μετρήσιμα σύνολα απ' ότι για μη-μετρήσιμα. Κατά κάποιο τρόπο, το "απλούστερο" $\mathbb{Q}$ είναι η πύλη μας (gateway) προς το "πολύπλοκο" $\mathbb{R}$.

Το **μέγεθος** ή **απόλυτη τιμή** του $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0. \end{cases}$$

Άρα, $x \leq |x|$. Η παρακάτω βασική ανισότητα χρησιμοποιείται συνεχώς στην Ανάλυση.

1.25 Θεώρημα (**Τριγωνική ανισότητα, triangle inequlaity**) Για όλους τους αριθμούς $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Απόδειξη: Η μεταφορική (translation) ιδιότητα και η μεταβατική (transitive) ιδιότητα της διάταξης των πραγματικών αριθμών σημαίνει ότι προσθέτοντας y και $-y$ στις ανισότητες $|x| \leq x$ και $-x \leq |x|$, αντίστοιχα, μας δίνει

$$\begin{aligned} x + y &\leq |x| + y \leq |x| + |y| \\ -x - y &\leq |x| - y \leq |x| + |y|. \end{aligned}$$

Αφού $x+y \leq |x|+|y|$ και $-(x+y) \leq |x|+|y|$, συμπεραίνουμε ότι πράγματι $|x+y| \leq |x|+|y|$. ■

Κλείνουμε την συζήτησή μας για την κατασκευή των πραγματικών αριθμών απαντώντας σε δύο εύλογα ερωτήματα:

(1) Το πρώτο εύλογο ερώτημα είναι αν μπορούμε να "κόψουμε΄΄ με τομές το $\mathbb{R}$ όπως κάναμε με το $\mathbb{Q}$. Το $\mathbb{Q}$ "κόβεται" γιατί έχει κενά, οπότε το ερώτημα είναι αν έχει και το $\mathbb{R}$ κενά. Αν θεωρήσουμε μια τομή $A|A'$ στο $\mathbb{R}$, τότε αυτή θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε A και A' να είναι ξένα (disjoint), μη-κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $A \cup A' = \mathbb{R}$, και $a < b$ για κάθε $a \in A$ και $b \in A'$. Ακόμα, το A δεν περιέχει μέγιστο στοιχείο. Αφού κάθε $b \in A'$ είναι άνω φράγμα στο A, ο αριθμός $y = \sup A$ υπάρχει και $a \leq y \leq b$ για όλους τους αριθμούς $a \in A$ και $b \in A'$. Από την τριχοτομία,

$$A|A' = \{x \in \mathbb{R} : x < y\} \mid \{x \in \mathbb{R} : x \geq y\}.$$

Με άλλα λόγια, το y *πρέπει* να ανήκει στο A', οπότε **το** $\mathbb{R}$ **δεν έχει κενά.** Λέμε ότι το $\mathbb{R}$ είναι **πλήρες**. Κάθε τομή στο $\mathbb{R}$ κατ'ανάγκη γίνεται *πάνω* σε κάποιο πραγματικό αριθμό.

(2) Το άλλο εύλογο ερώτημα αφορά την μοναδικότητα του $\mathbb{R}$. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι το $\mathbb{R}$ είναι πράγματι μοναδικό, με την έννοια ότι κάθε πλήρες διατεταγμένο πεδίο $\mathbb{F}$ που περιέχει το $\mathbb{Q}$ ως διατεταγμένο υποπεδίο είναι **ισομορφικό** [12] με το $\mathbb{R}$ αφού, αν λάβουμε $\phi \in \mathbb{F}$ και αντιστοιχήσουμε σε αυτό την τομή $A|A'$, όπου $A = \{r \in \mathbb{Q} : r < \phi \in \mathbb{F}\}$, ουσιαστικά παίρνουμε ξανά το $\mathbb{R}$.

Συμπεραίνουμε ότι το $\mathbb{R}$ είναι **πλήρες** και **μοναδικό**.

1.7 Συνέπειες της Πληρότητας

Σαν μια πρώτη συνέπεια της πληρότητας των πραγματικών είναι το παρακάτω αποτέλεσμα, που μπορεί να ιδωθεί ως ένας απλός τρόπος να εκφραστεί μαθηματικά η ιδιότητα του $\mathbb{R}$ να μην περιέχει κενά.

---

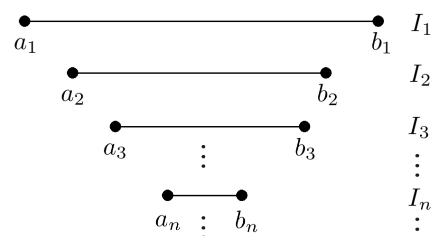
[12]**Ομομορφισμός** είναι μια απεικόνιση μεταξύ δύο αλγεβρικών δομών (συνόλων, δακτυλίων, πεδίων κ.α.). Όταν ο ομομορφισμός είναι επί λέγεται **επιμορφισμός**, όταν είναι 1-1 λέγεται **μονομορφισμός** και όταν είναι 1-1 και επί λέγεται **ισομορφισμός**.

1.26 Θεώρημα (Θεώρημα Κιβωτισμένων Διαστημάτων του Cantor ή Θεώρημα Τομής του Cantor – Cantor's Nested Interval Theorem or Cantor's Intersection Theorem) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε κλειστά και φραγμένα διαστήματα $I_n = [a_n, b_n] = \{x \in \mathbb{R} : a_n \leq x \leq b_n\}$, τέτοια ώστε κάθε I_n περιέχει το I_{n+1}. Τότε η κιβωτισμένη (nested) ακολουθία κλειστών διαστημάτων,

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq I_4 \supseteq \cdots$$

έχει μη-κενή τομή, δηλ. $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$. Αν επιπρόσθετα $b_n - a_n \to 0$, η τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ είναι μονοσύνολο (singleton set).

Απόδειξη: Για να δείξουμε ότι το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ δεν είναι κενό, θα χρησιμοποιήσουμε την πληρότητα του $\mathbb{R}$ για να βρούμε ένα x τέτοιο ώστε $x \in I_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.



Θεωρούμε το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ των αριστερών ορίων των διαστημάτων I_n στο θεώρημα. Επειδή τα διαστήματα είναι κιβωτισμένα, κάθε δεξί όριο b_n είναι ένα άνω φράγμα για το A, και άρα, από την πληρότητα του $\mathbb{R}$, μπορούμε να επιλέξουμε $x = \sup A$. Για κάθε $I_n = [a_n, b_n]$ έχουμε ότι $a_n \leq x$, αφού το x είναι άνω φράγμα για το A. Ακόμα αφού κάθε b_n είναι άνω φράγμα για το A και το x είναι το ελάχιστο άνω φράγμα, έχουμε ότι $x \leq b_n$. Άρα, $a_n \leq x \leq b_n$, που σημαίνει ότι $x \in I_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και άρα $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, οπότε η τομή δεν είναι κενή.

Το δεύτερο συμπέρασμα του θεωρήματος ότι αν $b_n - a_n \to 0$ τότε η τομή είναι μονοσύνολο, έπεται από το γεγονός ότι ένα σύνολο με μηδενικό μήκος είναι είτε κενό είτε μονοσύνολο, και αφού δεν είναι κενό, είναι αναγκαστικά μονοσύνολο, δηλ. $\bigcap_{i=1}^{\infty} I_n = \{x\}$. ∎

Αργότερα θα δούμε ότι κλειστά και φραγμένα διαστήματα στο $\mathbb{R}$ είναι συμπαγή (compact), και ότι το Θεώρημα των Κιβωτισμένων Διαστημάτων του Cantor μπορεί να γενικευτεί για συμπαγή κιβωτισμένα διαστήματα στο $\mathbb{R}^n$.

1.8 Το Εκτεταμένο Σύνολο των Πραγματικών Αριθμών $\bar{\mathbb{R}}$

Τα σύμβολα $+\infty$ και $-\infty$ **δεν** είναι πραγματικοί αριθμοί αφού $\mathbb{Q}|\emptyset$ και $\emptyset|\mathbb{Q}$ δεν είναι τομές. Άρα το σύνολο των πραγματικών αριθμών

$$\mathbb{R} = (-\infty, \infty),$$

δεν περιλαμβάνει τα σύμβολα $+\infty$ και $-\infty$. Για να μπορούμε να χρησιμοποιούμε τα σύμβολα αυτά όμως ορίζουμε το **εκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών** $\bar{\mathbb{R}}$ (extented set of real numbers) ως

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} = [-\infty, \infty],$$

απλώς "κολλώντας" τα δύο αυτά σύμβολα αριστερά και δεξιά από τους πραγματικούς αριθμούς. Οι αριθμητικές πράξεις στο $\mathbb{R}$ μπορούν *μόνο εν μέρη* να επεκταθούν στο $\bar{\mathbb{R}}$ ως εξής: Για $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
a + \infty = +\infty + a &= +\infty, && a \neq -\infty \\
a - \infty = -\infty + a &= -\infty, && a \neq +\infty \\
a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot a &= \pm\infty, && a \in (0, \infty] \\
a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot a &= \mp\infty, && a \in [-\infty, 0) \\
a/(\pm\infty) &= 0, && a \in \mathbb{R} \\
(\pm\infty)/a &= \pm\infty, && a \in (0, +\infty) \\
(\pm\infty)/a &= \mp\infty, && a \in (-\infty, 0).
\end{aligned}$$

Οι εκφράσεις $\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$ και $\pm\infty / \pm\infty$ *δεν ορίζονται*. Ακόμα, γράφουμε εκφράσεις όπως "$x \to \infty$" εννοώντας ότι το x μεγαλώνει χωρίς όριο, και $\exp(\infty) = 0$, $\ln(0) = -\infty$ με την έννοια των αντίστοιχων ορίων.

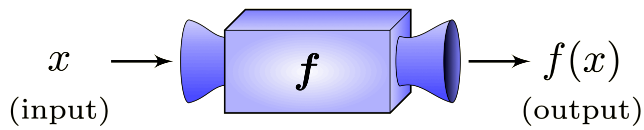
Γενικά, **επιλέγουμε να δουλεύουμε στο $\mathbb{R}$ και όχι στο $\bar{\mathbb{R}}$**, καθώς το $\mathbb{R}$ είναι ομάδα (group), δακτύλιος (ring), πεδίο (field), και άλλα πολλά, ενώ το $\bar{\mathbb{R}}$ δεν είναι τίποτε αυτά. Γι'αυτό, το $\bar{\mathbb{R}}$ είναι περισσότερο μια ευκολία που χρησιμοποιούμε για να απλουστεύσουμε την ζωή μας, αλλά δεν είναι γενικά κατάλληλο για για να κάνουμε αυστηρά (rigorous) μαθηματικά. Ως εκ τούτου, **πολλοί μαθηματικοί αποφεύγουν το $\bar{\mathbb{R}}$ εντελώς.**

1.9 Συναρτήσεις

Μία από τις σημαντικότερες έννοιες στα μαθηματικά είναι αυτή της **συνάρτησης** που συνδέει δύο μεταβλητές x και y. Μέχρι και τον 18ο αιώνα, όταν οι μαθηματικοί μιλούσαν για συναρτήσεις, συνήθως εννοούσαν συναρτήσεις όπως η $f(x) = x^2$ ή η $f(x) = \sin x$, δηλαδή συναρτήσεις που συνδέουν τις μεταβλητές x και y με ένα **συγκεκριμένο τύπο**.

Αυτός ο ορισμός της συνάρτησης όμως είναι πολύ περιοριστικός, και δεν καλύπτει πολλά (φυσικά και οικονομικά) φαινόμενα που θέλουμε να μελετήσουμε. Για παράδειγμα, μπορεί να υπάρχει ένας απλός τύπος που συνδέει την πίεση ενός αερίου με την θερμοκρασία του (κάτω από ιδανικές συνθήκες), αλλά κανείς δεν μπορεί να περιμένει το ίδιο για το προσδόκιμο ζωής ως συνάρτηση της εκπαίδευσης, ή την κλιματική αλλαγή μέσα στον χρόνο. Με τον ίδιο τρόπο, όταν λέμε ότι η ζήτηση ενός προϊόντος είναι συνάρτηση της τιμής του, θα ήταν παράλογο να πιστεύουμε ότι υπάρχει κάποιος απλός υπολογιστικός τύπος που συνδέει την ζητούμενη ποσότητα ενός προϊόντος, Q^D, με την τιμή του, P.

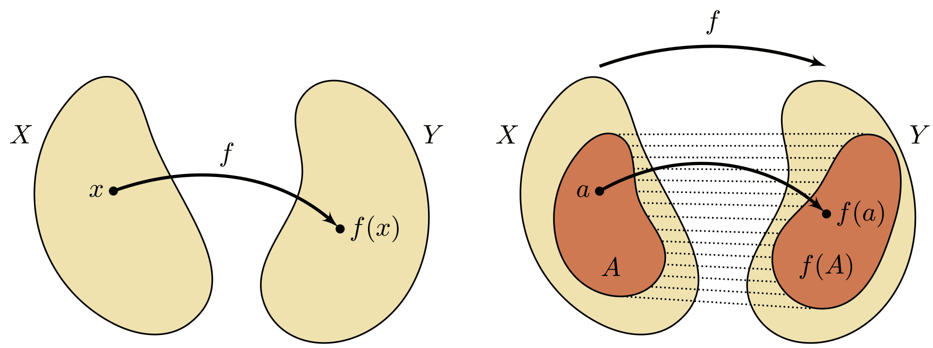
Στα Σύγχρονα Μαθηματικά η έννοια της συνάρτησης αποσυνδέεται από συγκεκριμένους τύπους και παίρνει την έννοια του **κανόνα** που συνδέει δύο μεταβλητές με μονοσήμαντο τρόπο.



1.27 Ορισμός (Συνάρτηση ως κανόνας)
Δοθέντων δύο συνόλων X και Y, μία **συνάρτηση** (function) $f : X \to Y$ είναι ένας **κανόνας ή μηχανισμός** που αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο $x \in X$ σε <u>ακριβώς ένα στοιχείο</u> $y = f(x) \in Y$. Η μεταβλητή x ονομάζεται **ανεξάρτητη** και η μεταβλητή y **εξαρτημένη**. Άλλα ονόματα για μια συνάρτηση είναι **απεικόνηση** (mapping) και **μετασχηματισμός** (transformation). Το σύνολο X στο οποίο το x λαμβάνει τιμές ονομάζεται **πεδίο ορισμού** ή **τομέας** (domain) της f, ενώ το σύνολο Y στο οποίο η f λαμβάνει τιμές ονομάζεται **πεδίο τιμών** ή **συν-τομέας** (codomain) της f.

Μία συνάρτηση f χαρακτηρίζεται από δύο στοιχεία: **(1)** τον τομέα (domain) X της συνάρτησης που προσδιορίζει τις τιμές που η μεταβλητή x μπορεί να λάβει, και **(2)** τον κανόνα f που προσδιορίζει πως να υπολογίσουμε την $f(x)$ για κάθε δεδομένο x. Είναι σημαντικό να δίνουμε προσοχή και στα δύο!

Έτσι, ορισμοί όπως "έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$", είναι ελλιπείς καθώς δεν προσδιορίζουν ξεκάθαρα τον τομέα και συν-τομέα της συνάρτησης. Το σύνηθες είναι να εννοείται σε αυτή την περίπτωση ότι το x παίρνει όλες τις τιμές για τις οποίες η f είναι καλώς-ορισμένη, δηλαδή στο παράδειγμα μας, $x \geq 0$ και $x \neq 1$. Ο σωστός ορισμός σε αυτό το παράδειγμα είναι: "Εστω $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$". Βέβαια, σε αυτή την περίπτωση, η συνάρτηση $g : [2, 3] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ είναι μια άλλη συνάρτηση διαφορετική από την f αφού έχει διαφορετικό τομέα X.



Οι συναρτήσεις $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$, και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x^2$, δεν είναι ίδιες (ίσες) αφού η μία λαμβάνει τιμές στο $\mathbb{N}$ και η δεύτερη στο $\mathbb{R}$. Για να μην μπερδευόμαστε ως προς τον τομέα της συνάρτησης, πολλές φορές χρησιμοποιούμε διαφορετικά σύμβολα για την ανεξάρτητη μεταβλητή που μας θυμίζουν το σώμα στο οποίο ανήκει. Έτσι, για φυσικές ή ακέραιες μεταβλητές συχνά γράφουμε $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με $f(n) = n^2$, για πραγματικές μεταβλητές γράφουμε $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x^2$, και για μιγαδικές μεταβλητές γράφουμε $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $h(z) = z^2$. Τα n, x, και z είναι, κατά κάποιο τρόπο, οι 'κρατημένοι' (reserved) ή τυπικοί (standard) συμβολισμοί για ακέραιες, πραγματικές, και μιγαδικές μεταβλητές, αντίστοιχα.

Ο κανόνας f που αντιστοιχίζει ένα x σε ένα $f(x)$ χρειάζεται επίσης προσοχή. Για παράδειγμα, οι πραγματικές συναρτήσεις, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x + 1$, και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, δεν είναι ίσες καθώς η f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$, ενώ η g δεν ορίζεται για $x = 1$, δηλαδή ορίζεται στο $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Αν όμως 'άρουμε την ασυνέχεια' της g στο $x = 1$ ορίζοντας μια νέα συνάρτηση

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1, \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

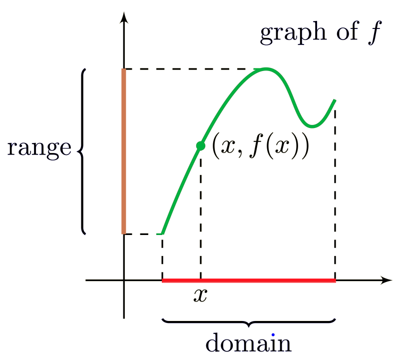
τότε οι συναρτήσεις f και $\tilde{g}$ είναι πράγματι ίσες: έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, και παίρνουν την ίδια τιμή σε κάθε x.

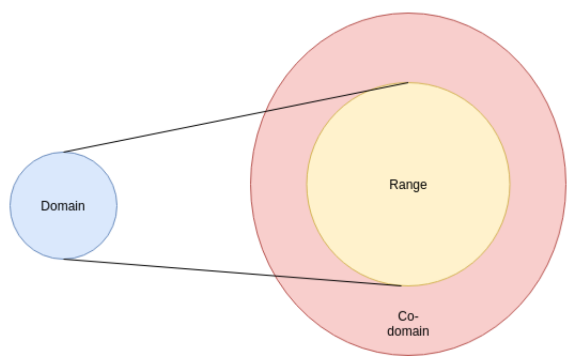
1.28 Ορισμός Για μια συνάρτηση $f : X \to Y$, το σύνολο X ονομάζεται **γενικό πεδίο ορισμού** ή **γενικός τομέας** (general domain) και το σύνολο Y ονομάζεται **πεδίο στόχων** (target set) ή συν-τομέας της f. Το **πεδίο ορισμού** ή **τομέας** (domain) $A = D_f \subseteq X$ της f είναι το υποσύνολο του X στο οποίο η f είναι καλώς ορισμένη. Το **πεδίο τιμών** ή **εμβέλεια** (range) ή **εικόνα** (image) της f είναι το σύνολο

$$R_f = Im_f = f(A) = \{y \in Y : \text{υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο } x \in A \text{ με } f(x) = y\}.$$

Το **γράφημα** (graph) της f είναι το σύνολο των σημείων (x, y) στο $X \times Y$ υπό την f,

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : x \in X, y = f(x)\}.$$





Μπορούμε ότι να πούμε ότι μια συνάρτηση $f : X \to Y$ **ορίζεται** από το γράφημά της, αφού αυτό μας δίνει τα ζευγάρια (x, y) που αντιστοιχίζουν κάθε $x \in X$ σε ακριβώς ένα $y \in Y$. Έχουμε λοιπόν τον επόμενο εναλλακτικό ορισμό της συνάρτησης.

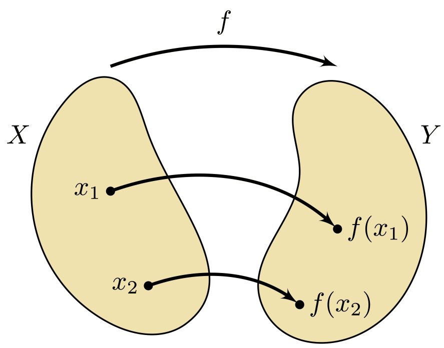
1.29 Ορισμός **(Συνάρτηση ως υποσύνολο)** Μία **συνάρτηση** $f : X \to Y$ είναι ένα **υποσύνολο** $\Gamma_f \subset X \times Y$ με την ιδιότητα ότι για κάθε $x \in X$, υπάρχει μοναδικό $y \in Y$ τέτοιο ώστε $(x, y) \in \Gamma_f$.

1.30 Ορισμός Μία συνάρτηση $f : X \to Y$ ονομάζεται **εμβολική** ή **ένα-προς-ένα (1-1)** (injective ή one-to-one) αν για κάθε ζεύγος διακριτών στοιχείων $x_1, x_2 \in X$, τα στοιχεία $f(x_1), f(x_2) \in Y$ είναι διακριτά, δηλ.

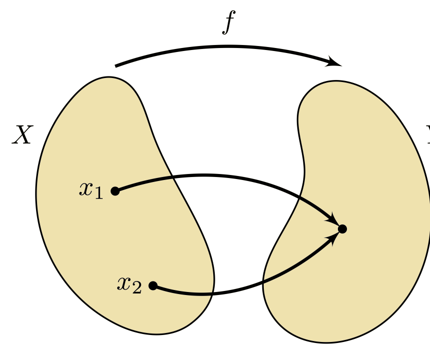
$$x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

ή, ισοδύναμα, αν τα στοιχεία $f(x_1), f(x_2) \in Y$ είναι ίσα, τότε και τα $x_1, x_2 \in X$ είναι ίσα, δηλ.

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2.$$



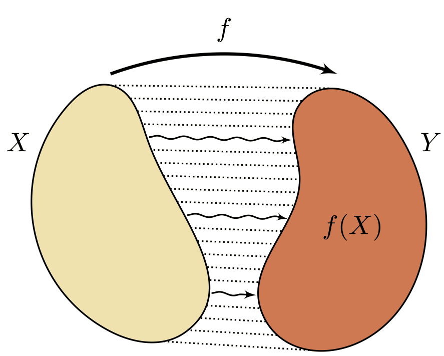
f injective



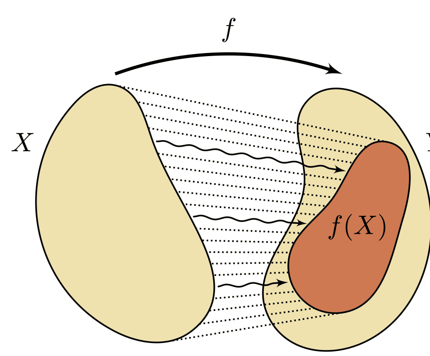
f not injective

1.31 Ορισμός Μία συνάρτηση $f : X \to Y$ ονομάζεται **επιβολική** ή **επί** (surjective ή onto) αν για κάθε $y \in Y$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in X$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$, δηλαδή αν

$$\mathrm{Im}(f) \equiv f(X) = Y.$$



f surjective



f not surjective

1.32 Ορισμός Μία συνάρτηση $f : X \to Y$ ονομάζεται **αμφιεμβολική** ή **1-1 και επί** (bijective ή one-to-one and onto) αν είναι και εμβολική και επιβολική. Σε αυτή την περίπτωση, υπάρχει η **αντίστροφη συνάρτηση** $f^{-1} : Y \to X$, οριζόμενη ως $x = f^{-1}(y)$, η οποία είναι επίσης αμφιεμβολική. Γι αυτό, οι αμφιεμβολικές συναρτήσεις ονομάζονται και **αντιστρέψιμες** (invertible)

Σημείωση: Στα αγγλικά η λέξη *ject* σημαίνει *to throw*, και άρα *inject* σημαίνει *to throw inside*. Άρα, η λέξη *injection* μπορεί να αποδοθεί στα ελληνικά ως *εμβολή*, δηλαδή η *βολή μέσα* (το ν στο εν γίνεται μ). Αντίστοιχα, η λέξη *surjection* σημαίνει *to throw onto*, δηλαδή *ρίχνω επάνω*, οπότε *surjection* είναι η *επιβολή*, δηλαδή η *βολή επάνω*. Τέλος, η λέξη *biject* είναι σύντμηση της λέξης *bi-inject*, άρα η λέξη *bijection* μπορεί να αποδοθεί στα ελληνικά είτε ως *αμφιεμβολή*, είτε με σύντμηση ως *αμφιβολή*. Προφανώς προτιμάμε τον όρο *αμφιεμβολή*, χωρίς αμφιβολία.

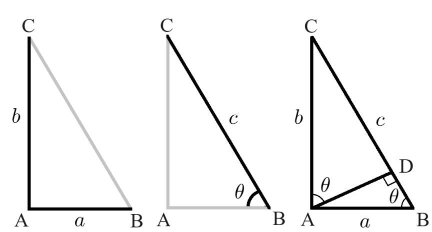
Παράδειγμα 11. Το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχει πολλές αποδείξεις και έχουν όλες το ενδιαφέρον τους! Στο παράδειγμα αυτό παρουσιάζουμε μια απόδειξη που χρησιμοποιεί την έννοια της συνάρτησης με έναν αφηρημένο τρόπο, ως ένα παράδειγμα της δύναμης της αφηρημένης σκέψης στα μαθηματικά.

1.33 Θεώρημα (Πυθαγόρειο Θεώρημα) Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, αν a και b είναι το μήκος των δύο κάθετων πλευρών και c είναι το μήκος της υποτείνουσας, τότε

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Απόδειξη: Το εμβαδό ενός ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές a και b είναι (Σχ. 1)

$$\text{Area(ABC)} = \text{Area}(a, b) = \frac{ab}{2}.$$



Σχ. 1 Σχ. 2 Σχ. 3

Το εμβαδό όμως μπορεί να καθοριστεί αν ξέρουμε μόνο το μήκος της υποτείνουσας c και την γωνία θ αυτής με την μία κάθετη (Σχ. 2), υπάρχει δηλαδή, συνάρτηση $\text{Area}(c, \theta)$ που μας δίνει το ίδιο εμβαδό με αυτό που πήραμε από την $\text{Area}(a, b)$. Αλλά, αν διπλασιάσουμε το a, θα διπλασιαστούν και τα b και c, οπότε το εμβαδό θα τετραπλασιαστεί, δηλαδή

$$\text{Area}(2c, \theta) = 4\text{Area}(c, \theta) = \text{Area}(2a, 2b) = 4\text{Area}(a, b).$$

Άρα το εμβαδό ως προς c και θ πρέπει **αναγκαστικά** να έχει την μορφή

$$\text{Area}(c, \theta) = c^2 f(\theta),$$

όπου $f(\theta)$ είναι κάποια συνάρτηση της γωνίας θ. Η συνάρτηση f μας είναι άγνωστη, αλλά μπορούμε εύκολα να δούμε ότι υπάρχει, είναι μη-μηδενική, θετική, και αύξουσα στο θ. Έχουμε λοιπόν,

$$\text{Area(ABC)} = c^2 f(\theta).$$

Τώρα φέρουμε από το A την κάθετο στην υποτείνουσα BC (Σχ. 3). Βλέπουμε ότι σχηματίζονται δύο νέα τρίγωνα, τα ABD και ADC, τα οποία είναι όμοια μεταξύ τους και όμοια με το αρχικό τρίγωνο ABC, και στα οποία τα a και b είναι τώρα τα μήκη των υποτεινουσών τους. Άρα,

$$\text{Area(ABC)} = \text{Area(ABD)} + \text{Area(ADC)} = a^2 f(\theta) + b^2 f(\theta),$$

οπότε

$$c^2 f(\theta) = a^2 f(\theta) + b^2 f(\theta).$$

Αφού $f(\theta) \neq 0$ και > 0 για κάθε τρίγωνο με μη-μηδενικό εμβαδό, διαιρούμε με $f(\theta)$ τις δύο πλευρές και παίρνουμε το αποτέλεσμα.

■

Κανείς θα ήθελε φυσικά να ξέρει ποια είναι αυτή η μυστηριώδης συνάρτηση $f(\theta)$ στην απόδειξη παραπάνω – μπορεί στην απόδειξη να μην μας χρειάστηκε, αλλά θα θέλαμε να ξέρουμε. Η παρακάτω άσκηση σας ζητά να την βρείτε.

■

1.34 Άσκηση

Βρείτε την συνάρτηση $f(\theta)$ στην απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος που δόθηκε παραπάνω, και δείξτε ότι είναι θετική, και γνησίως αύξουσα στο θ, για $0 < \theta < \pi/2$.

1.35 Ορισμός Η **ταυτοτική συνάρτηση** (identity map) ενός συνόλου X στον εαυτό του, $id : X \to X$, απεικονίζει κάθε στοιχείο $x \in X$ στον ευατό του, $id(x) = x$.

1.36 Ορισμός Αν $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ τότε η **σύνθεση** (composition) $g \circ f : X \to Z$ είναι η συνάρτηση που στέλνει κάθε $x \in X$ στο $z = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \in Z$. Η σύνθετη συνάρτηση $g \circ f$ διαβάζεται ανάποδα ως "f σύνθεση g", δηλ. διαβάζεται από τα δεξιά προς τα αριστερά.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"] & & Z \end{tikzcd}$$

Η έκφραση $g\circ f$ **διαβάζεται ανάποδα**, δηλαδή διαβάζεται ως "f σύνθεση g" ("f composition g"), γιατί πρώτα εφαρμόζουμε την f σε κάποιο $x \in X$ και παίρνουμε ένα $y \in Y$, και μετά εφαρμόζουμε την g στο y που πήραμε στο πρώτο βήμα και παίρνουμε ένα $z \in Z$. Είναι πάντα λίγο ενοχλητικό να **διαβάζουμε την σύνθεση από τα δεξιά προς τα αριστερά**, αλλά **αυτός είναι ο σωστός τρόπος** και είναι καλό να τον συνηθίσει κανείς νωρίς(!). Αργότερα όταν μιλήσουμε για πολλαπλότητες και για τους τελεστές **pullback** και **pushforward** που μας μεταφέρουν από την πολλαπλότητα M στο $\mathbb{R}^n$ και πίσω, θα δούμε και άλλους λόγους που κάνουν αυτό τον τρόπο του "ανάποδου διαβάσματος" απόλυτα φυσικό όταν έχουμε σύνθεση συναρτήσεων.

Αν οι f και g είναι εμβολικές τότε και η $g \circ f$ είναι εμβολική, ενώ αν οι f και g είναι επιβολικές τότε και η $g \circ f$ είναι επιβολική. Έπεται ότι η σύνθεση δύο αμφιεμβολικών συναρτήσεων είναι επίσης αμφιεμβολική συνάρτηση.

1.10 Μετρήσιμα και μη-Μετρήσιμα Σύνολα

1.37 Ορισμός Λέμε ότι δύο σύνολα A και B έχουν την ίδια **πληθικότητα** (cardinality) και γράφουμε $A \sim B$, αν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από το σύνολο A επί του συνόλου B. Η σχέση $\sim$ είναι μία **σχέση ισοδυναμίας** δηλαδή ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

(a) $A \sim A$,

(b) $A \sim B$ συνεπάγεται ότι $B \sim A$,

(c) $A \sim B \sim C$ συνεπάγεται ότι $A \sim C$.

1.38 Ορισμός Ένα σύνολο S ονομάζεται

πεπερασμένο (finite) αν είναι κενό ή για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, $S \sim \{1, ..., n\}$,
άπειρο (infinite) αν δεν είναι πεπερασμένο,
αριθμήσιμο (denumerable) αν $S \sim \mathbb{N}$,
μετρήσιμο (countable) αν είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο,
μη-μετρήσιμο (uncountable) αν δεν είναι μετρήσιμο.

Γράφουμε card $A =$ card B όταν δύο σύνολα έχουν την ίδια πληθικότητα.

Αν το άπειρο σύνολο S είναι μετρήσιμο τότε υπάρχει αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to S$, που μας επιτρέπει να γράψουμε τα στοιχεία του S ως μια άπειρη λίστα $s_1 = f(1), s_2 = f(2), s_3 = f(3), \ldots$ κτλ. Αντιστρόφως, αν το άπειρο σύνολο S μπορεί να γραφτεί ως μια άπειρη λίστα (χωρίς επαναλήψεις) $S = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$ τότε είναι μετρήσιμο αφού μπορούμε να ορίσουμε την αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $f(k) = s_k$ για $k \in \mathbb{N}$.

Οι ορισμοί αυτοί που οφείλονται στον σπουδαίου Γερμανο-Εβραίο μαθηματικό Georg Cantor (1845-1918) μας οδηγούν σε μερικά εκπληκτικά αποτελέσματα, στα οποία στρεφόμαστε τώρα.

Το πρώτο εκπληκτικό αποτέλεσμα του Cantor είναι ότι, αν και για κάθε φυσικό αριθμό $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν δύο ακέραιοι, n και $-n$ στο $\mathbb{Z}$, τα σύνολα $\mathbb{N}$ και $\mathbb{Z}$ έχουν την ίδια πληθικότητα.

1.39 Θεώρημα Το σύνολο $\mathbb{Z}$ είναι μετρήσιμο, δηλ. card $\mathbb{Z} =$ card $\mathbb{N}$.

Απόδειξη: Η παρακάτω απαρίθμηση των στοιχείων του $\mathbb{Z}$ δίνει την απαιτούμενη αμφιεμβολική απεικόνιση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$,

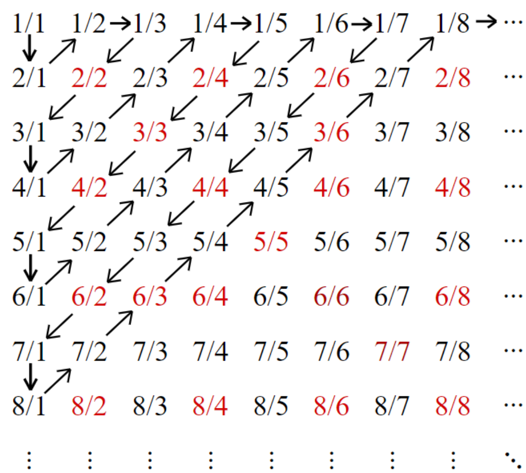
$$\begin{array}{c|cccccccccc|c} \mathbb{Z} & \cdots & -4, & -3, & -2, & -1, & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & f(k) \\ \mathbb{N} & & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 8 & & k \end{array}$$

■

Ένα άλλο εκπληκτικό αποτέλεσμα είναι ότι, αν και προφανώς υπάρχουν πολλοί περισσότεροι κλασματικοί αριθμοί $m/n, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$, απ' ότι φυσικοί αριθμοί $n \in \mathbb{N}$, τα σύνολα $\mathbb{N}$ και $\mathbb{Q}$ έχουν επίσης την ίδια πληθικότητα.

1.40 Θεώρημα Το $\mathbb{Q}$ είναι μετρήσιμο, δηλ. card $\mathbb{Q} =$ card $\mathbb{N}$.

Απόδειξη: Η παρακάτω απαρίθμηση των στοιχείων του $\mathbb{Q}$ δίνει την απαιτούμενη αμφιεμβολική απεικόνιση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$,



■

Το πλέον όμως σημαντικό αποτέλεσμα του Cantor είναι ότι, αν και τα σύνολα των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ και το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ είναι και τα δύο άπειρα, το $\mathbb{R}$ είναι "πιο άπειρο" από το $\mathbb{N}$.

1.41 Θεώρημα Το $\mathbb{R}$ είναι μη-μετρήσιμο, δηλ. card $\mathbb{R} >$ card $\mathbb{N}$.

Απόδειξη: (Cantor) Η απόδειξη που παρουσιάζουμε οφείλεται στον Cantor και είναι τόσο όμορφη που έχει και όνομα: ονομάζεται "η διαγώνια απόδειξη του Cantor" (Cantor's diagonal argument). Κάθε πραγματικός αριθμός x μπορεί να αναπτυχθεί ως ένας δεκαδικός αριθμός $x = N.x_1x_2x_3\cdots$, όπου υποθέτουμε ότι αυτό το ανάπτυγμα δεν τελειώνει ποτέ σε μία άπειρη αλληλουχία ενναριών 9. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το $\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο, και αφού είναι άπειρο, ότι είναι αριθμήσιμο, οπότε υπάρχει $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ αμφιεμβολική απεικόνιση. Χρησιμοποιώντας την f μπορούμε να απαριθμήσουμε τα στοιχεία του $\mathbb{R}$ σε μία λίστα μαζί με τα δεκαδικά αναπτύγματά τους σε έναν πίνακα ως εξής:

$$\begin{array}{lclccccccc}
f(1) & = & N_1 & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & x_{17} \\
f(2) & = & N_2 & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} & x_{27} \\
f(3) & = & N_3 & x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} & x_{37} \\
f(4) & = & N_4 & x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} & x_{46} & x_{47} \\
f(5) & = & N_5 & x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} & x_{56} & x_{57} \\
f(6) & = & N_6 & x_{61} & x_{62} & x_{63} & x_{64} & x_{65} & x_{66} & x_{67} \\
f(7) & = & N_7 & x_{71} & x_{72} & x_{73} & x_{74} & x_{75} & x_{76} & x_{77}
\end{array}$$

Θεωρήστε τώρα τα ψηφία x_{ii} στην διαγώνιο του πίνακα. Για κάθε i, διαλέξτε ένα ψηφίο y_i τέτοιο ώστε $y_i \neq x_{ii}$ και $y_i \neq 9$. Που είναι ο αριθμός $y = 0.y_1y_2y_3\cdots$ στην λίστα αυτή; Μήπως είναι ο $f(1)$; Όχι, αφού το πρώτο ψηφίο στο δεκαδικό ανάπτυγμα του $f(1)$

είναι x_{11} και $y_1 \neq x_{11}$. Μήπως είναι ο $f(2)$; Όχι, αφού το δεύτερο ψηφίο στο δεκαδικό ανάπτυγμα του $f(2)$ είναι x_{22} και $y_2 \neq x_{22}$. Μήπως είναι ο $f(k)$; Όχι, αφού το kth ψηφίο στο δεκαδικό ανάπτυγμα του $f(k)$ είναι x_{kk} και $y_k \neq x_{kk}$. Συμπεραίνουμε ότι το y δεν υπάρχει πουθενά στην λίστα! Άρα η λίστα δεν είναι πλήρης, και αυτό είναι αντίφαση στην υπόθεση ότι η $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ είναι αμφιεμβολική. Άρα, το $\mathbb{R}$ είναι μη-μετρήσιμο. ■

Οι πραγματικοί αριθμοί $\mathbb{R}$, λοιπόν, διαιρούνται σε δύο μη-επικαλυπτόμενα υποσύνολα, τους ρητούς $\mathbb{Q}$ και τους άρρητους $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Αφοί το σύνολο $\mathbb{Q}$ είναι μετρήσιμο, το σύνολο των άρρητων αριθμών $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ είναι μη-μετρήσιμο. Αυτό σημαίνει ότι αν και οι ρητοί είναι άπειροι, σχεδόν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί είναι άρρητοι.

1.11 Δυαδικοί (και άλλοι) Αριθμοί

Χρησιμοποιώντας από παιδιά το δεκαδικό σύστημα στην καθημερινή μας ζωή και μην βρίσκοντας κανένα λόγο να το αμφισβητήσουμε, οι περισσότεροι από εμάς εκπλησσόμαστε όταν ακούμε για πρώτη φορά ότι υπάρχουν και «άλλοι αριθμοί», ή για να το πούμε σωστά, ότι οι αριθμοί μπορούν να εκφραστούν και σε άλλα συστήματα. Το κάθε σύστημα έχει την **βάση** του, και **οι αριθμοί εκφράζονται ως σταθμικά αθροίσματα δυνάμεων της βάσης αυτής**.

Ας πάρουμε για παράδειγμα τον αριθμό 2517 και ας τον γράψουμε ως

$$2517_{10},$$

όπου ο δείκτης 10 μας θυμίζει ότι χρησιμοποιούμε το δεκαδικό σύστημα, που φυσικά έχει βάση το 10. Αυτό που εννοούμε με αυτόν τον αριθμό είναι

$$2517_{10} = 2 \text{ χιλιάδες} + 5 \text{ εκατοντάδες} + 1 \text{ δεκάδα} + 7 \text{ μονάδες}.$$

Αλλά αφού η χιλιάδα είναι 10^3, η εκατοντάδα είναι 10^2, η δεκάδα είναι 10^1, και η μονάδα 10^0, έχουμε

$$2517_{10} = 2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 7 \times 10^0,$$

και το 2517_{10} είναι το σταθμικό άθροισμα δυνάμεων του 10.

Αλλά φυσικά δεν υπάρχει τίποτε το ιδιαίτερο με τη βάση 10, καθώς:

1.42 Πρόταση Μπορούμε να γράψουμε κάθε πραγματικό αριθμό $a \in \mathbb{R}$ ως σταθμικό άθροισμα δυνάμεων οποιουδήποτε πραγματικού αριθμού $\boldsymbol{b} > 1$ ως βάση. Συμβολίζουμε τον αριθμό a στη βάση b, ως $a_{\boldsymbol{b}}$.

Παράδειγμα 12. Αφού

$$2517_{10} = 4 \times 5^4 + 0 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 3 \times 5^1 + 2 \times 5^0,$$

έχουμε

$$2517_{10} = 40032_5$$

στη βάση $b = 5$, και αφού

$$2517_{10} = 1 \times 12^3 + 5 \times 12^2 + 5 \times 12^1 + 9 \times 12^0,$$

έχουμε επίσης

$$2517_{10} = 1559_{12}$$

στη βάση $b = 12$. ■

Φυσικά, το ίδιο ισχύει και για αριθμούς με δεκαδικά ψηφία καθώς μπορούμε να πάρουμε αρνητικές δυνάμεις της βάσης, $b^{-1}, b^{-2}, \ldots$ κ.ο.κ.. [13]

Παράδειγμα 13. Για παράδειγμα, δείξτε ως άσκηση ότι

$$257.56_{10} = 2012.24_5.$$

■

Από όλες τις βάσεις, η βάση $b = 10$ επικράτησε μάλλον γιατί έχουμε 10 δάκτυλα στα χέρια μας. Μία άλλη βάση που χρησιμοποιείται από την αρχαιότητα ως και σήμερα, π.χ. στην ώρα, είναι η βάση $b = 12$. Το 12 έχει 4 διαιρέτες (το 2, το 3, το 4 και το 6), ενώ το 10 έχει μόνο δύο (το 2 και το 5), γι'αυτό χρησιμοποιείται στην μέτρηση πραγμάτων που είναι αδιαίρετα (π.χ. μια ντουζίνα αβγά). Το 12 είναι επίσης διαιρέτης του 24 (24 ώρες), του 36, και του 48. Το σύστημα με βάση το 12 ονομάζεται **δωκεδακικό** (duodecimal). Στην Βρετανία, μέχρι πρόσφατα η Λίρα υποδιαιρούνταν σε 12 pence, και το λεγόμενο Imperial Standards System μέτρησης (pounds, miles, κτλ.), που χρησιμοποιείται στην Βρετανία και σε πολλές πρώην Βρετανικές κτήσεις (ΗΠΑ, Καναδάς, Αυστραλία, κ.α.), είναι δωδεκαδικό. Το Standard International (SI) System (κιλά, χιλιόμετρα, κτλ.) που χρησιμοποιούμε στην Ελλάδα είναι φυσικά δεκαδικό.

Για να γράψουμε δεκαδικούς αριθμούς χρειαζόμαστε 10 ψηφία: $0, 1, 2, \ldots, 9$. Αντίστοιχα, για να γράψουμε ένα αριθμό στο σύστημα με βάση b χρειαζόμαστε b ψηφία: $0, 1, 2, \ldots, b-1$. Αν $b > 10$ ξεμένουμε από αριθμητικά ψηφία και πρέπει να χρησιμοποιήσουμε γράμματα: A, B, C, ..., όπως στον παρακάτω πίνακα.

[13] Βλ. https://calculator.name/baseconvert/ .

βάση b	**ψηφία**															
2	0	1														
3	0	1	2													
4	0	1	2	3												
5	0	1	2	3	4											
6	0	1	2	3	4	5										
7	0	1	2	3	4	5	6									
8	0	1	2	3	4	5	6	7								
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8							
10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9						
11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A					
12	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B				
13	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C			
14	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D		
15	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	
16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$

Έτσι, στο **δεκαεξαδικό** $b = 16$ σύστημα, $\mathrm{F}_{16} = 15_{10}$, $10_{16} = 16_{10}$, και $11_{16} = 17_{10}$. Στο σύστημα αυτό, $256786_{10} = 3\mathrm{EB}12_{16}$ και $2367_{10} = 93\mathrm{F}_{16}$.

Κλείνουμε απαριθμώντας κάποιες ιδιότητες των αριθμών a_b.

1.43 Πρόταση Σε κάθε σύστημα με βάση $b > 1$:

1. $10_b = b_{10}$.

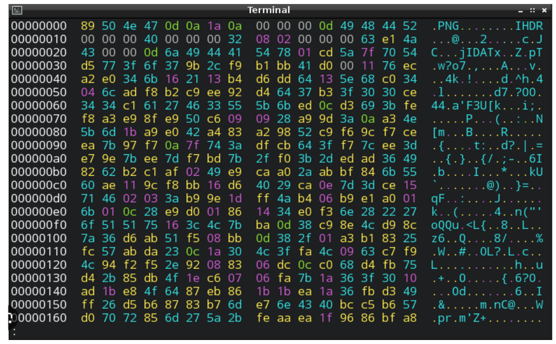
2. $11_b = (b+1)_{10}$.

3. Δεν υπάρχουν αριθμοί με ψηφία μεγαλύτερα από $b-1$ σε αριθμούς με βάση b.

4. Όσο μεγαλύτερη η βάση b, τόσο λιγότερα τα ψηφία που χρειαζόμαστε για να εκφράσουμε τους αριθμούς, και το αντίστροφο.

Απόδειξη: Οι ιδιότητες αυτές είναι προφανείς από τους ορισμούς. ∎

Παράδειγμα 14.



1. $10_2 = 2_{10},\ 10_3 = 3_{10},\ 10_{16} = 16_{10}$.
2. $11_2 = 3_{10},\ 11_5 = 6_{10},\ 11_{16} = 17_{10}$.
3. Οι αριθμοί 43_3 και 48_5 δεν υπάρχουν. Ούτε το 3 ούτε το 4 υπάρχουν στην βάση 3, και το 8 δεν υπάρχει στην βάση 5.
4. Π.χ. $99_{16} = 153_{10} = 10011001_2$, οπότε στο δεκαεξαδικό σύστημα (HEX) χρειαζόμαστε 2 ψηφία, στο δεκαδικό (DEC) 3 και στο δυαδικό (BIN) 8 ψηφία, για να εκφράσουμε τον ίδιο αριθμό. Γι' αυτό το λόγο, **οι μνήμες των ηλεκτρονικών υπολογιστών χρησιμοποιούν το δεκαεξαδικό $b = 16$ σύστημα.** Δεξιά βλέπουμε την μνήμη RAM ενός υπολογιστή σε κάποια χρονική στιγμή. Οι αριθμοί στην μέση είναι δεκαεξαδικοί (HEX) αριθμοί με δύο ψηφία, δηλαδή αριθμοί μεταξύ, $00_{12} = 0_{10}$ και $\mathrm{ff}_{16} = 255_{10}$. Π.χ. ένας αριθμός είναι ο cd, και στο https://calculator.name/baseconvert/ βρίσκουμε ότι $\mathrm{cd}_{16} = 205_{10}$. Το πλήθος των αριθμών μεταξύ 0 και 255 είναι 256, γι αυτό η βασική μονάδα μνήμης είναι τα 256 Bytes RAM. Γενικά, η RAM μετριέται σε πολλαπλάσια (ή υποπολλαπλάσια) του 256 B, π.χ. 16 MB = 16 000 000 B = (62 500) (256) B, και 128 B = (1/2) (256) B. Ένα PC με μνήμη RAM 16 MB στα 2667 MHZ, έχει 62500 θέσεις μνήμης, η κάθε μία από τις οποίες μπορεί να λάβει μία από 256 δυνατές τιμές κάθε $(1/2667) \times 10^{-6}$ δευτερόλεπτα (!!!). Σας φτάνει, ή μήπως χρειάζεστε μνήμη 32 MB στα 3200 MHZ;

■

Δυαδικοί Αριθμοί

Υπάρχει μία βάση που παίζει καθοριστικό ρόλο στην σύγχρονη τεχνολογία, και αυτή είναι φυσικά η βάση $b = 2$. Οι αριθμοί στην βάση αυτή ονομάζονται **δυαδικοί αριθμοί** (binary numbers) . Η σημασία τους έγκειται στο γεγονός ότι οι **επεξεργαστές** (processors) στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές είναι στην πραγματικότητα ένα σύνολο από πολλούς μικροσκοπικούς και πολύ γρήγορους "διακόπτες" που έχουν δύο θέσεις (states): ON και OFF. Το γνωστό μας **ON/OFF** σύμβολο δεξιά είναι ένα αμάλγαμα του 0(OFF) και του 1(ON).

Πριν όμως έρθουμε στην σύγχρονη χρήση των δυαδικών αριθμών, ας συζητήσουμε σύντομα πρώτα την σημασία τους μέσα στην ιστορία των ανθρώπινων κοινωνιών. Οι μαθητές στο Δημοτικό σχολείο ονομάζουν τον πίνακα του πολλαπλασιασμού του 10, **Πίνακα της Προπαίδειας**. Ο λόγος που έχει αυτό το όνομα είναι ότι ο πίνακας αυτός μαζί με την

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

εκμάθηση της αλφαβήτου αποτελούν την βάση για την περαιτέρω εκπαίδευση των μικρών μαθητών. Μέχρι πρόσφατα στον δυτικό κόσμο και ακόμα και σήμερα στις αναπτυσσόμενες χώρες, η συντριπτική πλειοψηφία των ανθρώπων ήταν/είναι **αναλφάβητοι** και **αναρίθμητοι**. Πώς μπορεί κάποιος που δεν ξέρει την Προπαίδεια του 10 να κάνει πράξεις; Η απάντηση είναι να τις κάνει σε ένα σύστημα που ο πίνακας του πολλαπλασιασμού είναι πολύ απλός. Ο απλούστερος δυνατός πίνακας είναι αυτός του δυαδικού συστήματος: $0 \times 0 = 0$, $0 \times 1 = 0$, $1 \times 0 = 0$, και $1 \times 1 = 1$.

Στο σχολείο μάθαμε ότι:

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times\ 17 \\ \hline 315 \\ +\ 45 \\ \hline 765 \end{array}$$

Οι αναλφάβητοι και αναρίθμητοι αγρότες στον Μεσαίωνα χρησιμοποιούσαν τον παρακάτω αλγόριθμο για τον πολλαπλασιασμό.

Ο Αλγόριθμος του Ρώσου Χωρικού

		Με Υπόλοιπο	*Χωρίς Υπόλοιπο*
45	Υ	17	
22			34
11	Υ	68	
5	Υ	136	
2			272
1	Υ	544	
		765	

Η δυαδική φύση του αλγόριθμου μπορεί να γίνει αντιληπτή εύκολα αν γράψουμε

$$\begin{aligned}(45)(17) &= (1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2 + 1)(17)\\ &= 2^5\cdot 17 + 0\cdot 17 + 2^3\cdot 17 + 2^2\cdot 17 + 0\cdot 17 + 1\cdot 17\\ &= \text{διπλ.το } 17 \ 5 \text{ φορές} + \text{διπλ.το } 17 \ 3 \text{ φορές} + \text{διπλ.το } 17 \ 2 \text{ φορές} + 17\\ &= 544 + 0 + 136 + 68 + 0 + 17 = 765.\end{aligned}$$

Με λόγια, ο αλγόριθμος αυτός μας λέει: Δίνονται δύο αριθμοί και ζητείται το γινόμενό τους. Λάβε οποιονδήποτε από τους δύο αριθμούς και γράψτον στην δυαδική του μορφή (δηλ. ως δυνάμεις του 2). Μετά διπλασίασε τον δεύτερο αριθμό σύμφωνα με την δυαδική μορφή του πρώτου, και τέλος άθροισε τα αποτελέσματα για να λάβεις το γινόμενο.

1.12 Αριθμοί στους Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές

Σε μια επιστολή με ημερομηνία 26 Φεβρουαρίου 1701, ο Γερμανός μαθηματικός **Gottfried Wilhelm Leibniz** γράφει:

"Επισυνάπτω μια προσπάθεια να κατασκευάσω ένα αριθμητικό σύστημα που μπορεί να αποδειχθεί εντελώς νέο. Εν συντομία, είναι κάπως έτσι. Χρησιμοποιώντας ένα δυαδικό σύστημα που βασίζεται στον αριθμό 2 αντί για το δεκαδικό σύστημα που βασίζεται στον αριθμό 10, μπορώ να γράψω όλους τους αριθμούς σε όρους 0 και 1. Το έκανα όχι μόνο για χρηστικούς λόγους, αλλά για να βοηθήσω να γίνουν νέες ανακαλύψεις. [...] Αυτό το σύστημα μπορεί να οδηγήσει σε νέες πληροφορίες που θα ήταν δύσκολο να αποκτηθούν με οποιονδήποτε άλλο τρόπο."

Gottfried Wilhelm Leibniz $(1646 - 1716)$

Στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές, κάθε πραγματικός αριθμός x προσεγγίζεται από έναν κλασματικό αριθμό r, ο οποίος ονομάζεται **αριθμός κινητής υποδιαστολής** (floating point number). Κάθε αριθμός κινητής υποδιαστολής r αποθηκεύεται με τα εξής δεδομένα:

1. την απόλυτη τιμή $|r|$ του r, οριζόμενη ως ένας ακέραιος ο οποίος ονομάζεται **μαντίσα** (mantissa) M και αποτελείται από έναν προκαθορισμένο αριθμό m ψηφίων d_i στο σύστημα αριθμών με βάση b,

2. το πρόσημο s του r, και

3. τον ακέραιο εκθέτη e στο σύστημα αριθμών με βάση b.

Με αυτά τα δεδομένα, κάθε floating-point αριθμός αναπαριστάται ως

$$r = s\, M\, b^{e-m+1} = s\,\{d_1 d_2 ... d_m\}\, b^{e-m+1},$$

όπου d_1 είναι το πιο σημαντικό και d_m το λιγότερο σημαντικό ψηφίο της mantissa M. Μπορούμε να σκεφτούμε το s ως έναν ακέραιο που παίρνει τις τιμές $s = +1$ για $r \geq 0$ και $s = -1$ για $r < 0$. Εσωτερικά, το πρόσημο s καταλαμβάνει μόνο ένα “bit”, που είναι και η βασική αποθηκευτική μονάδα. Ένα **bit** μπορεί να λάβει δύο θέσεις (0/1, ή ON/OFF), δηλαδή ακριβώς αυτό που χρειάζεται για να ορίσουμε ένα πρόσημο ή ένα ψηφίο d_i στο **δυαδικό σύστημα** $b = 2$.

Ο αριθμός κινητής υποδιαστολής ονομάζεται κανονικοποιημένος (normalized) αν το σημαντικότερο ψηφίο του d_1 είναι διάφορο του μηδενός. Ένας κανονικοποιημένος αριθμός r με εκθέτη $e = 0$ έχει τιμή $1 \leq |r| < b$. Η ακρίβεια κάθε συγκεκριμένου περιβάλλοντος αριθμητικής κινητής-υποδιαστολής μετράται από τον μικρότερο αριθμό ϵ_m ο οποίος όταν προστεθεί σε ένα αριθμό r δίνει αριθμό κινητής-υποδιαστολής $r' \neq r$. Προσεγγιστικά μιλώντας, το ϵ_m είναι η αριθμητική τιμή του λιγότερου σημαντικού ψηφίου d_m ενός αριθμού r με $|r| \approx 1$ και εκθέτη $e_r = -1$:

$$\epsilon_m = 1 \times b^{-m+1}.$$

Τα περισσότερα προγραμματιστικά συστήματα που χρησιμοποιούνται σήμερα βασίζονται στο **περιβάλλον διπλής ακρίβειας** (double precission) της **FORTRAN**, για το οποίο

$$b = 2 \quad \text{και} \quad m = 53,$$

πράγμα που σημαίνει ότι (παρακρατώντας ένα ψηφίο από τα 53 για το πρόσημο s του αριθμού)[14]

$$\epsilon_m = 2^{-52} \approx 2.22 \times 10^{-16}.$$

Λέμε ότι ένας πραγματικός αριθμός είναι αποθηκευμένος με **διπλή ακρίβεια** (double precission) αν και τα **16 δεκαδικά** χρησιμοποιούνται σε κάθε πράξη, και με **μονή ακρίβεια** (single precession) αν χρησιμοποιούνται μόνο τα **8 δεκαδικά**. Ένας αριθμός 8 δεκαδικών (single precission number) ονομάζεται **byte** (1 byte = 8 bits), και η μονάδα αυτή χρησιμοποιείται για την μέτρηση των αποθηκευτικών αναγκών αρχείων (files) σε γλώσσα μηχανής. Έτσι ένα **kylobyte** (KB) είναι η μνήμη που απαιτείται για την αποθήκευση χιλίων αριθμών μονής ακρίβειας, και ένα **megabyte** (MB) είναι η μνήμη που απαιτείται για την αποθήκευση ενός εκατομμυρίου αριθμών μονής ακρίβειας. Παρομοίως, ένα **gigabyte** (GB) είναι η μνήμη που απαιτείται για την αποθήκευση ενός δισεκατομμυρίου αριθμών μονής ακρίβειας, και ένα **terabyte** (TB) ενός τρισεκατομμυρίου αριθμών μονής ακρίβειας[15].

Για παράδειγμα, ας γράψουμε τον αριθμό $-\sqrt{2}$ σε γλώσσα μηχανής. Χρησιμοποιώντας $e_r = -1$ και το δυαδικό σύστημα, ο αριθμός $-\sqrt{2}$ εκφράζεται με διπλή ακρίβεια ως

$$\begin{aligned} -\sqrt{2} &\approx -1.414213562373095 \\ &= \underbrace{-1}_{1\ \text{ψηφίο}} \cdot \{\underbrace{14142135623730950}_{16\ \text{ψηφία}}\} \cdot 10^{-15} \\ &= \underbrace{-1}_{1\ \text{ψηφίο}} \cdot \{\underbrace{1100100011111000110010100010100011011111000111000010}_{52\ \text{ψηφία}}\} \cdot 2^{-51}, \end{aligned}$$

---

[14]Έχουμε $10 \approx 2^{3.322}$, οπότε $10^{-16} \approx (2^{3.322})^{-16} = 2^{-53.152} = 2^{-1.152} \times 2^{-52}$. Άρα, $2^{-52} \approx 2^{1.152} \times 10^{-16} \approx 2.22 \times 10^{-16}$.

[15]Έχουμε, 1 δις = χίλια εκατομμύρια., και 1 τρις = χίλια δις.

σε σύνολο 53 ψηφίων. Ο υπολογιστής αποθηκεύει τον αριθμό $-\sqrt{2}$ με διπλή ακρίβεια ως (το πρόσημο (-1) είναι το 1 στην αρχή) [16]

$$1\underbrace{110010001111110001100101000101000110111111000111000010}_{53 \text{ ψηφία}}.$$

Ο παρακάτω κώδικας στο **R** κάνει τους απαραίτητους υπολογισμούς:

```
dec2bin <- function(fnum) {
bin_vect <- rep(0, 1 + floor(log(fnum, 2)))
while (fnum >= 2) {
pow <- floor(log(fnum, 2))
bin_vect[1 + pow] <- 1
fnum <- fnum - 2^pow
}
bin_vect[1] <- fnum %% 2
paste(rev(bin_vect), collapse = "")
}
```

Για το $\sqrt{2}$ ο κώδικας μας δίνει:

```
> sqrt(2)
[1] 1.414214
> dec2bin(10^16*sqrt(2))
[1] "11001000111111000110010100010100011011111100011100001000"
```

1.13 Δυνάμεις και Λογάριθμοι

Ας θεωρήσουμε τον παρακάτω πίνακα δυνάμεων του 2,

---

[16]Σε **32-bit IEEE-754 format** ο αριθμός $-\sqrt{2}$ αποθηκεύεται ως

$$10111111101101010000010011110011$$

Το 1 μπροστά είναι το πρόσημο (-1). Τα επόμενα 8 bits είναι ο εκθέτης με 127 bias, και αφού $01111111_2 = 127_{10}$ έχουμε 2^0, και τέλος τα τελευταία 23 bits είναι 1.0 συν 0.5 από το bit 23, συν 0.25 από το bit 22 κτλ. ως εξής:

$$\begin{aligned} 1 &+ 1/4 + 1/8 + 1/32 + 1/128 + 1/8192 + 1/65536 + 1/131072 + 1/262144 + 1/524288 \\ &+ 1/4194304 + 1/8388608 = 1.41421353816986083984375. \end{aligned}$$

y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^y	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

και ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το γινόμενο $8 \times 16 = 128$. Αντί να κάνουμε τον πολλαπλασιασμό με τον τρόπο που μάθαμε στο σχολείο, σκεφτόμαστε ότι $8 = 2^3$ και $16 = 2^4$, οπότε $8 \times 16 = 2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$. Αντί λοιπόν να πολλαπλασιάσουμε τους αριθμούς, γράψαμε τους αριθμούς ως δυνάμεις του 2 και προσθέσαμε τους εκθέτες.

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι για να πολλαπλασιάσουμε δύο αριθμούς στην δεύτερη σειρά, μπορούμε να αθροίσουμε τους αντίστοιχους αριθμούς στην πρώτη, και να βρούμε τον αντίστοιχο του αθροίσματος στην δεύτερη. Έτσι για να βρούμε το γινόμενο $4 \times 16 = 64$, προσθέτουμε $2 + 4 = 6$, βλέπουμε ότι το 6 στην πρώτη γραμμή αντιστοιχεί στο 64 στην δεύτερη, και αυτό είναι το γινόμενο που ψάχναμε.

Με αντίστοιχο τρόπο μπορούμε να κάνουμε και διαίρεση. Για να υπολογίσουμε τον λόγο $1024/128 = 8$, βρίσκουμε την διαφορά $10 - 7 = 3$, και μετά βλέπουμε ότι το 3 στην πρώτη γραμμή αντιστοιχεί στο 8 στην δεύτερη, που είναι και ο λόγος που ψάχναμε.

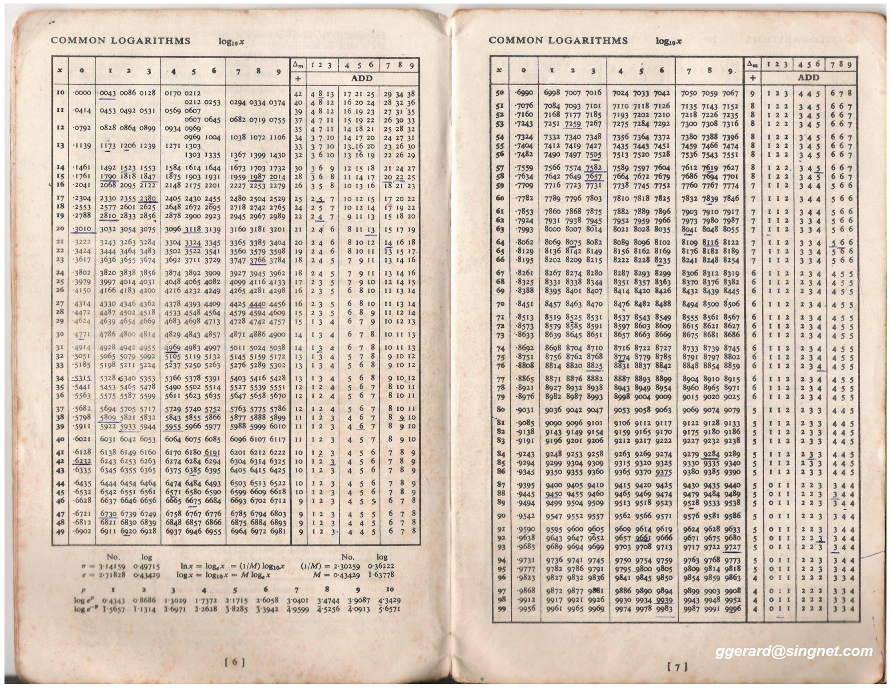
Αν θέσουμε $x = 2^y$ τότε ο αριθμός $y = \log_2 x$ ονομάζεται **λογάριθμος με βάση 2** του x. Έτσι, $\log_2 2 = 1$, $\log_2 4 = 2$, $\log_2 8 = 3, \ldots$ κ.ο.κ., διαβάζοντας τον παραπάνω πίνακα ανάποδα. Ο αριθμός x ονομάζεται **αντιλογάριθμος στην βάση *b*** του y. Π.χ. το 4 είναι ο λογάριθμος του 16 στην βάση 2, και το 16 είναι ο αντιλογάριθμος του 4 στην βάση 2.

Λαμβάνοντας έναν πραγματικό αριθμό $b > 0$, $b \neq 1$, ως βάση, **έπεται από την πληρότητα των πραγματικών αριθμών** ότι μπορούμε να βρούμε πάντα $y \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $x = b^y$. Ο αριθμός y ονομάζεται **λογάριθμος του** x **στην βάση *b***.

1.44 Ορισμός Για πραγματικό αριθμό $b > 0$, $b \neq 1$ ο οποίος ονομάζεται **βάση του λογαρίθμου**, ορίζουμε τον **λογάριθμο στη βάση *b*** του πραγματικού αριθμού x, $y = \log_b x$, ως τον αριθμό y για τον οποίο $b^y = x$. Ο αριθμός x ονομάζεται **αντιλογάριθμος στην βάση *b*** του y.

Η πληρότητα των πραγματικών αριθμών μας λέει π.χ. ότι υπάρχουν αριθμοί ανάμεσα στο 5 και το 6 τέτοιοι ώστε όταν τους λάβουμε ως δυνάμεις του 2 να μας δίνουν αριθμούς ανάμεσα στο 32 και το 64. Για παράδειγμα, $\log_2 20 = 4.32192809...$, ένας άρρητος αριθμός ανάμεσα στο 4 και το 5, αφού το 20 είναι ανάμεσα στο 16 και το 32. Το πώς ακριβώς υπολογίζουμε τον αριθμό αυτό θα μας απασχολήσει αργότερα, όταν μιλήσουμε για πολυωνυμικές προσεγγίσεις υπερβατικών συναρτήσεων.

Πριν την έλευση, πρώτα των μηχανικών και μετά των ηλεκτρονικών υπολογιστών τον 20ο αι., οι υπολογισμοί (σε επιχειρήσεις, τράπεζες, υπουργεία κ.α.) γίνονταν με το χέρι από υπαλλήλους που ονομάζονταν **υπολογιστές** (computers) ή απλώς λογιστές. Οι λογάριθμοι ήταν πολύ χρήσιμοι σ'αυτούς τους υπαλλήλους, αφού υποκαθιστούν τον πολλαπλασιασμό με



Γράφημα 1.2: Βιβλίο Λογαρίθμων για την διευκόλυνση των αριθμητικών πράξεων.

την πρόσθεση, και την διαίρεση με την αφαίρεση. Αντί να διαιρέσει κανείς δύο μεγάλους αριθμούς, (α) λαμβάνει τους λογαρίθμους των δύο αριθμών από το **Βιβλίο Λογαρίθμων** και υπολογίζει την διαφορά των λογαρίθμων τους, και (β) βρίσκει τον αντιλογάριθμο της διαφοράς στο Βιβλίο Λογαρίθμων και έχει το πηλίκο που έψαχνε. Αφού η αφαίρεση είναι πολύ ευκολότερη πράξη από την διαίρεση, η διαδικασία αυτή κάνει τον υπολογισμό του πηλίκου πολύ ευκολότερη.

Ιδιότητες δυνάμεων. Για $a, b \in \mathbb{R}$ και $m, n \in \mathbb{Z}$ έχουμε

1. $a^m a^n = a^{m+n}$ **2.** $(a^m)^n = a^{mn}$ **3.** $(ab)^m = a^m b^m$

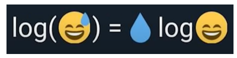
4. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$ **5.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}, b \neq 0$ **6.** $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}, a \neq 0$

7. $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ **8.** $a^0 = 1, a \neq 0$ **9.** $a^{m/n} - \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

Ιδιότητες Λογαρίθμων. Για $x, y \in \mathbb{R}$ και πραγματικό $b > 1$ έχουμε

1. $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$ **2.** $\log_b \dfrac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$ **3.** $\log_b x^y = y \log_b x$

4. $\log_b b^x = x$ **5.** $b^{\log_b x} = x$.



Στο Λύκειο μαθαίνουμε τους **δεκαδικούς λογαρίθμους**, δηλ. λογάριθμους στην βάση $b = 10$. Όπως θα δούμε, η "φυσική" βάση των λογαρίθμων είναι ο άρρητος αριθμός

$$e \approx 2.71828\ldots.$$

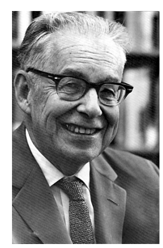
Το γραμμα e είναι προς τιμήν του μεγάλου Ελβετού μαθηματικού Leonhard Euler (1707-1783), και ονομάζεται **αριθμός του Euler**. Λογάριθμοι στην βάση e ονομάζονται **φυσικοί λογάριθμοι** και γράφονται ως

$$\ln x = \log_e x.$$

Εκτός από το σύμβολο **ln**, οι φυσικοί λογάριθμοι θα συμβολίζονται και απλώς με **log χωρίς βάση**. Έτσι, $\log_{10} x$ είναι ο δεκαδικός λογάριθμος του x, ενώ $\log x$ είναι ο φυσικός λογάριθμος του 10: **όταν η βάση παραλείπεται, εννοείται η βάση $b = e$**.

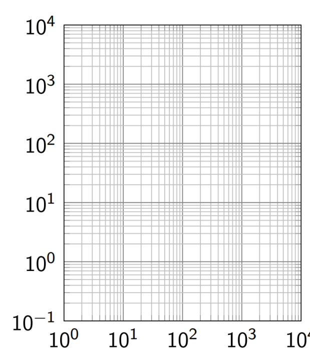
Παράδειγμα 15. **(Λογαριθμικά Γραφήματα / Σεισμοί)**

Ο Αμερικανός σεισμολόγος και φυσικός **Charles Francis Richter** (1900 – 1985), δημιουργός της κλίμακας Ρίχτερ για την μέτρηση του μεγέθους των σεισμικών δονήσεων, είχε πει ότι "τα λογαριθμικά γραφήματα είναι πράγμα του διαβόλου" ("logarithmic plots are a device of the devil").

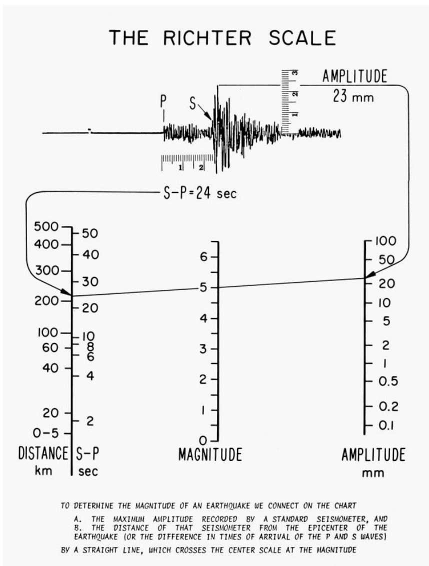


Την δεκαετία του 1930, ο Charles Richter ήθελε να δημιουργήσει μία κλίμακα για την μέτρηση των σεισμών. Ένας σεισμός χαρακτηρίζεται από το πλάτος των σεισμικών δονήσεων (shaking amplitude) A που καταγράφει ο σεισμογράφος, και την απόσταση D του σεισμογράφου από το επίκεντρο της δόνησης. Αν κανείς προσπαθήσει να απεικονίσει σε ένα γράφημα το A ως συνάρτηση του D, τότε θα απογοητευτεί καθώς η σχέση τους είναι ακραία μη-γραμμική, τόσο πολύ που το γράφημα δεν "χωράει" στο ίδιο γράφημα τους μικρούς και τους μεγάλους σεισμούς.

Αυτό συμβαίνει γιατί οι αριθμοί που προσπαθούμε να απεικονίσουμε διαφέρουν πάρα πολύ μεταξύ τους, δηλαδή οι μεγαλύτεροι αριθμοί στα στοιχεία μας είναι εκατοντάδες, χιλιάδες ή και εκατομμύρια φορές μεγαλύτεροι από τους μικρότερους αριθμούς στα στοιχεία μας. Αν όμως αντί για A



κανείς λάβει το $\log_{10} A$, και αντί για D λάβει $\log_{10} D$ τότε θα δει ότι, "μαγικά", η σχέση των νέων μεταβλητών γίνεται γραμμική, δηλαδή οι παρατηρήσεις από ιστορικές τιμές διασπείρονται γύρω από μία ευθεία γραμμή, σε ένα γράφημα στο οποίο "χωρούν" και οι μικροί και οι μεγάλοι σεισμοί πολύ όμορφα.



Ξεκινώντας από αυτή την παρατήρηση, οι Charles Richter και Beno Gutenberg δημιούργησαν την γνωστή σε όλους μας κλίμακα Ρίχτερ για την μέτρηση των σεισμών. Η κλίμακα είναι λογαριθμική με βάση το 10, κάτι που σημαίνει ότι ένας σεισμός 5 βαθμών της κλίμακας Ρίχτερ έχει 10 φορές μεγαλύτερο πλάτος δόνησης A, από ένα σεισμό 4 βαθμών. Αντίστοιχα, ένας σεισμός 7 βαθμών έχει $100 = 10^2$ μεγαλύτερο πλάτος δόνησης, από ένα σεισμό 5 βαθμών. Σεισμοί μεγέθους 2 και 3 είναι δεν καν αισθητοί, ενώ σεισμοί μεγέθους 6 και 7 προκαλούν από μεγάλες ως και τεράστιες καταστροφές. Η κλίμακα φτάνει ως το 10, καθώς ένας σεισμός 10 βαθμών θα ήταν το τέλος του κόσμου! Ο μεγαλύτερος σεισμός που έχει καταγραφεί ήταν ο σεισμός 8.3 βαθμών που έγινε Σαν Φρανσίσκο το 1906. Στην Ελλάδα ο μεγαλύτερος καταγεγραμμένος σεισμός έγινε το 1981, είχε επίκεντρο στον Κορινθιακό Κόλπο, και μέγεθος 6.7 βαθμούς της κλίμακας Ρίχτερ.

Ίσως θα έχετε παρατηρήσει ότι πολλές φορές οι σεισμολόγοι μαλώνουν για τον εάν ένας σεισμός ήταν, για παράδειγμα, 5.2 ή 5.6 βαθμών.

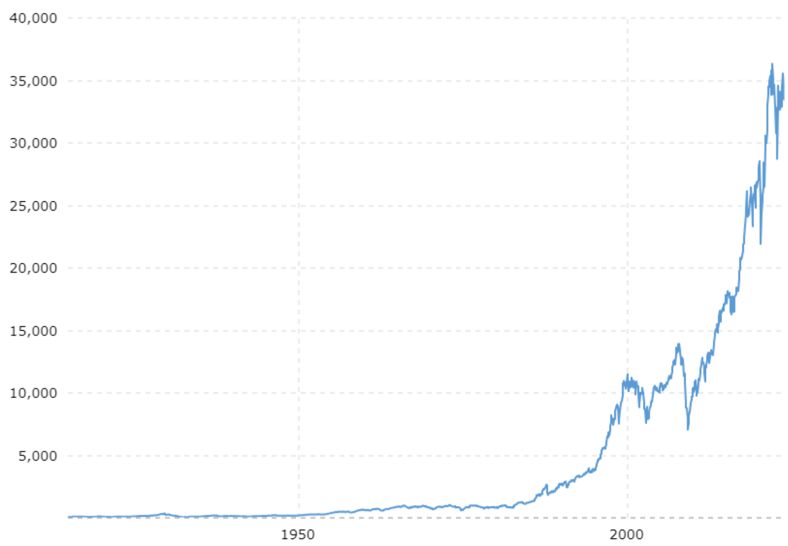
■

Πίνακας 1.2: Μέγεθος σεισμού και περιγραφή της αναμενόμενης ζημιάς.

Βαθμοί Ρίχτερ	Ισοδύναμα κιλά TNT	Περιγραφή
1.0	20	
2.0	600	Smallest quake people can normally feel.
3.0	20 000	Most people near epicenter feel the quake.
4.0	60 000	A small fission atomic bomb.
4.5		Quakes above 4.5 can cause local damage.
5.0	20 000 000	A standard fission bomb, similar to the first atomic bomb.
6.0	60 000 000	A hydrogen bomb. Athens, Sep.7, 1999, 6.0 quake.
6.7		Athens Feb. 24, 1981, 6.7 quake. Great damage locally.
7.0	20 billion	Major earthquake.
7+		Occurs about once every 14 years.
7.5		Enough energy to heat New York City for a year.
7.8		Large enough to be detected all over globe.
8.0	60 billion	San Francisco destroyed by 8.3 in 1906.
8.9		Largest recorded: 8.9 in Japan and in Chile/Ecuador.
9.0	20 trillion	Roughly the world’s energy usage in a year.
10+	600+ trillion	There ’ll be noone left to remember it!

Παράδειγμα 16. **(Λογαριθμικά Γραφήματα / Χρηματιστήριο)**

Γράφημα 1. Dow Jones Industrial Average (DJIA), 1915-1923.
(Τρέχουσες Τιμές)



Στο Γράφημα 1 βλέπουμε τις τιμές του δείκτη Dow Jones Industrial Average (DJIA) τα τελευταία 100 χρόνια (1915-2023). Το γράφημα αυτό έχει δύο προβλήματα. Το πρώτο είναι ότι είναι σε τρέχουσες τιμές, δηλαδή συγκρίνουμε δολάρια του 1915 με δολάρια του 1950, 2000, και 2023, δηλαδή εντελώς ανόμοια πράγματα. Ακόμα και η μεγάλη κρίση (Great Depression) του 1929-1932 δεν φαίνεται σχεδόν καθόλου!

Γράφημα 2. Dow Jones Industrial Average (DJIA), 1915-1923.
(Αποπληθωρισμένες Τιμές)

Στο Γράφημα 2 βλέπουμε τον αποπληθωρισμένο δείκτη, οπότε τώρα συγκρίνουμε σταθερά δολάρια του 2020. Όμως και το γράφημα αυτό έχει το πρόβλημα ότι δεν φαίνονται καθαρά οι κρίσεις. Η μεγάλη κρίση του 1929-1932 μοιάζει μικρή σε σχέση με την κρίση του 2007-2009 και τις κρίσεις του 2020 και 2021-2022.

Γράφημα 3. Dow Jones Industrial Average (DJIA), 1915-1923.
(Αποπληθωρισμένες Τιμές / Λογαριθμικό Γράφημα)

Το Γράφημα 3 είναι το σωστό γράφημα. Σε αυτό, πέρα από το ότι έχουμε τις αποπληθωρισμένες τιμές, ο κάθετος άξονας είναι σε λογαριθμική κλίμακα, οπότε φαίνονται καθαρά οι **σχετικές μεταβολές** σε κάθε περίοδο. Στο Μεγάλο Κράχ του 1930, η πτώση ήταν της τάξης του 90%, ενώ η πτώση στην μεγάλη κρίση του 2007 (Subprime Mortgage Crisis) ήταν 50%. Οι πιο πρόσφατες κρίσεις (Covid-19, Πόλεμος στην Ουκρανία) είναι ακόμα μικρότερες.

Συγκρίνεται τα τρία γραφήματα, και βεβαιωθείτε ότι καταλαβαίνετε ακριβώς τι απεικονίζει το καθένα και γιατί το Γράφημα 3 είναι ο σωστός τρόπος να παρουσιαστεί η **Χρηματιστηριακή Ιστορία των ΗΠΑ**. ■

1.14 Μιγαδικοί Αριθμοί

Μία από τις βασικότερες εφαρμογές των μαθηματικών στις θετικές επιστήμες είναι η επίλυση εξισώσεων και συστημάτων εξισώσεων.

1.45 Ορισμός Μία έκφραση της μορφής

$$f(x) = 0$$

όπου $f : X \to Y$ κάποια συνάρτηση, ονομάζεται **εξίσωση** (equation) και η τιμή του x που την ικανοποιεί x^* ονομάζεται **λύση** (solution) ή **ρίζα** (root) της εξίσωσης. Η τιμή x^* ονομάζεται και **μηδέν** (zero) της συνάρτησης f.

Παράδειγμα 17. Η εξίσωση

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

έχει δύο πραγματικές ρίζες $x_1^* = 1$ και $x_2^* = 2$, καθώς για αυτές τις τιμές η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 2$ μηδενίζεται. ■

Το πρόβλημα με την επίλυση εξισώσεων είναι ότι **κάποιες εξισώσεις δεν έχουν καμία λύση στους πραγματικούς αριθμούς** $\mathbb{R}$. Η πιο διάσημη τέτοια εξίσωση είναι η εξίσωση

$$x^2 + 1 = 0.$$

Αφού το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι ένας πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος ίσος του μηδενός, προσθέτοντας την μονάδα παίρνουμε έναν αριθμό μεγαλύτερο ίσο του 1, οπότε η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1$ δεν τέμνει των άξονα των x πουθενά, και άρα **δεν έχει πραγματική ρίζα**.

Κανείς θα μπορούσε να απορρίψει τέτοιες εξισώσεις ως ανοησίες, και να αποφασίσει να αποδέχεται ως καλώς-ορισμένες μόνο εξισώσεις που **έχουν** ρίζες στους πραγματικούς αριθμούς. Και αυτό είναι ακριβώς αυτό που έκαναν οι μαθηματικοί για πολύ αιώνες – εξισώσεις χωρίς πραγματικές λύσεις απορρίπτονταν ως αδύνατες και άρα μη ενδιαφέρουσες.

Για τη διωνυμική εξίσωση

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ξέρουμε ότι οι ρίζες δίνονται από τον τύπο

$$x^* = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Η ποσότητα $\Delta = b^2 - 4ac$ κάτω από την ρίζα ονομάζεται **διακρίνουσα** (discriminant) και **μπορεί να λάβει αρνητικές τιμές**. Ξέρουμε ότι αν

- $\Delta > 0$, έχουμε δύο πραγματικές ρίζες,
- $\Delta = 0$, έχουμε μια (διπλή) πραγματική ρίζα,
- $\Delta < 0$, δεν έχουμε καμία πραγματική ρίζα (όπως θα δούμε, έχουμε δύο μιγαδικές ρίζες).

Τον 16ο αι., ο Ιταλός μαθηματικός **Gerolamo Cardano** (1501-1576) ανακάλυψε μια παρόμοια έκφραση για τις ρίζες της **κυβικής εξίσωσης** (cubic equation)[17]

$$x^3 + px + q = 0,$$

οι οποίες δίνονται από τον τύπο

$$x^* = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Η μπερδεμένη αυτή έκφραση μπορεί να χρησιμοποιηθεί π.χ. για να λύσουμε την εξίσωση

$$x^3 + 6x - 20 = 0.$$

[17] Η γενική κυβική εξίσωση $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ μπορεί πάντα να απλοποιηθεί ώστε να λάβει την μορφή $x^3 + px + q = 0$ για κάποια p και q που εξαρτώνται από τα a, b, c, d της γενικής μορφής.

Θέτοντας $p = 6$ και $q = -20$, βρίσκουμε την (τριπλή) ρίζα

$$
\begin{aligned}
x^* &= \sqrt[3]{-\frac{-20}{2} + \sqrt{\frac{(-20)^2}{4} + \frac{6^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{-20}{2} - \sqrt{\frac{(-20)^2}{4} + \frac{6^3}{27}}} \\
&= \sqrt[3]{10 + \sqrt{\frac{400}{4} + \frac{216}{27}}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{\frac{400}{4} + \frac{216}{27}}} \\
&= \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}} \\
&= \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}} \\
&= 1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} \qquad \left[\text{γιατί } (1+\sqrt{3})^3 = 10 + 6\sqrt{3}\right] \\
&= 2,
\end{aligned}
$$

η οποία πράγματι μηδενίζει την συνάρτηση $x^3 + 6x - 20$.

Λίγο αργότερα από τον Cardano, ο επίσης Ιταλός μαθηματικός **Rafael Bombelli** (1526-1572) μελέτησε την κυβική εξίσωση

$$x^3 - 15x - 4 = 0.$$

Αν εφαρμόσουμε τον τύπο του Cardano για $p = -15$ και $q = -4$, παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
x^* &= \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} + \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} - \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}} \\
&= \sqrt[3]{2 + \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{-3375}{27}}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{-3375}{27}}} \\
&= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.
\end{aligned}
$$

Λαμβάνουμε λοιπόν την ρίζα αρνητικού αριθμού. Η εμπειρία μας με την τετραγωνική εξίσωση μας λέει ότι τέτοιες εξισώσεις δεν έχουν πραγματικές ρίζες. Ο Bombelli, όμως, παρατήρησε ότι αν δεχτούμε την ρίζα αρνητικών αριθμών και **συνεχίσουμε την αλγεβρική επεξεργασία** της παραπάνω έκφρασης, έχουμε ότι

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121},$$

οπότε

$$x^* = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4.$$

Ο **φανταστικός αριθμός** $\sqrt{-1}$, λοιπόν, ακυρώνεται, και παίρνουμε την (τριπλή) πραγματική ρίζα $x^* = 4$, η οποία πράγματι μηδενίζει την συνάρτηση $x^3 - 15x - 4$ **(!!!)**. Φυσικά, ο Bombelli ήξερε ότι το 4 είναι ρίζα του πολυωνύμου του, αφού θα το είχε διαλέξει ώστε να ξέρει εκ των προτέρων ότι έχει μοναδική ρίζα και αυτή είναι κάποιος απλός αριθμός όπως το 4. Το σημαντικό σημείο είναι ότι **η παραπάνω 'άκριτη' αλγεβρική επεξεργασία εκφράσεων, το νόημα των οποίων δεν κατανοούμε πλήρως, βρίσκει την σωστή ρίζα (!!!)**.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι το φαινόμενο που παρατήρησε ο Bombelli είναι γενικό, μπορεί δηλαδή να αποδειχθεί ότι:

Η αλγεβρική επεξεργασία εκφράσεων που περιέχουν μιγαδικούς αριθμούς, αν γίνει με βάση συγκεκριμένους φυσικούς και απλούς κανόνες που θα ορίσουμε αμέσως παρακάτω, ΔΕΝ ΟΔΗΓΕΙ ΠΟΤΕ ΣΕ ΑΤΟΠΟ. Πιο τεχνικά λέμε ότι, οι μιγαδικοί αριθμοί $\mathbb{C}$ με τις πράξεις $+$ και $\cdot$ που θα ορίσουμε αμέσως παρακάτω, είναι ένα πλήρες (μη-διατεταγμένο) σώμα $\{\mathbb{C}, +, \cdot\}$, που περιέχει το πλήρες (διατεταγμένο) σώμα των πραγματικών αριθμών $\{\mathbb{R}, +, \cdot\}$ ως υποσώμα.

1.46 Ορισμός Ένας **μιγαδικός αριθμός** z ορίζεται ως το διατεταγμένο ζεύγος

$$z = (x, y),$$

όπου x και y είναι πραγματικοί αριθμοί. Ο μιγαδικός αριθμός $(x, 0)$ ταυτίζεται με τον πραγματικό αριθμό x. Ο μιγαδικός αριθμός $(0, y)$ ονομάζεται **φανταστικός αριθμός** (imaginary numbers). Το $(x, 0)$ ονομάζεται **πραγματικό μέρος** του z, και το $(0, y)$ ονομάζεται **φανταστικό μέρος** του z, και γράφουμε $x = \mathrm{Re}(z)$ και $y = \mathrm{Im}(z)$. Ορίζουμε τον φανταστικό αριθμό $i = (0, 1)$, και ο φανταστικός αριθμός $(0, y)$ ταυτίζεται με τον αριθμό iy. Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών συμβολίζεται ως $\mathbb{C}$.

1.47 Ορισμός Το άθροισμα και το γινόμενο δύο μιγαδικών αριθμών $z_1 = (x_1, y_1)$ και $z_2 = (x_2, y_2)$ ορίζονται ως

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, y_1 x_2 + x_1 y_2)$$

Ο αριθμός i ικανοποιεί την εξίσωση $z^2 + 1 = 0$ καθώς, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό,

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

και άρα

$$i^2 + 1 = -1 + 1 = 0.$$

Χρησιμοποιώντας τον φανταστικό αριθμό i μπορούμε να γράψουμε κάθε μιγαδικό αριθμό

z ως

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1)(0, y) = x + iy.$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο $z = x + iy$ για να γράφουμε τους μιγαδικούς αριθμούς, το άθροισμα δύο μιγαδικών είναι απλώς

$$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

ενώ το γινόμενο είναι απλώς

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1), \end{aligned}$$

το οποίο συμφωνεί με τον ορισμό του γινομένου παραπάνω.

Παράδειγμα 18. Για τον αριθμό $z_1 = 2 + 6i$, $\mathrm{Re}(z_1) = 2$ και $\mathrm{Im}(z_1) = 6$. Για τον αριθμό $z_2 = 5 - 2i$, $\mathrm{Re}(z_1) = 5$ και $\mathrm{Im}(z_1) = -2$. Το άθροισμά τους είναι

$$z_1 + z_2 = (2 + 6i) + (5 - 2i) = 7 + 4i$$

και το γινόμενό τους είναι

$$z_1 z_2 = (2 + 6i)(5 - 2i) = 10 - 4i + 30i - 12(-1) = 22 + 26i.$$

■

Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = (x, y)$, υπάρχει ο μοναδικός **προσθετικός αντίστροφός** του

$$-z = (-x, -y),$$

για τον οποίο ισχύει $z + (-z) = 0$. Οι προσθετικοί αντίστροφοι χρησιμοποιούνται για να οριστεί η πράξη της αφαίρεσης μιγαδικών αριθμών $z_1 - z_2$ ως $z_1 + (-z_2)$. Έτσι, για $z_1 = (x_1, y_1) = x_1 + iy_1$ και $z_2 = (x_2, y_2) = x_2 + iy_2$,

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (x_1, y_2) - (x_2, y_2) \\ &= (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \\ &= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \end{aligned}$$

Παρομοίως, για κάθε *μη-μηδενικό* μιγαδικό αριθμό $z = (x, y)$ υπάρχει μοναδικός **πολλαπλασιαστικός αντίστροφος** z^{-1}, για τον οποίο $zz^{-1} = 1$. Ο πολλαπλασιαστικός αντίστροφος είναι λιγότερο προφανής από τον προσθετικό αντίστροφο, και για να τον βρούμε γράφουμε $z^{-1} = (u, v)$ και ψάχνουμε για πραγματικούς αριθμούς u και v ως προς τους πραγματικούς αριθμούς x και y, τέτοιοι ώστε $(x, y)(u, v) = (1, 0)$. Βλέπουμε ότι οι u και v πρέπει να λύνουν το σύστημα των εξισώσεων

$$xu - yv = 1 \quad \text{και} \quad yu + xv = 0.$$

Η λύση είναι

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{και} \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2},$$

οπότε, για $z \neq 0$

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

Άρα, η διαίρεση με ένα μη-μηδενικό μιγαδικό αριθμό ορίζεται ως $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$, και έχουμε ότι για μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = (x_1, y_1)$ και $z_2 = (x_2, y_2) \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

Η πράξη της διαίρεσης απλουστεύεται πολύ με την χρήση συζυγών μιγαδικών αριθμών. Σε αντίθεση με τους πραγματικούς αριθμούς που είναι μοναχικοί, οι μιγαδικοί είναι πάντα ζευγαρωμένοι. [18]

1.48 Ορισμός Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = x + iy$ ορίζουμε τον **συζυγή** του μιγαδικό αριθμό $\bar{z} = x - iy$. Ο πραγματικός αριθμός

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ονομάζεται **απόλυτη τιμή** ή **μέτρο** (modulus) του μιγαδικού αριθμού z.

Αφού,

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} \\ &= \frac{1}{x_2^2 + y_2^2} (z_1 \bar{z}_2) \\ &= \frac{1}{x_2^2 + y_2^2} (x_1, y_1)(x_2, -y_2) \\ &= \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right), \end{aligned}$$

[18] Απόδειξη ότι ο γάμος υπάρχει μόνο στον μιγαδικό κόσμο. Στον πραγματικό κόσμο είμαστε όλοι μόνοι.

μπορούμε να υπολογίζουμε τον λόγο $\frac{z_1}{z_2}$ ως

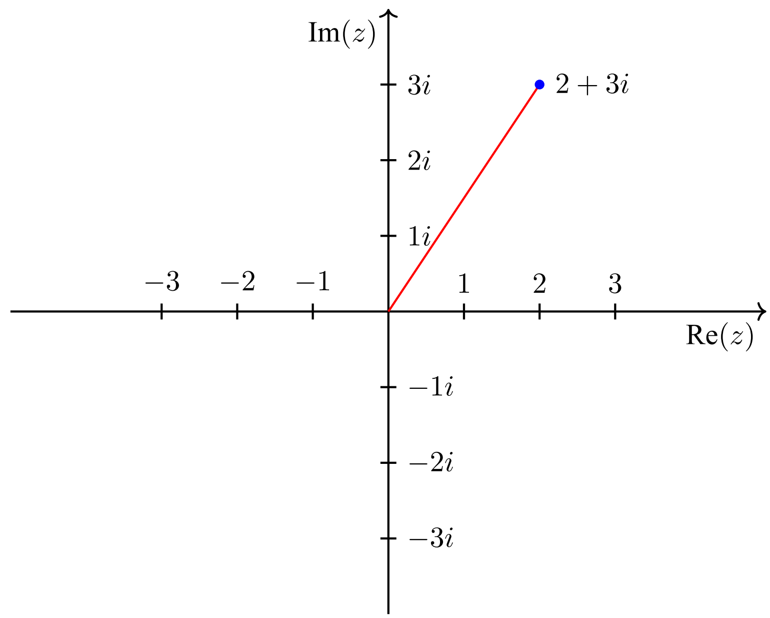
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

Παράδειγμα 19. Έχουμε,

$$\frac{2+6i}{1-2i} = \frac{2+6i}{1-2i}\,\frac{1+2i}{1+2i} = \frac{-10+10i}{5} = -2+2i.$$

■

Είναι φυσικό να συνδέσουμε ένα μιγαδικό αριθμό $z = (x, y)$ με ένα σημείο στο $\mathbb{R}^2$. Στο λεγόμενο **Διάγραμμα του Argand**, ο άξονας των x είναι οι πραγματικοί αριθμοί $\mathbb{R}$, ο άξονας των y είναι οι φανταστικοί αριθμοί $\mathbb{I}$, και κάθε σημείο (x, y) είναι ένας μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$ που αποτελείται από x πραγματικές μονάδες και iy φανταστικές μονάδες. Ο χώρος αυτός ονομάζεται **Μιγαδικό Πεδίο** και συμβολίζεται με $\mathbb{C}$. Πριν την ανακάλυψη των



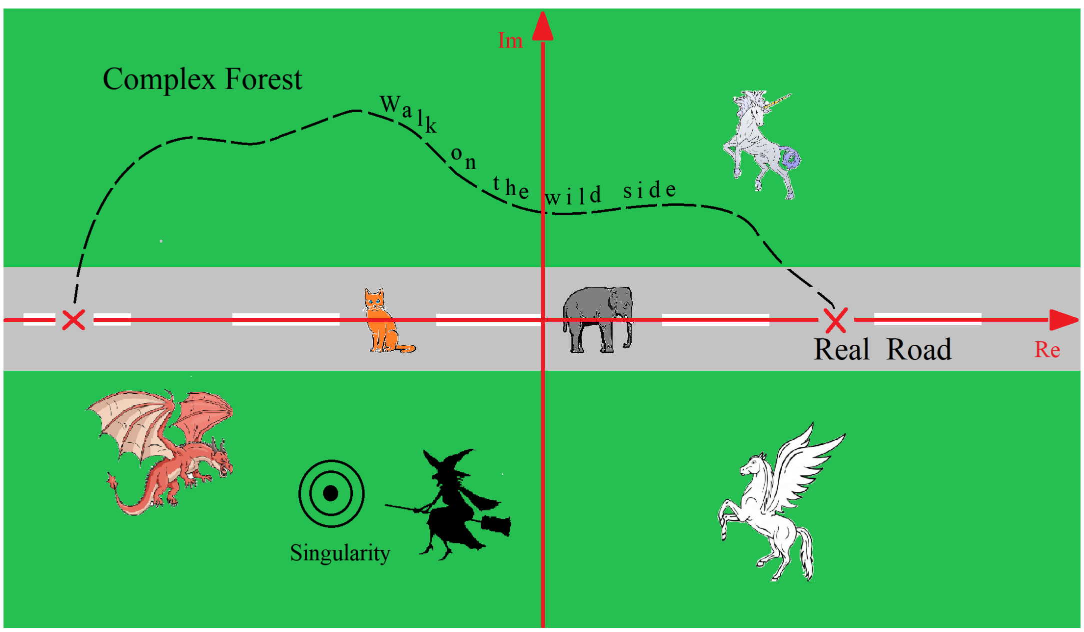
Γράφημα 1.3: Ο μιγαδικός αριθμός $z = 2 + 3i$ στο Διάγραμμα Argand.

μιγαδικών αριθμών **τα μαθηματικά ασφυκτιούσαν δεμένα στον πραγματικό άξονα**. Με την ανακάλυψη του Μιγαδικού Πεδίου, είμαστε πλέον **ελεύθεροι (!)** να κινηθούμε εκτός του άξονα των πραγματικών και να βρούμε "λύσεις" που πριν ήταν "αόρατες". Το σπουδαιότερο αποτέλεσμα αυτής της ελευθερίας είναι το **Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας**, που λέει ότι κάθε πολυώνυμο βαθμού n έχει ακριβώς n μιγαδικές ρίζες, μετρώντας τες με την πολλαπλότητά τους.

Λέγεται συχνά ότι οι μιγαδικοί αριθμοί είναι τόσο "πραγματικοί" όσο είναι και οι πραγματικοί αριθμοί, ή ότι οι μιγαδικοί αριθμοί "υπάρχουν" όσο "υπάρχουν" και οι πραγματικοί αριθμοί. Αυτού του είδους οι διακηρύξεις, **που είναι σωστές αν ερμηνευτούν σωστά**, δημιουργούν σύγχυση σε όσους πρωτοσυναντούν τους μιγαδικούς αριθμούς. Για να καταλάβουμε του μιγαδικούς, ξεκινάμε με το προφανές:

Οι πραγματικοί αριθμοί ΥΠΑΡΧΟΥΝ στον πραγματικό κόσμο, ενώ οι μιγαδικοί αριθμοί ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ στον πραγματικό κόσμο.

Για παράδειγμα, **υπάρχουν** $(\pi + 2) \approx 5.14...$ κιλά αλεύρι, αλλά **δεν υπάρχουν** $(\pi + 2i)$ κιλά αλεύρι.



Αν και οι μιγαδικοί αριθμοί δεν υπάρχουν στον πραγματικό κόσμο, υπάρχουν και είναι τόσο "πραγματικοί" όσο είναι και οι πραγματικοί αριθμοί, στον **νοητό κόσμο της Άλγεβρας**. Ο κόσμος αυτός είναι νοητός, αλλά **ΔΕΝ είναι κατασκεύασμα της φαντασίας μας** – είναι ένας κόσμος που διέπεται από τους αυστηρούς κανόνες της Λογικής, και είναι αυτή ακριβώς η ίδια η Λογική που οδήγησε τους μαθηματικούς των περασμένων αιώνων στην ανακάλυψη (και όχι εφεύρεση) του **νοητού Μιγαδικού Κόσμου**. Καθώς αφήνουμε τον Πραγματικό Άξονα/Δρόμο και περιπλανιόμαστε στο νοητό Μιγαδικό Επίπεδο/Δάσος, έχουμε οδηγό την

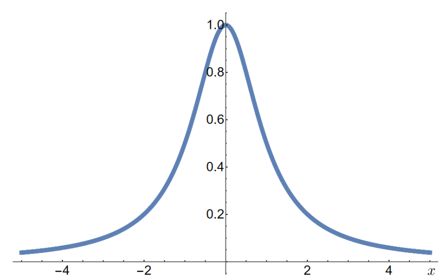
Άλγεβρα, και την Λογική που την διέπει. [19] Στο δάσος αυτό υπάρχουν φανταστικά τέρατα, όπως Πήγασοι (πραγματικά άλογα με φανταστικά φτερά, $\mathrm{re}(z)+i\,\mathrm{im}(z)$) και Δράκοι (σαύρες που βγάζουν φωτιές από το στόμα), αλλά τα φανταστικά αυτά ζώα συνδέονται με τα άλογα και τις σαύρες στον Πραγματικό Δρόμο με ένα τρόπο βαθύ: η Άλγεβρα μας βεβαιώνει ότι όταν η βόλτα μας στο Μιγαδικό Δάσος τελειώσει και επιστρέψουμε στον Πραγματικό Δρόμο, το ζώο στο οποίο η βόλτα μας θα μας οδηγήσει θα είναι πραγματικό και υπαρκτό, και θα είναι η **σωστή απάντηση** στο ερώτημα που μας οδήγησε να μπούμε στο Μιγαδικό Δάσος!

Κατά κάποιο τρόπο, αυτά που συμβαίνουν στο Μιγαδικό Δάσος έχουν μια "Ηχώ" στον Πραγματικό Δρόμο, και εξηγούν πολλά φαινόμενα στον Πραγματικό Άξονα που αλλιώς θα έμεναν ανεξήγητα. Για παράδειγμα, αν η **μιγαδική συνέχιση** (complex continuation) μιας πραγματικής συνάρτησης έχει κάπου **σημείο ανωμαλίας** (singularity point), τότε η πραγματική συνάρτηση δεν θα είναι αναλυτική έξω από την περιοχή που ορίζεται από την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς της μιγαδικής συνάρτησης (η οποία είναι η απόσταση από την κοντινότερη ανωμαλία). Αν δεν μπαίναμε στο Μιγαδικό Δάσος δεν θα ανακαλύπταμε ποτέ γιατί η πραγματική συνάρτηση συμπεριφέρεται άσχημα έξω απ' αυτήν αυτή την περιοχή – θα βλέπαμε την κακή συμπεριφορά αλλά δεν θα ξέραμε το γιατί.

Παράδειγμα 20.

Η πραγματική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1},$$

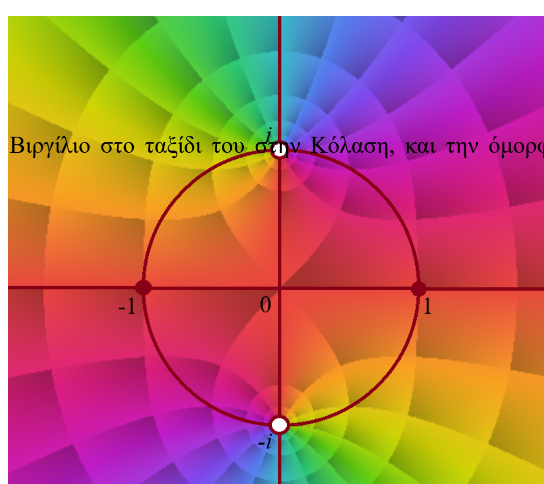


ορίζεται και είναι απείρως παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$. Όταν όμως προσπαθήσουμε να γράψουμε την συνάρτηση αυτή ως δυναμοσειρά Maclaurin, βρίσκουμε ότι

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \quad |x| < 1,$$

η οποία συγκλίνει μόνο για $x \in (-1, 1)$. Βλέπουμε λοιπόν ότι μια απείρως παραγωγίσιμη συνάρτηση δεν είναι αναλυτική έξω από το ανοιχτό διάστημα $(-1, 1)$, και δεν ξέρουμε γιατί. Άλλες απείρως παραγωγίσιμες συναρτήσεις όπως οι e^x και $\sin x$, είναι αναλυτικές σε όλο το $\mathbb{R}$, ενώ αυτή συμπεριφέρεται άσχημα.

Για να ανακαλύψουμε τον λόγο πρέπει να μπούμε στο Μιγαδικό Δάσος. Ο λόγος είναι ότι αν συνεχίσουμε την f στο μιγαδικό



[19] Όπως ο Δάντης στην *Θεία Κωμωδία* είχε οδηγό τον Βιργίλιο στο ταξίδι του στην Κόλαση, και την όμορφη Μπεατρίς στο ταξίδι του στον Παράδεισο.

επίπεδο, η μιγαδική συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, με

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1},$$

έχει **απλούς πόλους** στα σημεία $z = \pm i$. Παρότι οι ανωμαλίες αυτές είναι εκτός της πραγματικής γραμμής, η πραγματική δυναμοσειρά αποκλίνει εκεί που αποκλίνει η μιγαδική συνέχισή της, και συγκλίνει μόνο εκεί που συγκλίνει και η μιγαδική δυναμοσειρά Laurent. Στην γραφική παράσταση της f δεξιά βλέπουμε του πόλους στα σημεία i και $-i$, και τον κύκλο σύγκλισης της σειράς Laurent, που μας δίνει την σύγκλιση της σειράς Maclaurin στον πραγματικό άξονα στο ανοιχτό διάστημα $(-1, 1)$. Ακόμα κι αν εμείς αποφασίζαμε να αγνοήσουμε τις μιγαδικές ρίζες της συνάρτησης $z^2 + 1$, απλώς θα βάζαμε το κεφάλι μας στην άμμο, αφού αυτές είναι εκεί και επηρεάζουν καθοριστικά το τι συμβαίνει στην πραγματική γραμμή, δηλαδή στον πραγματικό κόσμο. Με αυτή την έννοια, και το μιγαδικό πεδίο είναι 'πραγματικό'.

■

Αν η συνάρτηση του παραπάνω παραδείγματος περιγράφει την λειτουργία ενός **φτερού αεροπλάνου**, το φτερό **θα κοπεί** έξω από το διάστημα $(-1, 1)$, και θα σκοτωθούμε αν αγνοήσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς. Οι συναρτήσεις που περιγράφουν τα φτερά των αεροπλάνων και τις δυνάμεις που ασκούνται επάνω τους είναι πράγματι μιγαδικές, και μελετώνται με τον ίδιο τρόπο όπως η συνάρτηση στο παράδειγμα παραπάνω. Στα κρίσιμα σημεία των συναρτήσεων αυτών οι δυνάμεις 'απειρίζονται' και τα φτερά κόβονται. [20]

Η Φύση ΥΠΑΚΟΥΕΙ στους μιγαδικούς αριθμούς!
Άρα, οι μιγαδικοί είναι τόσο 'πραγματικοί' όσο και οι πραγματικοί αριθμοί!

1.15 Οι Αριθμοί στην Αρχαία Ελλάδα

Αυτό που ονομάζουμε Αρχαία Ελλάδα διήρκησε τουλάχιστον 1000 χρόνια, ας πούμε από το 1000 π.Χ. ως το 1 μ.Χ. Όπως μπορεί να φανταστεί κανείς εύκολα, στην τεράστια αυτή περίοδο χρησιμοποιούνταν διάφορα συστήματα αρίθμησης, που διέφεραν τόσο χρονικά όσο και τοπικά. Το σύστημα που επικράτησε μετά τον 5 αι. π.Χ. και στο οποίο είναι

[20] Για παράδειγμα, ένας τρόπος σχεδίασης των φτερών των αεροπλάνων είναι με τον **μετασχηματισμό Joukowsky** (Joukowsky transform).

γραμμένα τα σπουδαιότερα μαθηματικά κείμενα της Κλασσικής και Ελληνιστικής περιόδου ήταν το Ιωνικό σύστημα, και είναι αυτό το σύστημα που θα περιγράψουμε εδώ. Το μετέπειτα Ρωμαϊκό Σύστημα αρίθμησης ήταν στην ίδια λογική, με μόνη διαφορά ότι τα ελληνικά γράμματα αντικαταστάθηκαν με λατινικά. Το ενδιαφέρον στην παρουσίαση του Ιωνικού Συστήματος είναι στο να εκτιμήσουμε πόσο δύσχρηστο και αναποτελεσματικό είναι σε σχέση με το σύγχρονο Σύστημα Θέσης (positional system) που χρησιμοποιούμε στην καθημερινότητά μας. Στο σύγχρονο Δεκαδικό Σύστημα Θέσης, οι αριθμοί έχουν ειδικά σύμβολα

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

και διαφορετική σημασία ανάλογα με την θέση στην οποία εμφανίζονται σε έναν αριθμό. Για παράδειγμα, στον αριθμό 352 το σύμβολο 2 σημαίνει απλώς δύο, αλλά στον αριθμό 523 το σύμβολο 2 σημαίνει είκοσι. Οργανώνοντας τους αριθμούς σε μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες κτλ. απλοποιεί κατά πολύ τις πράξεις και προάγει το εμπόριο και τις συναλλαγές. Δεν είναι τυχαίο ότι το Σύστημα Θέσης εισήχθηκε στην Ευρώπη από Ιταλούς εμπόρους τον 12ο αιώνα μ.Χ., οι οποίοι το έμαθαν από τους Άραβες έμπορους με τους οποίους είχαν δοσοληψίες και οι οποίοι το χρησιμοποιούσαν για να κρατούν τα βιβλία τους. Η χώρα προέλευσης του Δεκαδικού Συστήματος Θέσης είναι η Ινδία, στην οποία το σύστημα χρησιμοποιούνταν τουλάχιστον από τον 8ο αι. μ.Χ..

Το **Ιωνικό Σύστημα αρίθμησης** είναι αλφαβητικό, δηλαδή τα γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου χρησιμοποιούνται ως ψηφία. Οι αριθμοί σχηματίζονται με την προσθετική αρχή, δηλαδή από αριστερά προς τα δεξιά σε φθίνουσα τάξη, π.χ. $621 = \chi\kappa\alpha'$. Η αντιστοίχιση των γραμμάτων με ψηφία στο Ιωνικό Σύστημα είναι ως εξής:

Το Ιωνικό Σύστημα Αρίθμησης

1	2	3	4	5	6	7	8	9
α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϟ
100	200	300	400	500	600	700	800	900
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000
,α	,β	,γ	,δ	,ε	,ς	,ζ	,η	,θ

ς (στίγμα) = 6 ϙ ή ϟ (κόππα) = 90 ϡ (σαμπί) = 900

Το μηδέν δεν θεωρούνταν αριθμός και δεν υπάρχει σύμβολο για αυτό. Δεδομένου ότι το ελληνικό αλφάβητο έχει μόνο 24 γράμματα, τρία παλαιότερα γράμματα, το στίγμα, το κόππα και το σαμπί, συμπληρώνουν τα 27 σύμβολα που απαιτούνται στον παραπάνω πίνακα.

Τα αριθμητικά στοιχεία διακρίνονται από τις λέξεις με μια γραμμή από πάνω τους ή προσθέτοντας έναν τόνο στο τέλος. Επιπλέον στο ιωνικό σύστημα οι χιλιάδες συμβολίζονται με ένα διακριτικό κόμμα πριν και κάτω του γράμματος με το οποίο πολλαπλασιάζονται. Επομένως: ,α = 1000 ,β = 2000 και ούτω καθεξής.

Για τους ακόμα μεγαλύτερους αριθμούς το γράμμα Μ το οποίο συμβολίζει τις δέκα χιλιάδες 10000 (δέκα χιλιάδες = 1 μυριάδα) χρησιμοποιείται με τον πολλαπλασιαστή να τοποθετείται από πάνω του. Για παράδειγμα,

$$\overset{\beta}{\mathrm{M}} = 2 \times 10000 = 20000.$$

Παράδειγμα 21. Μερικά παραδείγματα αριθμών είναι:

$$\iota\gamma'(=\overline{\iota\gamma}) = 13, \quad \xi\varepsilon' = 65, \quad \sigma\lambda\zeta' = 237, \quad \tau\alpha' = 301,$$

$$,\gamma\psi\lambda\eta' = 3738, \quad ,\varepsilon\eta' = 5008, \quad \overset{\lambda\eta}{\mathrm{M}},\alpha\varphi\omicron\delta' = 381574$$

■

Τα κλάσματα γράφονται ως ζεύξη τονισμένων αριθμών. Κάποιες φορές ο αριθμητής είναι σημειωμένος με τόνο, ενώ ο παρονομαστής επαναλαμβάνεται δύο φορές με διπλό τόνο. Για παράδειγμα,

$$\frac{2}{3} = \beta'\gamma''\gamma''.$$

Σε μια άλλη εκδοχή, ο παρονομαστής γράφεται πάνω από τον αριθμητή χωρίς κλασματική γραμμή. Για παράδειγμα,

$$\frac{2}{3} = \begin{matrix}\gamma \\ \beta\end{matrix}$$

Οι πράξεις στο Ιωνικό και μετέπειτα στο Ρωμαϊκό σύστημα είναι πολύ δύσκολες και απαιτούν ειδικές δεξιότητες που κατείχαν ελάχιστοι άνθρωποι. Υπολογίζεται ότι στην περίοδο μεταξύ του 1 αι. μ.Χ. έως και τον 16 αι. μ.Χ. (δηλ. μέχρι την Πρώτη Βιομηχανική Επανάσταση) στην οποία ο πληθυσμός στην Ευρώπη ήταν κατά 90% αγροτικός, μόνο το 10% των ανθρώπων μπορούσε να διαβάσει και ακόμα λιγότεροι μπορούσαν και να γράψουν. Από αυτό το 10%, μόνο ένα μικρό τμήμα μπορούσε να κάνει πράξεις όπως πρόσθεση και αφαίρεση. Η εισαγωγή του συστήματος θέσης τον 12ο αι. ήταν μια τεχνολογική επανάσταση που διευκόλυνε το εμπόριο και τις συναλλαγές, αλλά και βοήθησε καθοριστικά στην περαιτέρω πρόοδο στα Μαθηματικά με την επανάσταση που έφερε η Άλγεβρα, που πρωτοαναπτύχθηκε από τους Άραβες και η οποία κάνει καθοριστική χρήση του συστήματος θέσης.

1.49 Άσκηση

1. Να γραφούν οι ακόλουθοι (δεκαδικοί) αριθμοί στο Ιωνικό Σύστημα:
   a. 23 **b.** 107 **c.** 227 **d.** 8256 **e.** 769305 **f.** $\frac{3}{5}$ **g.** $\frac{19}{21}$

2. Να γραφούν οι ακόλουθοι Ιωνικοί αριθμοί στο σύγχρονο (δεκαδικό) σύστημα:
   a. $\lambda\varepsilon'$ **b.** $\kappa\alpha'$ **c.** $\varphi\zeta\varsigma'$ **d.** $,\varepsilon\chi o\eta'$ **e.** $\overset{\pi\varepsilon}{\mathrm{M}},\varsigma\pi\gamma'$
   f. $\overset{\tau\kappa\theta}{\mathrm{M}},\delta\eta'$ **g.** $\lambda'\mu\varepsilon''\mu\varepsilon''$ **h.** $\begin{matrix}\mu\alpha\\ \lambda\varepsilon\end{matrix}$

Answer of exercise 1

1. Για $n \geq 1$, θέτουμε $S(n)$ να είναι η πρόταση

$$S(n) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Βάση της επαγωγής: Η πρόταση $S(1)$ είναι αληθής αφού $1^2 = 1(2)(3)/6$.

Επαγωγικό Βήμα $(S(k) \to S(k+1))$**:** Έστω κάποιο $k \geq 1$ για το οποίο η πρόταση

$$S(k) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

είναι αληθής. Θέλουμε να δείξουμε ότι τότε

$$S(k+1) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}.$$

Γράφουμε LHS (left-hand-side) για την αριστερή πλευρά και RHS (right-hand-side) για την δεξιά πλευρά της ισότητας που θέλουμε να δείξουμε. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= (k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right] = (k+1)\frac{k(2k+1)+6(k+1)}{6} \\
&= (k+1)\frac{2k^2+k+6k+6}{6} = (k+1)\frac{2k^2+7k+6}{6} \\
&= (k+1)\frac{(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} \\
&= \text{RHS},
\end{aligned}$$

και το επαγωγικό βήμα αποδείχθηκε. Τέλος, η Αρχή της Μαθηματική Επαγωγής μας δίνει ότι η πρόταση $S(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

5. **Βάση της επαγωγής:** Για $n = 1$, $1 + x = 1 + x$ και άρα η ανισότητα ισχύει.

Επαγωγικό Βήμα: Έστω ότι για κάποιο ακέραιο $k \geq 1$, $(1+x)^k \geq 1 + kx$. Τότε,

$$\begin{aligned}
(1+x)^{k+1} &= (1+x)(1+x)^k \\
&\geq (1+x)(1+kx) \\
&= 1 + (k+1)x + kx^2 \\
&\geq 1 + (k+1)x\ ,
\end{aligned}$$

αφού $kx^2 \geq 0$, και το επαγωγικό βήμα αποδείχθηκε. Τέλος, η Αρχή της Μαθηματική Επαγωγής μας δίνει ότι η πρόταση είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Answer of exercise 34

$a = c\cos\theta,\ b = c\sin\theta$

$\therefore$ Area$(c,\theta) = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(c\cos\theta)(c\sin\theta) = \frac{1}{2}c^2\cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}c^2\frac{1}{2}\sin 2\theta = c^2\left(\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)$

$\therefore\ f(\theta) = \frac{1}{4}\sin 2\theta$

Answer of exercise 49

1. **a.** 23 = βγ′ **b.** 107 = ρζ′ **c.** 227 = σκζ′ **d.** 8256 = ,ησνς′ **e.** 769305 = $\overset{\text{ζς}}{\text{M}}$,θτε′
f. $\dfrac{3}{5} = \gamma'\varepsilon''\varepsilon'' = \dfrac{\varepsilon}{\gamma}$ **g.** $\dfrac{19}{21} = \iota\theta'\kappa\alpha''\kappa\alpha'' = \dfrac{\kappa\alpha}{\iota\theta}$

2. **a.** λε′ = 35 **b.** κα′ = 21 **c.** φζς′ = 576 **d.** ,εχοη′ = 5678 **e.** $\overset{\text{πε}}{\text{M}}$,ςπγ′ = 856 083
f. $\overset{\text{τκθ}}{\text{M}}$,δη′ = 3 294 009 **g.** $\lambda'\mu\varepsilon''\mu\varepsilon'' = \dfrac{30}{45}$ **h.** $\dfrac{\mu\alpha}{\lambda\varepsilon} = \dfrac{35}{41}$